Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104672**

ID профиля: **156416**

Вариант 20

№1 Чистовик

1) $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d = 5a_1 + 10d$

2) тк прогр возраст $\Rightarrow$ $\underline{d>0}$

тк $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $d \in \mathbb{Z}$

3) $a_6 \cdot a_{11} = (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > S + 15 = 5a_1 + 10d + 15.$

$a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15$

$a^2 + 5a_1(3d-1) + 50d^2 - 10d - 15 > 0$ (I)

4) $a_8 \cdot a_9 < S + 39$

$(a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1 + 10d + 39$

$a_1^2 + 15da_1 + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39$

$a_1^2 + 5a_1(3d-1) + 56d^2 - 10d - 39 < 0$ (II)

Решим систему из (I) и (II)

$$\begin{cases} a_1^2 + 5a_1(3d-1) + 50d^2 - 10d - 15 > 0 \\ a_1^2 + 5a_1(3d-1) + 56d^2 - 10d - 39 < 0 \end{cases}$$

Замена: $a_1^2 + 5a_1(3d-1) = t$

$$\begin{cases} t + 50d^2 - 10d - 15 > 0 \\ t + 56d^2 - 10d - 39 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t > -50d^2 + 10d + 15 \\ t < -56d^2 + 10d + 39 \end{cases}$$

Получается: $-50d^2 + 10d + 15 < t < -56d^2 + 10d + 39$

$-50d^2 + 10d + 15 < -56d^2 + 10d + 39$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$ $\rightarrow$ $d \in (-2;2)$ Вспоминаем 2 пункт и огр на d: $\begin{cases} d>0 \\ d \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\begin{cases} d \in (-2;2) \\ d > 0 \\ d \in \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow \underline{d = 1}$$

Возвращаемся к изначальной системе до замены на t и подставляем $d = 1$

№1 продолжение

Чистовик

$$\begin{cases} d = 1 \\ a_1^2 + 5a_1(3d-1) + 50d^2 - 10d - 15 > 0 \\ a_1^2 + 5a_1(3d-1) + 56d^2 - 10d - 39 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 5a_1 \cdot 2 + 50 - 10 - 15 > 0 \\ a_1^2 + 5a_1 \cdot 2 + 56 - 10 - 39 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \quad (2) \end{cases}$$

Решим отдельно (2)

$$a_1^2 + 10a_1 + 7 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 5^2 - 7 = 25 - 7 = 18$$

$$a_1 = -5 \pm 3\sqrt{2}$$

$$a_1^2 + 10a_1 + 7 = (a_1 - (-5-3\sqrt{2}))(a_1 - (-5+3\sqrt{2}))$$

Вернемся к системе

$$\begin{cases} a_1 \neq -5 \\ (a_1 + (5+3\sqrt{2}))(a_1 + (5-3\sqrt{2})) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2}) \end{cases}$$

~~Найд~~ Сравним числа:

$-5-3\sqrt{2} \lor -10$
$-3\sqrt{2} \quad -5$
$5 \quad 3\sqrt{2}$
$25 \quad 9 \cdot 2$
$25 > 18$
$-5-3\sqrt{2} > -10$

$-5-3\sqrt{2} \quad -9$
$-3\sqrt{2} \quad -4$
$4 \quad 3\sqrt{2}$
$16 < 18$
$-5-3\sqrt{2} < -9$

$-5+3\sqrt{2} \lor 0$
$3\sqrt{2} \quad 5$
$18 < 25$
$-5+3\sqrt{2} < 0$

$-5+3\sqrt{2} \lor -1$
$3\sqrt{2} \quad 4$
$18 > 16$
$-5+3\sqrt{2} > -1$

Получили: $-10 < -5-3\sqrt{2} < -9$; $\cancel{0}\ -1 < -5+3\sqrt{2} < 0$

тк $a_1 \in Z \Rightarrow a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2}) \to a_1 \in [-9; -1]$

Вернемся к системе:

$$\begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1 \in [-9; -1] \\ a_1 \in Z \end{cases} \to a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$$

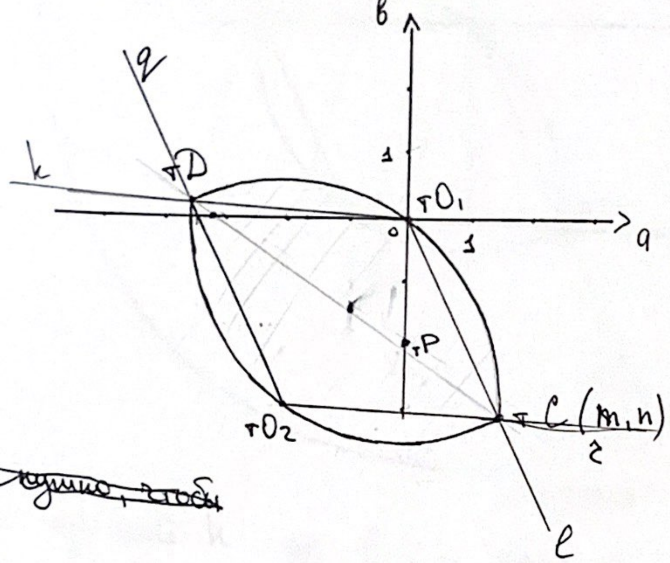
Ответ: $a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

