Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104689**

ID профиля: **380649**

Вариант 20

№1

d-разность арифметич. прогрессии, тогда $d>0$ и $d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d \in \mathbb{N}$

$S' = 5a_1 + 10d$

$a_6 \cdot a_{11} = a_1^2 + 15a_1d + 50d^2$

$a_8 a_9 = a_1^2 + 15a_1d + 56d^2$

Тогда получим систему:

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \\ a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 - 5a_1 - 10d > 15 \quad (1) \\ a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 - 5a_1 - 10d < 39 \quad (2) \end{cases}$$

Пусть $t = a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 - 50a - 10d$, тогда

$$\begin{cases} t > 15 \\ t + 6d^2 < 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &6d^2 < 39 - 15 \\ &6d^2 < 24 \\ &d^2 < 4 \\ &d = 1 \Rightarrow \cancel{a_1^2 + 15a_1 + 50 < 5a_1 + 25} \end{aligned}$$

$\cancel{a_1^2 + 10a_1 + 25 < 0}$

$\cancel{a_1 = -5}$

~~Ответ: $a_1 = -5$~~

(2) $\cancel{a_1^2 + 10a_1 + 46 - 39 < 0}$

$\cancel{a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0}$

$\cancel{(a_1 + 5)^2 - 18 < 0}$

$\cancel{a_1 = -5}$;

(1) $\cancel{a_1^2 + 10a_1 + 25 < 0}$

$\cancel{(a_1 + 5)^2 < 0}$

$\cancel{a_1 \in \varnothing}$

(1) $a_1^2 + 10a_1 + 25 < 0$

$a_1 \in \varnothing$

Ответ: таких ~~a_1~~ a_1 не существует

Чистовик

№3

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le \min(-4a-6b,\ 13) \\ (x-a)^2+(y-b^2) \le 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le -4a-6b \\ a^2+b^2 \le 13 \\ (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+4a+b^2+6b \le 0 \\ a^2+b^2 \le 13 \\ (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+2)^2-4+(b+3)^2-9 \le 0 \\ a^2+b^2 \le 13 \\ (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le 13 \\ (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \quad (3) \end{cases}$$

Рассмотрим 1 и 2 нер-ва: и построим их решения в пл-ти Оав

$$\begin{cases} (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13 \text{ - } \text{круг } \cancel{\text{окр-ть}} \text{ с } R=\sqrt{13} \text{ и центром } (-2;-3) \\ a^2+b^2 \le 13 \text{ - } \text{круг } \cancel{\text{окр-ть}}\ R=\sqrt{13} \text{ и центром } (0;0) \end{cases}$$

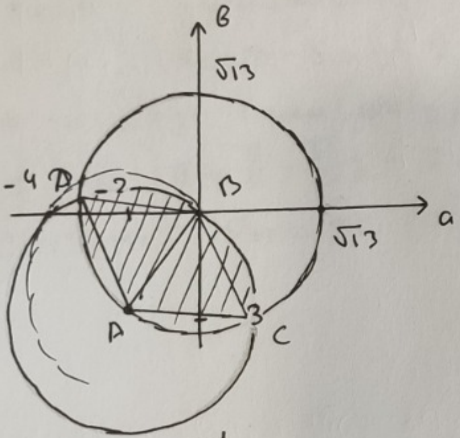


рис 1

Пересекая решения этих неравенств, получим следующую область на графике (см. рисунок 1)

Рассмотрим ~~ф~~ график нер-ва (3) в пл-ти Оxy. Это круг ~~окр-ность~~ с центром в т $(a;b)$ и $R=\sqrt{13}$.

Но как мы выяснили, нам подходят а и в, лежащие в области пересечения двух окр-тей $\Rightarrow$ центры возможных кругов ~~окр-ти~~ являются такие пари $(a;b)$, которые лежат в области пересечения.

