Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104729**

ID профиля: **823390**

Вариант 20

Чистовик. Часть 1. Вариант 20.

№ 1

Пусть d - шаг арифметической прогрессии, и так как все члены арифм. прогрессии - целые числа, а сама прогрессия возрастающая $\Rightarrow$ $d \in N$, тогда:

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_9 = a_1 + 8d$

$S_{\cancel{1+5}} = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = 5a_1 + 10d$

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{11} > S + 15 \\ S + 39 > a_8 \cdot a_9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > 5a_1 + 10d + 15 \\ 5a_1 + 10d + 49 > (a_1 + 7d)(a_1 + 8d) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 15da_1 + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \\ 5a_1 + 10d + 39 > a_1^2 + 15da_1 + 56d^2 \end{cases}$$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{15da_1} + \cancel{50d^2} + \cancel{5a_1} + \cancel{10d} + 39 > \cancel{a_1^2} + \cancel{15da_1} + 56d^2 + \cancel{5a_1} + \cancel{10d} + 15$

$24 > 6d^2$

$d^2 < 4$, а так как $d \in N \Rightarrow d = 1$, тогда

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 25 \\ a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 = 0$

$D = 100 - 28 = 72 = (6\sqrt{2})^2$

$$\left[\begin{array}{l} a_1 = \frac{-10 - 6\sqrt{2}}{2} = -5 - 3\sqrt{2} \\ a_1 = \frac{-10 + 6\sqrt{2}}{2} = -5 + 3\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Оценка: $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$

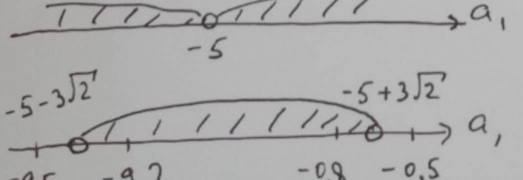
1) $-4{,}5 < -3\sqrt{2} < -4{,}2$

$-9{,}5 < -5 - 3\sqrt{2} < -9{,}2$

2) $4{,}2 < 3\sqrt{2} < 4{,}5$

$-0{,}8 < -5 + 3\sqrt{2} < -0{,}5$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \in Z \\ \\ \end{cases}$



$\Rightarrow a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

21104729 (U823390 M1301970)

Чистовик. Часть 1. Вариант 20

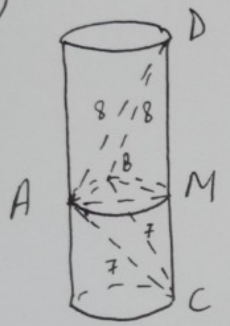
~ 2

1) Высоты из точек A и B на прямую CD падают в одну точку M, т.к. $\triangle ADC = \triangle BDC$ (по III призн. рав. $\triangle$-в) $\Rightarrow \begin{cases} AM \perp CD \\ BM \perp CD \end{cases} \Rightarrow$

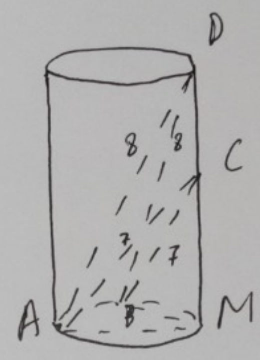
$\Rightarrow (ABM) \perp CD$ и так как CD параллельна оси цилиндра $\Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle ABM \parallel$ основанию $\Rightarrow$ лежит на сечении цилиндра, параллельном основанию.

2) Итак, есть всего 2 возможных ситуации:

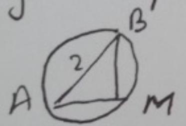
I



II



3) Сечение (ABM) представляет собой круг с радиусом r, и он имеет хорду $|AB| = 2$ ед. ~~Наименьший~~ Круг с наименьшим радиусом получается в случае, когда AB является диаметром, тогда $|AM| = |BM| = \sqrt{2}$ ед.