Чистовик

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,\ 13)\end{cases} \to \begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 13\\ (2)\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b\ ;\ 13)\end{cases}$$

Построим график (2) на осях a, b



$-4a-6b=13$

a	-1	$-\frac{13}{4}$
b	$-\frac{3}{2}$	0

1) при $-4a-6b\ge 13$

$a^2+b^2\le 13$ – ур-ние круга с рад $\sqrt{13}$ и центром $(0,0)$

2) при $-4a-6b\le 13$

$a^2+b^2\le -4a-6b$

$a^2+4a+4+b^2+6b+9-13\le 0$

$(a+2)^2+(b+3)^2\le 13$

~~Нам нужно, чтобы~~

Нам нужно чтобы выполнялась система, то есть была хотя бы одна т пересеч/касан с $(a-x)^2+(b-y)^2\le 13$

1) для $-4a-6b\ge 13 \to \begin{cases}a^2+b^2\le 13\\ (a-x)^2+(b-y)^2\le 13\end{cases}$ ~~то~~ ← ур-ния окр, кругов, то есть ~~при~~ они будут иметь общие точки при расстоянии между их центрами $\le 2\sqrt{13}$ $x^2+y^2\le 2\sqrt{13}$.

но при этом, тк у нас $-4a-6b\ge 13$, то x, y принадлежат области отсек линиями l, k на графике у центра $(0,0)$ пер т C и т D соотв.

т O_1 – центр 1 окр $(a^2+b^2=13)$

т O_2 – центр 2 окр $((a+2)^2+(b+3)^2=13)$

$O_1O_2=\sqrt{13}$

$O_1C=\sqrt{13}$

$O_2C=\sqrt{13}$ } → тк точка на окр

$\triangle O_1O_2C$ – р/б $\Rightarrow \angle O_2O_1C=60^\circ$

т C лежит на $4a+6b=-13$

$4m+6n=-13 \to m=\frac{-13-6n}{4}$.

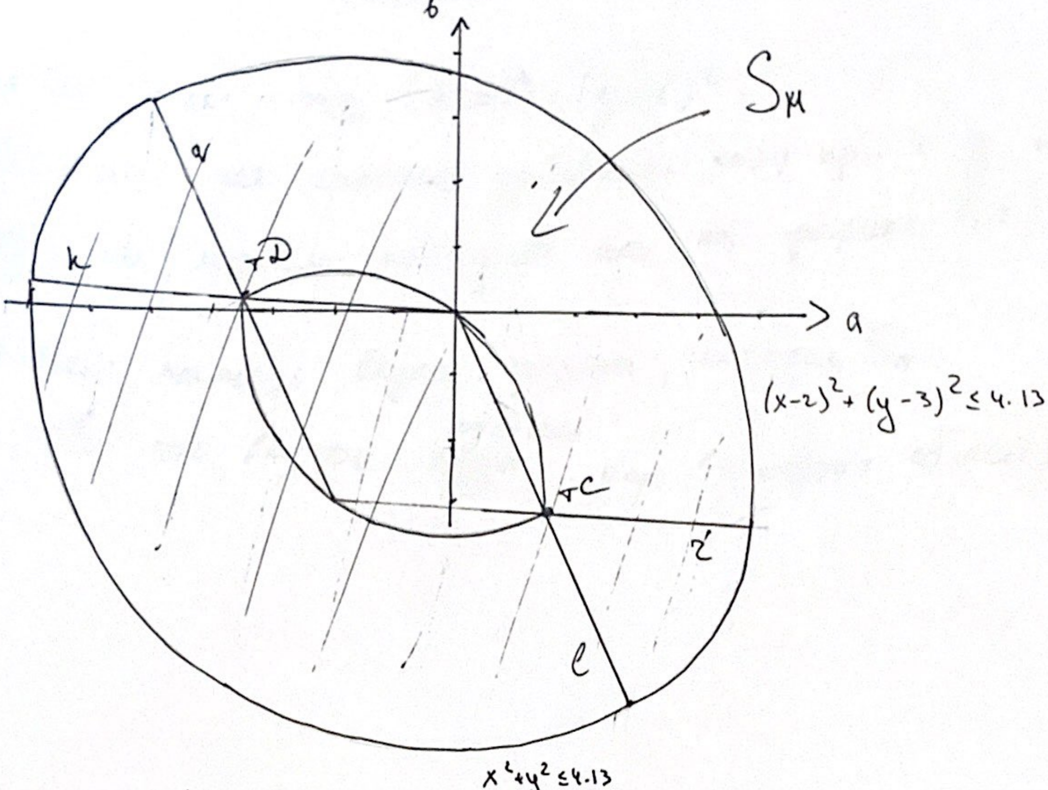
$60^\circ=\angle O_2O_1C=\angle O_2O_1P+\angle PO_1C$

$\frac{1}{2}=\cos 60^\circ=\cos(\angle O_2O_1P+\angle PO_1C)=\cos\angle O_2O_1P\cos\angle PO_1C-\sin\angle O_2O_1P\sin\angle PO_1C=$

$=\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\frac{n}{\sqrt{13}}-\frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{m}{\sqrt{13}}=\frac{3n}{13}-\frac{2m}{13}=\frac{3n+\frac{13+6n}{2}}{13}=$