Т.е. мы получим фигуру, изображенную на рисунке 2. Она состоит из трех частей:

1 и 2: $\frac{1}{3}$ кольца, между окр-тями радиуса $\sqrt{13}$ и $2\sqrt{13}$ (т.к. (рис 1) $\triangle ABC$ и $\triangle ABД$ р/б $\Rightarrow \angle ДАС = \angle ДВС = 120°$)

Тогда их площадь:

$$S_1+S_2 = \frac{2}{3}\pi\left((2\sqrt{13})^2-\sqrt{13}^2\right) = \frac{2}{3}\pi(4\cdot 13-13) = \frac{2}{3}\pi\cdot 3\cdot 13 = 2\pi\cdot 13 = 26\pi$$

3: область пересечения 2х окр-тей (рис 1). Найдем ~~эту~~ площадь этой части:

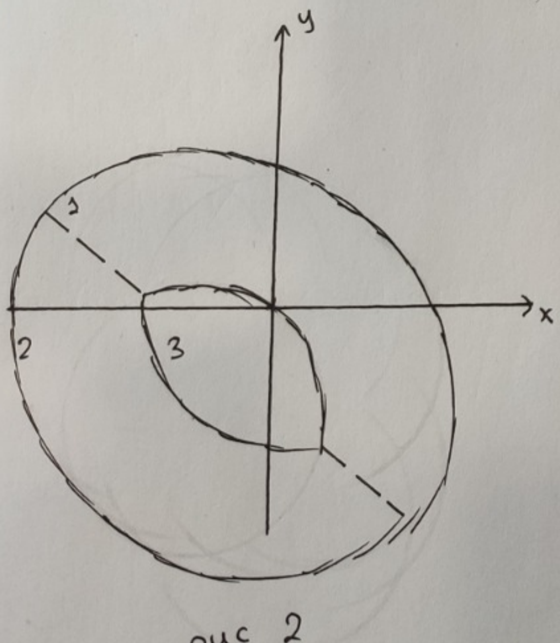
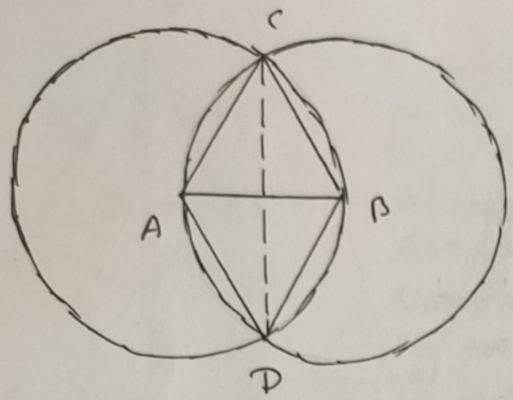


рис 2

Чистовик (3)

№3 (продолжение)



$\angle CBD = 120° \Rightarrow S'_{CBD} = \frac{1}{3}\pi \cdot \sqrt{13}^2 =$

$= \frac{13}{3}\pi$ (~~ос~~ площадь сектора)

~~по теор. косинусов~~

~~$CD^2 = 13 + 13 - 2\cos 120 \cdot |13 \cdot 13| =$~~

~~$= 26 + 13 = 39$~~

~~$CD = \sqrt{39}$~~

пб

$S'_\Delta = \frac{1}{2} CB \cdot BD \cdot \sin 120° = 13/2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{13\sqrt{3}}{4}$ (площадь $\triangle BCD$)

Тогда искомая наши площадь будет равна (т.к. окр-ти одинаковые):

$S'_3 = 2(S_{CBD} - S_\Delta) = 2 \cdot \left(\frac{13\pi}{3} - \frac{13\sqrt{3}}{4}\right) = 26\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

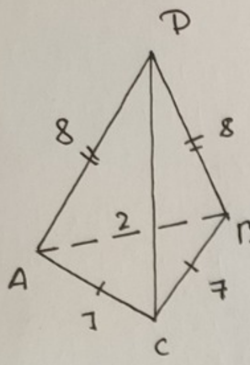
А площадь ~~иско~~ фигуры M: $S'_M = S_1 + S_2 + S_3 =$

$= 26\left(\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 26\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Ответ: $S'_M = 26\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

21104689 (U380649 M1298831)

№2



1.) Найдем радиусы окр-тей, описанных около $\triangle ABC$ и $\triangle APB$. Пусть это R_1 и R_2 соответственно.