4) $(ABM) \perp CD \Rightarrow BM \perp CD \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle BMD$ и $\triangle BMC$ - прямоугольные $\Rightarrow$
$\Rightarrow |DM| = \sqrt{|BD|^2 - |BM|^2} = \sqrt{64-2} = \sqrt{62}$ (ед)
$|MC| = \sqrt{|BC|^2 - |BM|^2} = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$ (ед)
$|CD| = |MD| + |MC| = \sqrt{62} + \sqrt{47}$ (ед)

4) $(ABM) \perp CD \Rightarrow BM \perp CD \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle BMD$ и $\triangle BMC$ - прямоугольные $\Rightarrow$
$\Rightarrow |DM| = \sqrt{|BD|^2 - |BM|^2} = \sqrt{64-2} = \sqrt{62}$ (ед)
$|MC| = \sqrt{|BC|^2 - |BM|^2} = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$ (ед)
$|CD| = |MD| - |MC| = \sqrt{62} - \sqrt{47}$ (ед)

Ответ: Ребро CD может принимать длину: ① $\sqrt{62} + \sqrt{47}$ (ед)
② $\sqrt{62} - \sqrt{47}$ (ед)

21104729 (U823390 M1301970)

Чистовик. Часть 1. Вариант 20

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;\,13) \end{cases}$$

① Если $-4a-6b \le 13$

$6b \ge -4a-13$

$b \ge -\frac{2}{3}a - \frac{13}{6}$

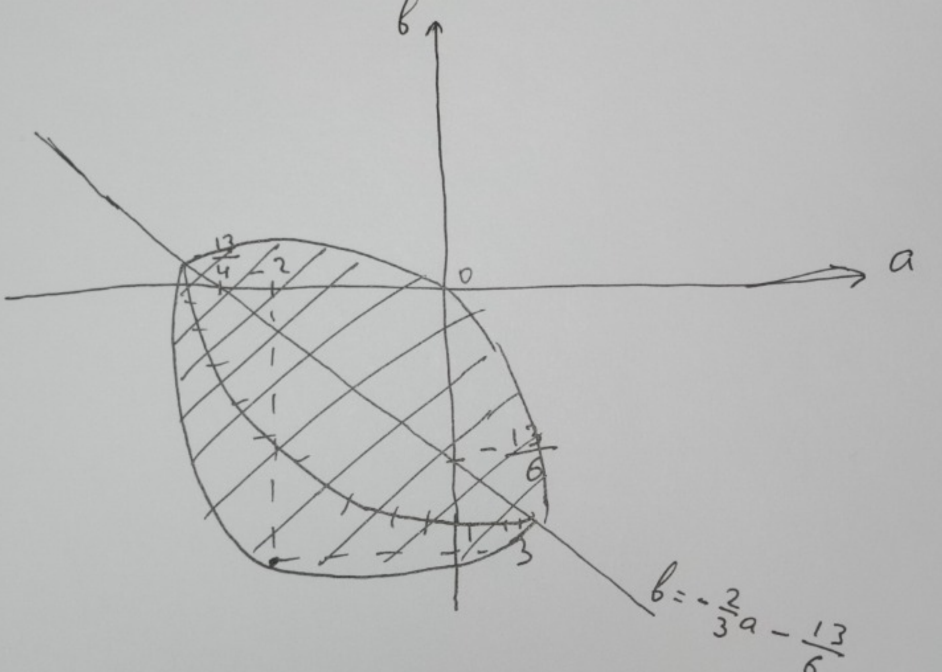
$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$

② Если $-4a-6b \ge 13$

$b \le -\frac{2}{3}a - \frac{13}{6}$

$a^2+b^2 \le 13$

Удовлетворяющие значения a и b:



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104729**

ID профиля: **823390**

Вариант 20

Чистовик. 2 Часть. 20 Вариант

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 10 \\ НОК(a;b;c) = 2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$ => числа a,b,c в разложении на простые множители содержат только „2" и „5"

$a = 2^{d_1}\cdot 5^{p_1}$

$b = 2^{d_2}\cdot 5^{p_2}$

$c = 2^{d_3}\cdot 5^{p_3}$

Исходя из условия: $$\begin{cases} \min(d_1;d_2;d_3) = 1 \\ \min(p_1;p_2;p_3) = 1 \\ \max(d_1;d_2;d_3) = 17 \\ \max(p_1;p_2;p_3) = 16 \end{cases}$$ =>

=> У нас имеются наборы степеней двоек: $(1;d;17)$, где $\begin{cases} 1\le d\le 17 \\ d\in N \end{cases}$

и наборы степеней ~~з~~ пятерок: $(1;p;16)$, где $\begin{cases} 1\le p\le 16 \\ p\in N \end{cases}$