$=\frac{12n+13}{26}=\frac{6n}{13}+\frac{1}{2}$

№3 Чистовик



от прямой k до l – окр с центом в (0,0) и радиусом $2\sqrt{13}$, тк $x^2+y^2\le$ ~~...~~ $4\cdot 13$ из предыдущего рассуж

Аналогично для $-4a-6b\le 13$ (рассуждения аналог)

$(x-2)^2+(y-3)^2\le 4\cdot 13$

между r и q

Между (r и l) и (q и k) находим ~~...~~ точки при которых ~~отк те радиу~~ окр $(x-a)^2+(b-y)^2\le 13$ будет касаться крайних точек то есть т D, т C

Такие точки расположены на расстоянии $\sqrt{13}$ от т D и т C

Строим окр с радиусом $\sqrt{13}$ и цнтром в т D и т C.

Получаем, что фигура M – вся область внутри наших постр окр

№3 Чистовик

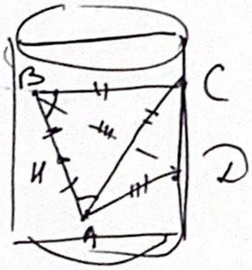
~~Если~~ Тк у нас ~~окр~~ $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$
то есть нет никаких добавочных коэф при x y, поэтому мы можем находить их на графике $b(a)$

Считаем площадь внутри графика, находим $S_н$
(всё, что внутри ~~круга~~ кусочном окр (заштрих область)

5

№2 Чистовик

тк СД ‖ оси цилиндра и т С и т Д лежат на боковой поверхности => СД полностью лежит на боковой поверхности цилиндра

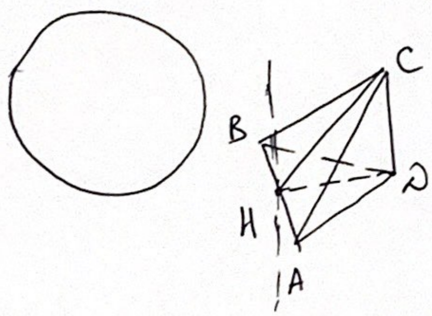


R - мин.

тк CB = CA и ДA = ДB

то ~~[illegible]~~ симметрия отн плоскости прох через т СД И

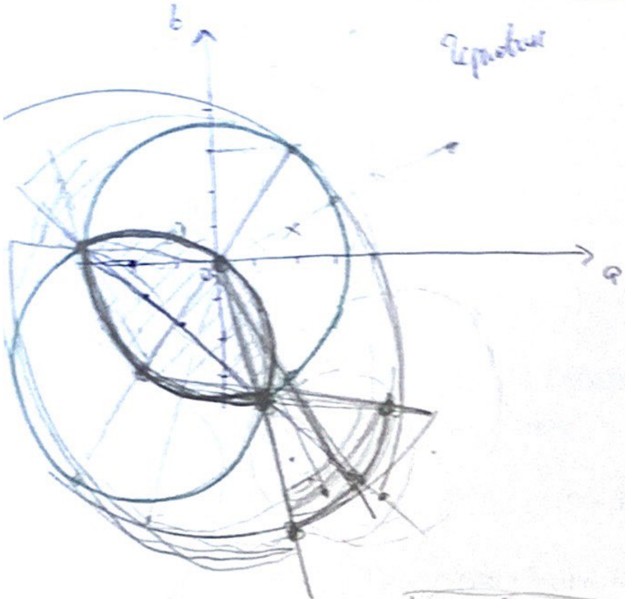
т H - центр AB



$CH = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7 = \frac{7}{2}\sqrt{3}$

$DH = \frac{\sqrt{3}}{2} DC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8 = 4\sqrt{3}$

6 из 6



$-4a-6b=13$

$4a+6b+13=0.$

$-\frac{7}{4}$ -3

$-1\frac{3}{4}$

$a^2+b^2 \le -4a-6b.$

$a^2+4a+4+b^2+6b+9-4-9 \le 0$

$\underline{(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13}$

$\sqrt{13} > 3$

при

$(a-x)^2+(b-y)^2 \le 13$

$\boxed{(a-x)^2+(b-y)^2 \le 13}$

$\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

1) $(a-x)^2+(b-y)^2=13$

$(a+2)^2+(b+3)^2=13$

$2\sqrt{13}<$

$4a+6b+13>0$

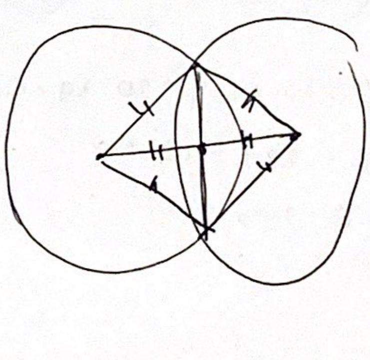
1) $\boxed{|2+x|^2+|3+y|^2 \le 2\sqrt{13}}$ при $4a+6b+13>0$