~~По формуле Герона~~

~~$S_{ABC} = \sqrt{8 \cdot 8}$ [illegible] $= 4\sqrt{3}$~~

~~[illegible]~~

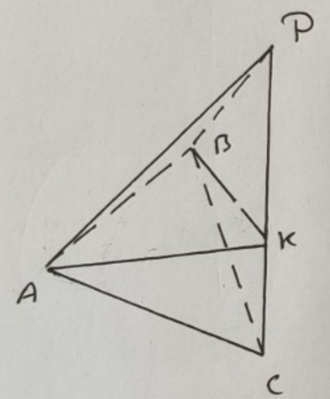
По теор косинусов

$$\cos APB = \frac{64+64-49}{2 \cdot 64} = \cancel{\frac{89}{128}} \quad \frac{16+16-1}{32} = \frac{31}{32}$$

$$\cos ACB = \frac{49+49-4}{2 \cdot 49} = \frac{94}{2 \cdot 49} = \frac{47}{49}$$

Тогда $\sin APB = \frac{\sqrt{32^2-31^2}}{32} = \frac{\sqrt{32}}{32} = \frac{4\sqrt{2}}{32} = \frac{\sqrt{2}}{8}$

$\sin ACB =$



Радиус цилиндра будет равен радиусу описанной окр-ти около $\triangle ABK$, где $(ABK) \perp CP$. Тогда ищем такое CP, что радиус будет минимальным. Это возможно, если AB - будет диаметром этой окр-ти, тогда $\angle BKA = 90^\circ \Rightarrow$ (в силу симметрии тетраэдра отн пл-ти, проходящей через CP и ось цилиндра)

$BK = AK$, тогда по теор Пифагора

$2BK^2 = AB^2 \Rightarrow \quad BK = \sqrt{\frac{AB^2}{2}} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} = AK$, тогда

по теор Пифагора $DK = \sqrt{AP^2 - AK^2} = \sqrt{64-2} = \sqrt{62}$

$CK = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$, тогда $DC = \sqrt{62} + \sqrt{47}$

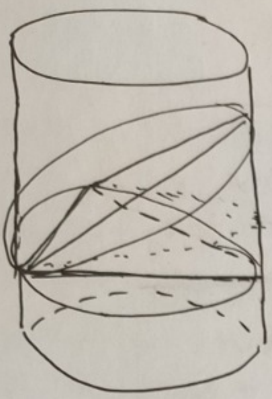
Ответ: $DC = \sqrt{62} + \sqrt{47}$

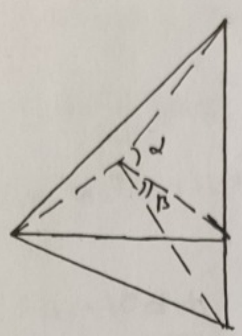
черновик.

98

94

$a_1^2+10a_1+$





d

$t>15$

$t+6d'<39$

~~$t+6d'>15+6d'<$~~

$t>15$

$-t<-15$

$6d'<24$

$64-49=25$

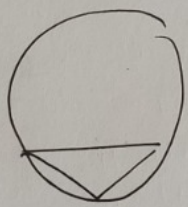
$CD \to max$

$a_1^2+10a_1+50-15=0$

$t>15$

$16+6<39$

~~$22<39$~~



$d=2$

$t>15$

$t+6d'<39$

AD

$15+6\cdot 4$

24 $\underline{\underline{=39}}$

$d=-1$

Черновик

N1

Пусть d - разность арифметической прогрессии. Причем $d \in \mathbb{N}$

Тогда: $S = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}(a_1 + a_1 + 4d) = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = (a_1 + 2d) \cdot 5 =$
$= 5a_1 + 10d$

$a_6 \cdot a_{11} = (a_1 + 5d) \cdot (a_1 + 10d) = a_1^2 + 5da_1 + 10da_1 + 50d^2 =$
$= a_1^2 + 15a_1d + 50d^2$

$a_8 \cdot a_9 = (a_1 + 7d)(a_1 + 8d) = a_1^2 + 15da_1 + 56d^2$

Тогда получим систему:

$$\begin{cases} a_1^2 + 5da_1 + 10da_1 + 50d^2 < 5a_1 + 10d + 15 \\ a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15da_1 + 50d^2 < 5a_1 + 10d + 15 & (1) \\ a_1^2 + 15da_1 + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39 & (2) \end{cases}$$