Посчитаем кол-во различных ~~на~~ наборов степеней

① Когда ~~все~~ все числа степеней различны: $6\cdot 15\cdot 6\cdot 14$ способов

② Когда повторяются только степени „2": 1 1 17 — 1 17 17

$3\cdot 6\cdot 14$ способов $+ 3\cdot 6\cdot 14$ способов

③ Повторяются только степени „5": $3\cdot 6\cdot 15 + 3\cdot 6\cdot 15$ способов

④ Повторяются степени и двоек и пятёрок: $3\cdot 6$ способов

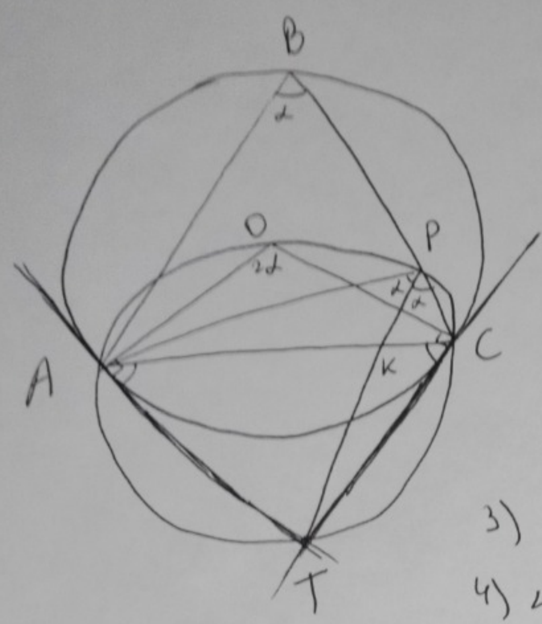
Всего: $6\cdot 6\cdot 15\cdot 14 + 2\cdot(3\cdot 6\cdot 14) + 2\cdot(3\cdot 6\cdot 15) + 18 = 8622$ способа

Ответ: 8622 набора

21104729 (U823390 M1301971)

Чистовик. 2 Часть. 20 Вариант

№ 6



а)

1) $\angle OAT = 90^\circ$ (по св-ву отр касательной) $\Rightarrow$ $\angle OCT = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle OAT + \angle OCT = 180^\circ \Rightarrow OATC$ - вписанный четырехугольник $\Rightarrow$ т. T лежит на окружности описанной около $\triangle AOC$

2) $|AT| = |TC|$ (по св-ву касат.-х из 1ой точки)

$\Downarrow$

$\angle CAT = \angle ACT$ (по св-ву впис. углов, опирающ. на равные дуги)

3) $\angle APT = \angle ACT$ (по св-ву впис. углов, опирающ на одну дугу)

4) $\angle TPC = \angle CAT$ (— || —)

5) $\angle APK = \angle KPC = \alpha$ (из п 2, 3, 4, св-ву транз-ти)

6) $\angle AOC = \angle APC = 2\alpha$ (из п 5, по св-ву впис. углов, опирающ на одну дугу)

7) в окружности ω с центром в т. O : $\angle AOC$ - центральный угол и $\angle AOC = 2\alpha \Rightarrow \angle ABC = \alpha$

8) $\triangle APK$ и $\triangle PKC$ - 2 треугольника имеющих одну высоту $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{S_\triangle APK}{S_\triangle PKC} = \dfrac{AK}{KC} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow AK = \dfrac{5}{4} KC \Rightarrow AC = \dfrac{9}{4} KC$

$\angle PCK$ - общий для $\triangle ABC$ и $\triangle KPC$

9) $\angle ABC = \angle KPC = \alpha \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$ (по 2ум углам)

~~∠ABC и ∠KPC соответственные углы при прямых AB и PK и секущ. BP~~ $\Rightarrow$

~~=> AB ∥ PK~~

10) $\dfrac{S_\triangle ABC}{S_\triangle KPC} = k^2 = \left(\dfrac{AC}{KC}\right)^2 = \left(\dfrac{9}{4}\right)^2 \Rightarrow S_\triangle ABC = \dfrac{81}{16} \cdot S_\triangle KPC = 40{,}5$ (ед²)

Ответ: $S_\triangle ABC = 40{,}5$ (ед²)