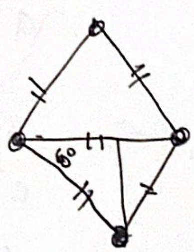
$4x+6y+13>0$

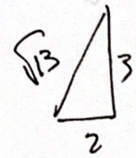
2) $(a-x)^2+(b-y)^2=13$

$a^2+b^2=13$

$x^2+y^2 \le 2\sqrt{13}$







Черновик

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_1 + 10d = 5(a_1 + 2d)$

$a_1+d \quad a_1+2d \quad a_1+3d \quad a_1+4d$

$(a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1+10d+15.$

$a_1^2+10da_1+5da_1+50d^2 > 5a_1+10d+15.$

$a_1^2+5a_1(3d-1)+50d^2-10d-15>0.$

$(a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1+10d+39$

$a_1^2+8da_1+7da_1+56d^2 < 5a_1+10d+39$

$a_1^2+5a_1(3d-1)+56d^2-10d-39<0.$

$t + \cancel{56d} > -50d^2+10d+15$

$t < -56d^2+10d+39$

$\begin{array}{r} 56 \\ -49 \\ \hline 7 \end{array}$

$-56d^2+\cancel{10d}+39 > -50d^2+\cancel{10d}+15$

$24 > 6d^2$

$4 > d^2$

$d \in (-2;2)$

d - целое, тк $a_1, a_2 \in Z$.

$\boxed{\cancel{-2}\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ \cancel{2}}$

не подходят

$\begin{array}{r} 35 \\ \times 35 \\ \hline 175 \\ 105\ \\ \hline 1225 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 205 \\ \times 4 \\ \hline 820 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1225 \\ -820 \\ \hline 405 \end{array}$

$d=-2$

$a_1^2+5a_1(-6-1)+50\cdot4+20-15>0$

$a_1^2-35a_1+205>0$

$a_1^2-35a_1+205=0$

$D=5\cdot 9^2$

$a_1 = \frac{35\pm9\sqrt5}{2}$

$a_1 \in \left(-\infty; \frac{35-9\sqrt5}{2}\right] \cup \left[\frac{35+9\sqrt5}{2}; +\infty\right)$

! Верно!

$405 : 5 = 81$, $81 : 9 = 9$

$205 : 5 = 41$

$\begin{array}{r} 56 \\ \times 4 \\ \hline 224 \\ -19 \\ \hline 205 \end{array}$

$\cancel{a^2+5a(-7)+56\cdot4-20-39<0}$

$a^2+5a(-7)+56\cdot4+20-39<0$

$a^2-35a+224-19<0$

$a^2-35a+205<0.$

№ 2

$a_1^2 - 5a_n + 50 \cdot 4$

$d = 1$

1) $a_1^2 + 5a \cdot 2 + 50 - 10 - 15 > 0$

$a^2 + 10a + 25 > 0$

$(a+5)^2 > 0$ $\quad \underline{a \neq -5}$

2) $a^2 + 5a \cdot 2 + 36 - 10 - 39 < 0$

$a^2 + 10a + 7 < 0$

$D = 100 - 28 = 72 = 9 \cdot 8$

$a = \dfrac{-10 \pm 3 \cdot 2\sqrt{2}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

$a \in (-5 - 3\sqrt{2}\ ;\ -5 + 3\sqrt{2})$

Черновик

$-10 \le -5 - 3\sqrt{2} \le -9$

$-5 - 3\sqrt{2} \ge -10$		$-5 - 3\sqrt{2} \le -9$	
$-3\sqrt{2}$	-5	$-3\sqrt{2}$	-4
5	$3\sqrt{2}$	4	$3\sqrt{2}$
25	$9 \cdot 2$	16	$9 \cdot 2$
$25 \ge 18$		$16 \le 18$	
$-5 - 3\sqrt{2} \ge -10$		$-5 - 3\sqrt{2} \le -9$	

$-1 \le -5 + 3\sqrt{2} \le 0$

$-5 + 3\sqrt{2} \ge -1$		$-5 + 3\sqrt{2} \le 0$	
$3\sqrt{2}$	4	$3\sqrt{2}$	5
$9 \cdot 2$	16	$9 \cdot 2$	25
$18 \ge 16$		$18 \le 25$	

$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in [-9\ ;\ -1] \setminus \{-5\}$

$a \in [-9\ ;\ -6]$ $\quad a = -9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104672**

ID профиля: **156416**

Вариант 20

Чистовик

№4

$НОК(a,b,c) = 2^{17}\cdot 5^{16}$ т.к НОК содержит только 2 и 5

$НОД(a,b,c) = 10 = 2^1\cdot 5^1$ и a, b, c – состоят только из них

Пусть: $a = 2^{\alpha_1}\cdot 5^{\beta_1}$

$b = 2^{\alpha_2}\cdot 5^{\beta_2}$

$c = 2^{\alpha_3}\cdot 5^{\beta_3}$

из $НОД = 2^1\cdot 5^1 \Rightarrow \min(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 1$

$\min(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = 1$

из $НОК = 2^{17}\cdot 5^{16} \Rightarrow \max(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 17$

$\max(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = 16.$

То есть мы однозначно знаем 2 степени, а 3-я от $\alpha\in[1;17]$

$\beta\in[1;16]$

Разберем все варианты с α

1) $\alpha_1 = 1$

$\alpha_2 = 17$

$\alpha_3 \in [1;17] \Leftarrow 17$ вар. $\Rightarrow$ 17 вариантов ~~и умножим на 3! т.к у нас важен порядок (a, b, c)~~