$(2) - (1)$: $6d^2 < 24$ $\qquad -t < -15$

$d^2 < 4$

т.к. $d \in \mathbb{N} \Rightarrow d = 1$ ~~или~~ ~~2~~

1) Если $d = 1$, то

$a_1^2 + 15a_1 + 50 < 5a_1 + 25$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 < 0$

$(a_1 + 5)^2 < 0$

$a_1 = -5$

2) Если $d = 2$, то

$a_1^2 + 10a_1 + 20a_1 + 50 \cdot 4 < 5a_1 + 20 + 15$

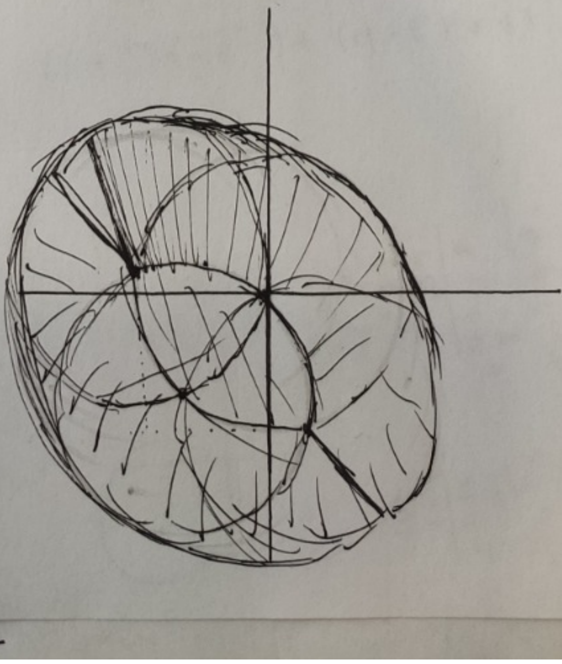
$a_1^2 + 30a_1 + 200 < 5a_1 + 35$

$a_1^2 + 25a_1 + 165 < 0$

$D = 625 - 165 \cdot 4 = 625 - 660 < 0$

Решений нет.

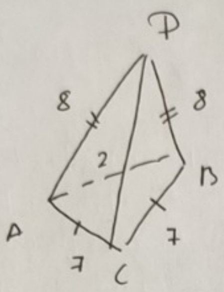
Ответ: $a_1 = -5$

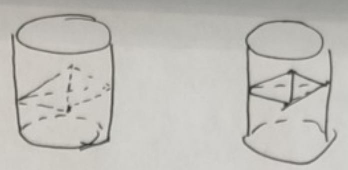


Черновик

$$\begin{array}{r} 165 \\ \times\ 4 \\ \hline 660 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 25 \\ \hline 125 \\ 50 \end{array}$$





$5<7$

$6<9$

$6-5<$

$6<7$

$8,5<9$

$8,5-6<9-7$

$2,5<2$

$5<7$

$6<9$

$6-5<9-7$

$1<2$

$a<b$

$c<d$

$a-c<b-c$

$5<7$

$5<7$

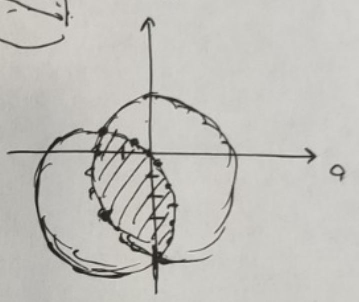
$a<b$

$-d<-c$

$a+c$

$a^2+b^2\le 13$

a^2+b^2



$a^2+b^2\le 13$

$a^2+b^2=$

$a^2=\sqrt{13-b^2}$

$|a|=\sqrt{13-b^2}$

$(x+\sqrt{13-b^2})+(y-b)\le 13$

$4a+6b+13=0$

$4a=\frac{13-6b}{4}$

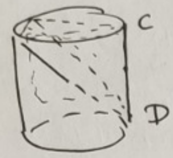
$\left(\frac{13-16b}{4}\right)^2+b^2\le 13$