2) $\alpha_1 = 17$

$\alpha_2 = 1$

$\alpha_3 \in [1;17]$ $\rightarrow$ 17 вар

3) $\alpha_1 = 1$

$\alpha_2 \in [1,17]$

$\alpha_3 = 17$

4) $\alpha_1 = 17$

$\alpha_2 \in [1,17]$

$\alpha_3 = 1.$

5) $\alpha_1 \in [1;17)$

$\alpha_2 = 1$

$\alpha_3 = 17$

6) $\alpha_1 \in [1;17)$

$\alpha_2 = 17$

$\alpha_3 = 1.$

В каждом по 17 вариантов

Всего: $17\cdot 6$

Но мы считаем несколько раз варианты: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 17$; $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 17$, $\alpha_3 = 17$

$\alpha_1 = 17$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 17$; $\alpha_1 = 17$, $\alpha_2 = 17$, $\alpha_3 = 1$; $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 17$, $\alpha_3\ 1$; $\alpha_1 = 17$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$

Если быть точнее каждый такой вариант мы считаем дважды,

поэтому: $17\cdot 6 - 6 = 16\cdot 6$

Разберем для β:

№4 Чистовик

1) $\beta_1 = 1$
$\beta_2 = 16$
$\beta_3 \in [1, 16]$

2) $\beta_1 = 16$
$\beta_2 = 1$
$\beta_3 \in [1, 16]$

3) $\beta_1 = 1$
$\beta_2 \in [1, 16]$
$\beta_3 = 16$

4) $\beta_1 = 16$
$\beta_2 \in [1, 16]$
$\beta_3 = 1$

5) $\beta_1 \in [1, 16]$
$\beta_2 = 1$
$\beta_3 = 16$

$\beta_1 \in [1, 16]$
$\beta_2 = 16$
$\beta_3 = 1$

В каждом 16 вариантов

$\underline{16 \cdot 6}$

Но мы дважды считаем каждую из пар:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 16 & 16 & 16 \\ 1 & 16 & 16 & 16 & 1 & 1 \\ 16 & 16 & 1 & 1 & 1 & 16 \end{matrix}$$

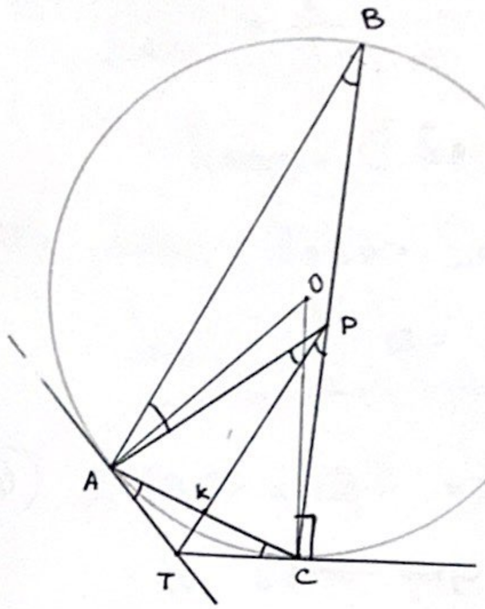
$16 \cdot 6 - 6 = 15 \cdot 6$

Для каждого варианта с α, подойдет любой вариант с β:

$16 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 6 = 240 \cdot 36 = 8640$ вариантов.

Ответ: 8640

N6 Чистовик



1) тк $\triangle ABC$ - остр => т O внутри $\triangle ABC$

2) $\dfrac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \dfrac{\frac{1}{2}h \cdot AK}{\frac{1}{2}h \cdot KC} = \dfrac{AK}{KC} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$

$\dfrac{AK}{KC} = \dfrac{5}{4}$

3) $S_{APC} = S_{APK} + S_{PKC} = 18$

пусть:

4) $\angle ABC = \alpha$ => $\angle AOC = 2\alpha$ (центральный)

5) тк $\angle OAT = 90°$, $\angle OCT = 90°$ (касат к окр)

$\Downarrow$

$\square OATC$ - впис четырех угол

6) $\square AOPC$ - впис четырехугольник по условию.

из 5) и 6) => т O, т A, т T, т C, т P - лежат на одной окр.

7) $AT = TC$ - касат из т T => $\triangle ATC$ - р/б => $\angle TAC = \angle TCA$

8) $\angle APC = \angle AOC = 2\alpha$ (опир на дугу AC)

9) $\left.\begin{aligned} \angle TAC &= \angle TPC \\ \angle TCA &= \angle TPA \end{aligned}\right\}$ - опир на одинак дуги

$\Downarrow$ и 7)

$\angle TAC = \angle TPC = \angle TCA = \angle TPA$

$\angle APC = \angle APT + \angle TPC = 2\angle APT$ => $\angle APT = \alpha$

$\angle TAC = \angle TCA = \angle TPC = \angle TPA = \alpha$.

10) PK - бис $\triangle APC$ => $\dfrac{AK}{KC} = \dfrac{AP}{PC}$

11) $\angle APB = 180° - \angle APC = 180° - 2\alpha$ (смежные углы)

12) $\angle BAP = 180° - \angle APB - \angle ABC = \alpha$

13) $\angle BAP = \angle ABP$ => $\triangle BAP$ - р/б => $AP = PB$ => $\dfrac{AK}{KC} = \dfrac{AP}{PC} = \dfrac{PB}{PC}$

N6

Чистовик

14) $\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{\frac{1}{2}h'\cdot BP}{\frac{1}{2}h'\cdot PC} = \frac{BP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{5}{4}$

$BP + PC = BC$

$BP = \frac{5}{4}PC$

$\frac{9}{4}PC = BC$

$S_{ABP} = \frac{5}{4}S_{APC}$

15) $S_{ABC} = S_{ABP} + S_{APC} = \frac{5}{4}S_{APC} + S_{APC} = \frac{9}{4}S_{APC}$

$S_{ABC} = \frac{9}{4}\cdot 18 = \frac{81}{2}$

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$

т.к. $\triangle ABC$ – остр $\Rightarrow \cos\alpha > 0$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R \qquad AC = 2R\cdot\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}R$

$\frac{81}{2} = S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\alpha$

$81 = AB\cdot BC\cdot\sin\alpha = AB\cdot\frac{9}{4}PC\cdot\sin\alpha$

$18 = S_{APC} = \frac{1}{2}AP\cdot PC\cdot\sin 2\alpha = \frac{1}{2}BP\cdot PC\cdot\sin 2\alpha =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}PC^2\cdot\sin 2\alpha$

$$\begin{cases} 36\cdot\frac{4}{5} = PC^2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha \\ 81 = \frac{9}{4}\cdot PC\cdot AB\cdot\sin\alpha \end{cases}$$

$\frac{36}{81} = \frac{\frac{5}{\cancel{4}}PC^{\cancel{2}}\cdot 2\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha}{\frac{9}{\cancel{4}}\cancel{PC}\cdot AB\cdot\cancel{\sin\alpha}}$

$\frac{4}{9} = \frac{5}{9}\cdot\frac{2PC\cos\alpha}{AB} = \frac{10}{9}\frac{BC}{AB}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$

$1 = \frac{\sqrt{5}BC}{AB} \qquad \boxed{AB = \sqrt{5}BC}$

4

№6 Чистовик

по т косинусов $\triangle APC$

$$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2\cos 2\alpha\, AP \cdot PC$$

$$AC^2 = \frac{25}{16}PC^2 + PC^2 - 2\cos 2\alpha \cdot \frac{5}{4}PC^2 = PC^2\left(\frac{25+16}{16} - 2\cos 2\alpha \cdot \frac{5}{4}\right)$$

по т косинусов $\triangle ABC$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cos\alpha\, AB \cdot BC$$

$$AC^2 = 5BC^2 + BC^2 - 2\sqrt{5}\cos\alpha\, BC^2$$

$$AC^2 = \frac{81}{16}PC^2\left(6 - 2\sqrt{5}\cos\alpha\right)$$

$\angle BAP = \angle APK \Rightarrow AB \parallel BK$

$\triangle BAC \sim \triangle PKC$ (по 2м углам. $\angle ABC = \angle KPC$ $\angle C$-общ)

$$\Downarrow$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{KC}{PC}$$

$$AC = \frac{9}{4}PC\sqrt{6 - 2\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{9}{4}PC\sqrt{6-4} = \frac{9}{4}PC \cdot \sqrt{2} = \frac{9PC}{2\sqrt{2}}$$

№5 Чистовик

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$.

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

Ограничения:

$\begin{cases} x-4>0 \\ 2x-8>0 \\ 2x-8\neq 1 \\ x-4\neq 1 \\ 5x-26>0 \\ 5x-26\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>4 \\ x\neq 5 \\ x\neq 4{,}5 \\ x>\frac{26}{5} \\ x\neq \frac{27}{5} \end{cases}$

$\begin{cases} x>\frac{26}{5} \\ x\neq\frac{27}{5} \end{cases}$

Замена: $2x-8=4$, $x-4=5$, $5x-26=z$

$\Downarrow$

$2\log_{2(x-4)}(x-4) = 2\log_4 5 = \frac{2}{\log_5 4}$

$\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26) = \frac{1}{2}\log_5 z$

$2\log_{5x-26} 2(x-4) = 2\log_z 4 = 2\,\frac{\log_5 4}{\log_5 z}$

1) $2\log_{2(x-4)}(x-4) = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$.

$2\,\frac{1}{\log_{x-4} x-4+\log_{x-4} 2} = \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$

$\frac{2}{1+\log_{x-4} 2} = \frac{1}{2}\log_{x-4} 5x-26$

$4 = \log_{x-4}(5x-26)\left(1+\log^2_{x-4} 2\right)$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)\cdot\log_{(x-4)^2}(5x-26)\cdot\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) =$

$= \frac{2}{\log_5 4}\cdot\frac{1}{2}\log_5 z\cdot 2\,\frac{\log_5 4}{\log_5 z} = 2.$