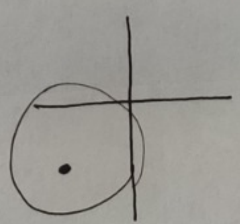
$169+256b^2-13\cdot 16\cdot b+16b^2\le 13\cdot 16$

$169+272b^2-208b\le 208$

$272b^2-208b-39\le 0$

$P=104\cdot 104+39\cdot 272$





Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104689**

ID профиля: **380649**

Вариант 20

Чистовик

№4

~~Всего возможно 3 варианта:~~

1) одна из чисел равно ~~10~~, тогда ~~НО~~

НОД $(a, b, c) = 10 \Rightarrow$ все числа делятся на 10. Тогда разделим их на 10 и получим $a_1 = a/10$; $b_1 = b/10$, $c_1 = c/10$, тогда

$$\begin{cases} НОД(a_1, b_1, c_1) = 1 \\ НОК(a_1, b_1, c_1) = 2^{16} \cdot 5^{15} \end{cases}$$

Тогда возможны ~~3~~ несколько вариантов

а) одно из чисел равно 1, пусть это $a_1 = 1$, тогда $НОК(b_1, c_1) = 2^{16} \cdot 5^{15} \Rightarrow b_1 = 2^m \cdot 5^n$ и $c_1 = 2^k \cdot 5^l$, где $m, n, k, l \in \mathbb{N}$ или равны 0, причем $\max(m, k) = 16$ $\max(n; l) = 15$. Пусть $m = 15$, тогда $k \in \mathbb{Z}$ $k \geq 0$, т.е. таких вариантов 16. Аналогично, если $k = 15$, то m можно выбрать 15 способами (исключаем вариант, когда $k = m = 15$) Аналогичные рассуждения справедливы для n и l, тогда всего вариантов:

$3 \cdot (15 \cdot 16 \cdot 4 + 1) = 3 \cdot 961 = 2883$ (1 - если $m = k = 16$ и $n = l = 15$)

~~Значит~~

б) только одно из чисел кратно 5 и ни одно из чисел не равно 1 (все варианты с 1 мы учли)

а) одно из чисел кратно 5, а остальные нет. Пусть $a_1 = 5^{15}$, тогда $НОД(b_1, c_1) = 2^{16} \Rightarrow b_1 = 2^m$ $c_1 = 2^n$, где m и $n \in \mathbb{N}$ или равны 0, $\max(m, n) = 16$. Таких вариантов: ~~17~~ $16 \cdot 16 + 1$ (прибавили 1, т.к. вариант $m = n = 16$ один) Тогда еще надо умножить на 3, т.к. чисел 3. Тогда

$3(16 \cdot 16 + 1) = 771$

б) аналогично, если одно из чисел кратно 2, а остальные нет. Таких вариантов: $3 \cdot (15 \cdot 15 + 1) = 678$

в) одно из чисел равно 1. ~~Пусть $a_1 = 1$, тогда~~ Пусть $a_1 = 1$, тогда $НОК(b_1, c_1) = 2^{16} \cdot 5^{15} \Rightarrow b_1 = 2^n \cdot 5^k$ $c_1 = 2^m \cdot 5^l$ и $m, l, n, k \in \mathbb{N}$ или равны 0, причем $\max(n, m) = 16$ и $\max(k; l) = 15$. Таких вариантов: $3 \cdot ((16 \cdot 16 + 1)(15 \cdot 15 + 1) - 2) = 3 \cdot (257 \cdot 226 - 2) = 3 \cdot (48082 - 2) = 3 \cdot 48080 = 144240$ (вычитаем 2, т.к. вариант $n = 16$ $m = 0$ ~~k~~ $l = 15$ $k = 0$ и $m = 16$ $n = 0$ $k = 15$ $l = 0$ мы учли в прошлых пунктах)

Чистовик

②

№4 (продолжение)

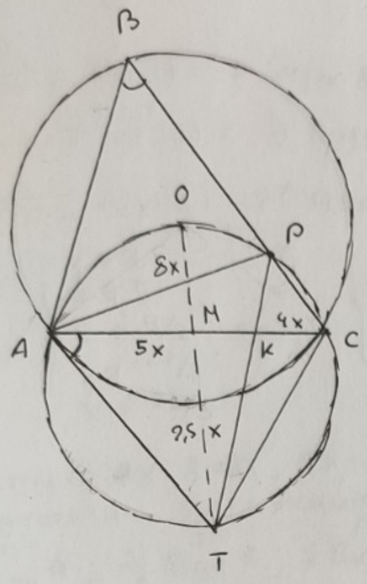
Всего $144240 + 678 + 771 = 144240 + 1449 = 145689$

Ответ: 145689

~~черновик~~

чистовик

№6



а) $\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{5}{4}$

$OC \perp CT$
$OA \perp AT$ (по св-ву касат) $\Rightarrow$

$\angle OCT + \angle OAT = 180° \Rightarrow$ около $OACT$ можно описать окр-ность $\Rightarrow$

T лежит на окр-ти, описанной около $\triangle AOC$

$\angle CAT = 1/2 \smile AC = 1/2 \smile CT \Rightarrow$

$\Rightarrow \smile AC = \smile CT \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = \angle KPC$ и $\angle C$ - общий $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$ (по двум углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \left(\frac{CK}{AC}\right)^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = \left(\frac{9}{4}\right)^2 S_{KPC} = \left(\frac{9}{4}\right)^2 \cdot 8 = \frac{81}{16} \cdot 8 = \frac{81}{2}$

Ответ: $81/2$

б) ~~$tg\,ABC = 1/2 \Rightarrow 1 + tg^2 ABC = 1/cos^2 ABC$~~

т.к. $\triangle AOC$ и $\triangle ATC$ р/б $\Rightarrow OT \perp AC$

$\angle ABC = \angle CPT = \angle CAT \Rightarrow tg\,CAT = 1/2 \Rightarrow TM/AM = 1/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow TM = 2,5x$

но $\angle CAT = 90 - \angle OAC = 90 - \angle OCA$ ~~$\Rightarrow tg\,CAT = tg(90 - \angle OCA)$~~

$\Rightarrow tg\,OCA = tg(90 - \angle CAT) = ctg\,CAT \Rightarrow \frac{OM}{MC} = 2 \Rightarrow OM = 2MC = 9x$

~~С другой стороны $\triangle AMT \sim \triangle OMC$ (по двум углам) $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \frac{AM}{OM} =$~~

Черновик

№ 5

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2\log_{2x-8}(x-4)$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2\log_{5x-26}(2x-8)$

ОДЗ: $\begin{cases} x>4 \\ x\neq 5 \\ x\neq 9/2 \\ x\neq 27/2 \\ x>26/5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ x\neq 5 \\ x\neq 27/2 \\ x\neq 9/2 \end{cases}$

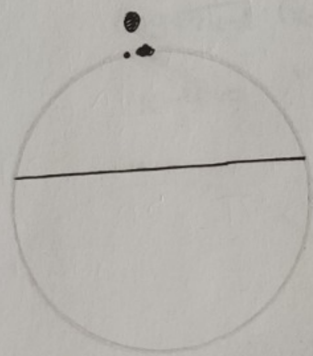
Пусть $2x-8=2a$, $5x-26=в$. $x-4=a$, тогда получим следующие выражения:

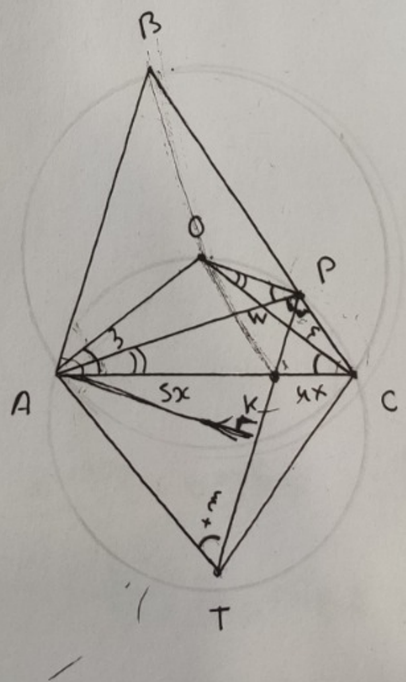
$\overset{(1)}{2\log_{2a} a}$; $\overset{(2)}{\frac{1}{2}\log_a в}$; $\overset{(3)}{2\log_в 2a}$