$a\cdot b\cdot c = 2$ всегда

6

Чистовик

$a+1=b+1=c.$

$a\cdot b\cdot c=2 \Rightarrow a(a+1)a=2$

$a^2(a+1)=2.$

1) $a=\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$

$$\log^2_{\sqrt{2x-8}}(x-4)\left(\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)-1\right)=2.$$

$$4\log_{2x-8}(x-4)\left(2\log_{2x-8}(x-4)-\log_{2x-8}2x-8\right)=2$$

$$2\log_{2x-8}(x-4)\,\cancel{2}\log_{2x-8}\frac{(x-4)^2}{2(x-4)}=1.$$

$$2\log_{2x-8}(x-4)\cdot\log_{2x-8}\frac{x-4}{2}=1.$$

$$\cancel{2}\log_{2x-8}(x-4)\cdot\left(\log_{2x-8}x-4-\log_{2x-8}2\right)=\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{1+\log_{x-4}2}\left(\frac{1}{1+\log_{x-4}2}-\frac{1}{\log_2 2+\log_2 x-4}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1+\log_{x-4}2}\left(\frac{1}{1+\log_{x-4}2}-\frac{1}{1+\frac{1}{\log_{x-4}2}}\right)=\frac{1}{2}$$

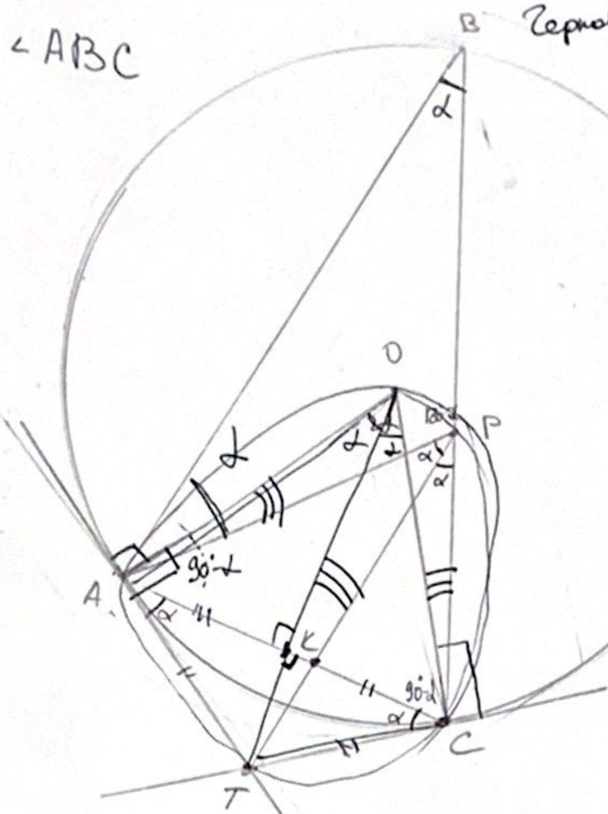
$\log_{x-4}2=t$

$$\frac{1}{1+t}\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{1+\frac{1}{t}}\right)=\frac{1}{2}$$

7 из 7

$\angle ABC$

Черновик



$$\frac{AK}{KC}=\frac{S_{APK}}{S_{PKC}}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

$=8$

$$\frac{AP}{PC}=\frac{AK}{KC}=\frac{5}{4}$$

$\frac{PC}{BP}$ – ? $\quad AK=\frac{5}{4}KC$

AP BP.

$\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ $\quad$ AC?

$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

$tg\alpha=\frac{1}{2}$

AC – ?

$AP\cdot PC$

$AC = AK + KC = \frac{9}{4}KC$

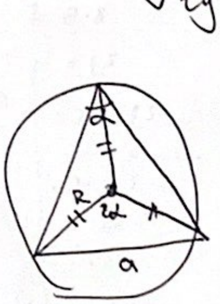
$\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot \sin\alpha = S_{ABC}$

$\frac{1}{2}AP\cdot PC\cdot \sin 2\alpha = S_{APC}$

$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\omega}$ $\quad tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{tg^2\alpha+1}$$

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{tg^2\alpha+1}}=\sqrt{\frac{1}{\frac{5}{4}+1}}=\sqrt{\frac{9}{5}}\quad \frac{2}{\sqrt{5}}$$