Пусть $(1)=(3)$, тогда $\log_{2a} a = \log_в 2a$

$\log_{2a} a = \frac{1}{\log_{2a} в}$

$\frac{AK}{KC} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$





черновик

№5

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$

$НОД(a; b; c) = 10$

$a = 10m$

$b = 10n$

$c = 10k$

НОК

$\log_5 6$

$\log_5 9$

$\log$

$5^9 \cdot 5^6$

$m = n = k$

$\log_a 2a$

$\log_a a + \log_a 2$

$\boxed{\log_b bc + \log_b 2}$

$2^{17} \cdot 5^{16}$

кол-во взаимно простых чисел, составленных из $2^{16} \cdot 5^{15}$.

$НОД(m, n, k) = 1$

$НОК(m, n, k) = \underbrace{2^{16} \cdot 5^{15}}$

1

$pm = 2^{16} \cdot 5^{15}$

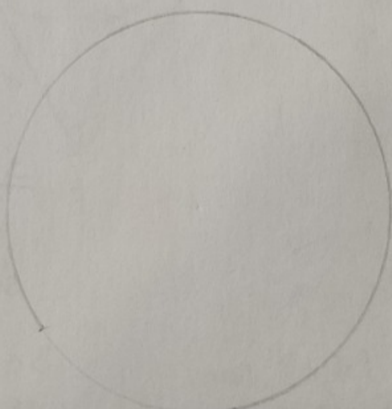
$ln = \boxed{2^{16} \cdot 5^{15}}$

$НОК(m, n) = 2^{16} \cdot 5^{15}$

$\log_{\sqrt{7x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$\log_{\sqrt{7x-8}}(x-4) \cdot \frac{1}{\log_{\sqrt{x-8}}(5x-26)}$

$x - 4 =$



$2\log_{2a} a = \frac{1}{2}\log_a b + 1$

$|\log_{2a} a - \log_b 2a| = \frac{1}{2}$

$\log_{2a} a - \frac{1}{\log_{2a} b}$

Черновик

0 1 2

№5

Рассмотрим все возможные варианты

1) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$2\log_{2x-8}(x-4) = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

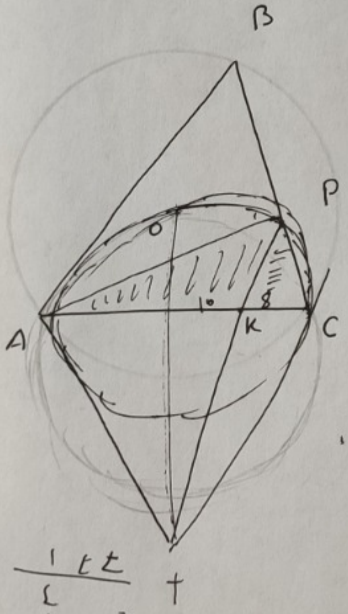
$4\log_{2x-8}(x-4) = \log_{(x-4)}(5x-26)$

$\frac{4}{\log_{2x-8}(x-4)^4} = \frac{1}{\log}$ $\quad \frac{4}{\log_{(x-4)^4}(2x-8)} = \log_{x-4}(5x-26)$

$x-4$

$\sqrt{10 \cdot 10 \cdot 10}$

1000000000



2 5

а) 1

б) 2/5

в) 5/2

НОК ( ) = $2^{17} \cdot 5^{16}$

$a = b = 2^{17} \cdot 5^{16}$

$a = 2^{15} \cdot 5^{15}$

$b =$

$a = 2^n \cdot 5^m$

$b = 2^k \cdot 5^l$

$\max(n, k) = 17$

$\max(m, l) = 15$

$m = 15 \quad n = 15$

$15 \cdot 4 = 60$

$961 \cdot 3 =$

2

$m =$

$k =$