~~B~~

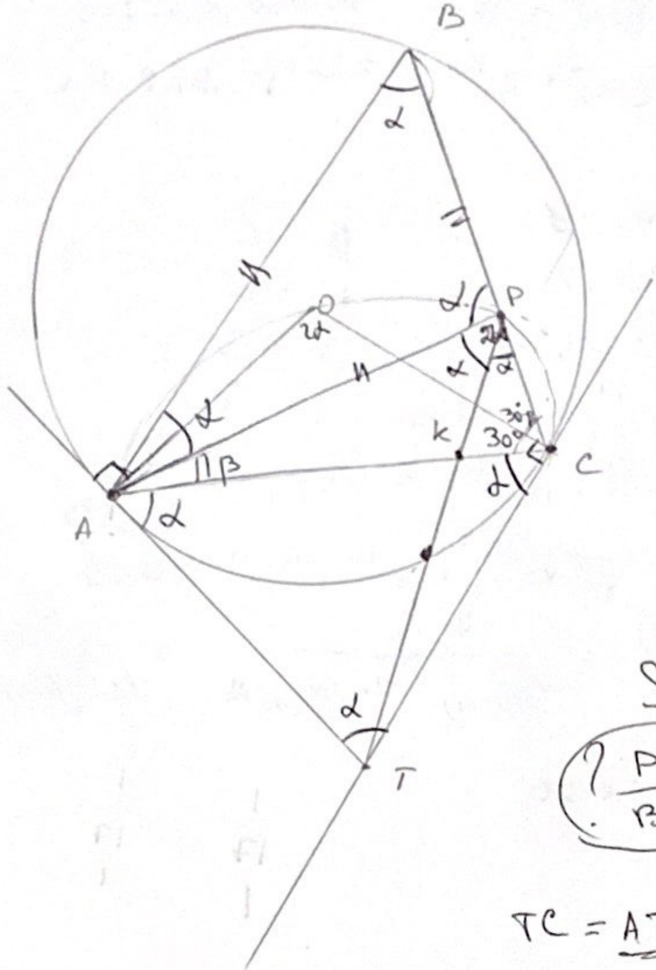
$$\frac{a}{\sin\alpha}=2R$$

$a^2=R^2+R^2-2\cos 2\alpha\cdot R^2 \quad 1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$

$a^2=2R^2(1-\cos 2\alpha)=4R^2\sin^2\alpha$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=2R$$

Чернивик



~~$S_{ABK} = S_{CBK}$~~

$S_{APK} = 10 \quad S_{CPK} = 8$

$S_{ABC} - ?$ 8

$S_{APK} = \frac{1}{2} h \cdot AK = 10 \quad S_{CPK} = \frac{1}{2} h \cdot CK$

$h AK = 20 \qquad h \cdot CK = 16$

$\frac{AK}{CK} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$

$S_{ABC} - ?$

$\boxed{S_{APC} = 18}$

$S_{ABC} = \underline{S_{ABP}} + \underset{18}{S_{APC}}$

? $\frac{PC}{BP}$ - ?

$TC = \underline{AT = AC} \Rightarrow \alpha = 60°$

$2\alpha = 120°$

$90° + 60° + \beta + x = 180°$

$x = 30° - \beta$

$60° - \beta$. APCT - вписс $\Rightarrow$

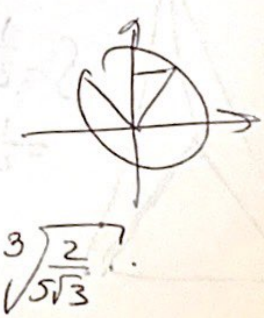
PT - бис

$\frac{5}{4} = \frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC} \rightarrow AP = \frac{5}{4} PC$

$\frac{1}{2} AP \cdot PC \cdot \sin 120° = 18$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} PC^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18$

$PC^2 = \frac{18 \cdot 16}{5\sqrt{3}} \quad PC = 4 \cdot 3 \sqrt{\frac{2}{5\sqrt{3}}}$?



$\frac{5}{4} \frac{AP}{PC} = \frac{BP}{BP}$

$\underline{AP} = AB = \underline{BP}$

черновик

НОД $(a,b,c) = 10$

НОК $(a,b,c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}$ $\quad \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1.$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}$ $\quad \min(\beta_2, \beta_1, \beta_1) = 1$

$\max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 17$

$\max(\beta_1, \beta_1, \beta_1) = 16$

$\alpha_1 = 1$ $\quad \beta_1 = 1$

$\alpha_2 = 17$ $\quad \beta_2 = 16$

$\alpha_3 \in [1;17]$ $\quad \beta_2 \in [1;16]$

1 17 1 $\quad$ 17 $\quad$ 16.

$\underbrace{17 \cdot 16}$ =

1 17 1 $\quad$ 1 17 17 $\quad$ 17 1 17 $\quad$ 17 1 1 $\quad$ 17 1 17 $\quad$ 1 1 17

$\boxed{x-4>0}$ $\quad x>4$ $\quad 5x-26>0$ $\quad x > \frac{26}{5}$ $\quad x > 5\frac{1}{5}$

$\log_{\sqrt{2(x-4)}}(x-4) = 2\log_{2(x-4)}(x-4) = \frac{2}{\log_{(x-4)}(x-4) + \log_{(x-4)}2} = \frac{2}{1+\log_{(x-4)}2}$

$\log_{(x-4)^2} 5x-26 = \frac{1}{2}\log_{x-4} 5x-26.$

1 17 1 $\quad$ 1 17 1

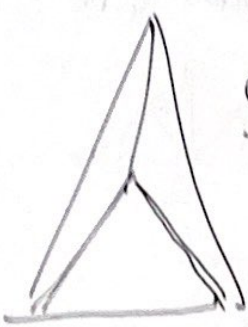
$2\log_{5x-26}(2(x-4))$

1) $\log_{2(x-4)}(x-4) = \log_{5x-26}(2(x-4))$

$a = b$

$c = a+1 = b+1$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 15 \\ \hline 80 \\ +16 \\ \hline 240 \end{array}$$



$S = \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin 2\alpha + \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin 2\beta + \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin 2\gamma =$

$= \frac{1}{2}R^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$

$$\begin{array}{r} 240 \\ \times 36 \\ \hline 1440 \\ +72 \\ \hline 8640 \end{array}$$

$2\log_4 4$

$= a \cdot b$

$\frac{1}{1}\log_2 2$ $\quad abc =$ $\quad \frac{a}{b} + 1$

$2\log_4 5$ $\quad a+1 = b+1 = c$ $\quad c = a+1 = b+1$

$a = b$ $\quad a = b$