Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104644**

ID профиля: **316172**

Вариант 20

Чистовик (лист №1)

№1) $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$ возраст прогрессия т.е. a_1; $a_2=a_1+d$,
$a_3=a_1+2d, \dots, a_6=a_1+5d, a_{11}=a_1+10d, a_8=a_1+7d, a_9=a_1+8d$
$d>0$ т.к. возраст прогрессия $a_1, a_2 \dots \in \mathbb{Z} \Rightarrow d \in \mathbb{Z}$
S - сумма первых 5 членов $\Rightarrow S=\frac{a_1+a_1+4d}{2}\cdot 5 = 5a_1+10d$
$a_6 a_{11} > S+15 \Rightarrow (a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1+10d+15$
$a_1^2+5da_1+10da_1+50d^2-5a_1-10d-15>0$
$a_1^2+5a_1(3d-1)+50d^2-10d-15>0 \quad (1)$
$a_8 a_9 < S+39 \Rightarrow (a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1+10d+39$
$a_1^2+7da_1+8da_1+56d^2-5a_1-10d-39<0$
$a_1^2+5a_1(3d-1)+56d^2-10d-39<0 \quad (2)$
(1): $-a_1^2-5a_1(3d-1) < 50d^2-10d-15$
Сложим (1) и (2): $56d^2-10d-39 < 50d^2-10d-15$
$6d^2-39+15<0$
$d^2-4<0 \Leftrightarrow d \in (-2;2)$, но т.к. $d \in \mathbb{Z}$ и $d>0$
$\Rightarrow d=1$

Подставим $d=1$:
(1): $a_1^2+10a_1+50-10-15>0 \Rightarrow a_1^2+10a_1+25>0 \Rightarrow (a_1+5)^2>0 \Rightarrow a_1 \neq -5$
(2): $a_1^2+10a_1+56-10-39<0 \Rightarrow a_1^2+10a_1+7<0 \Rightarrow a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$
$D_1 = 25-7=18$
$a_{1;2} = \frac{-5 \pm 3\sqrt{2}}{1} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

Получаем: $a_1 \neq -5$
$a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$
$a_1 \in \mathbb{Z}$

$-5-3\sqrt{2} > -10$, $-5+3\sqrt{2}<0 \Rightarrow a_1=-9$ или $a_1=-8$ или $a_1=-7$, или $a_1=-6$
или $a_1=-4$ или $a_1=-3$ или $a_1=-2$ или $a_1=-1$

Ответ: $a_1 = -9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1$

21104644 (U316172 M1295361)

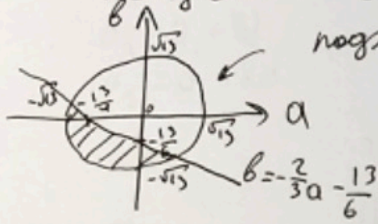
Чистовик (лист №2)

№3) $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,13) & (2)\end{cases}$

(1): это ~~окр~~ ~~в~~ все точки лежащие в и на окр с центром $(a;b)$ и $R=\sqrt{13}$

(2): 1) Если $-4a-6b\ge 13$, то $a^2+b^2\le 13$

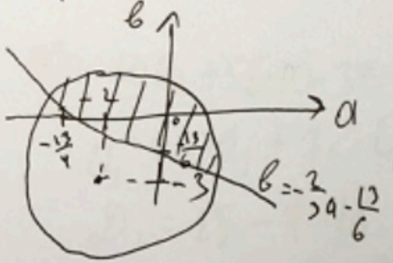
получаем $b\le -\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}$ и $a^2+b^2\le 13$



подходят все пары a и b находящ. в заштрихованной области

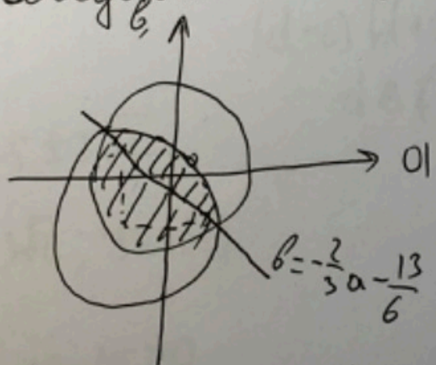
2) Если $-4a-6b<13$, то $a^2+b^2\le -4a-6b \Rightarrow (a+2)^2+(b+3)^2\le 13$

и $-4a-6b<13 \Rightarrow b>-\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}$



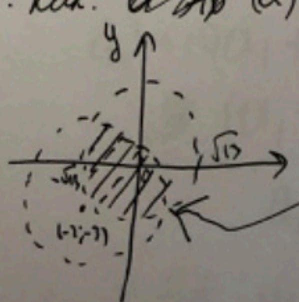
подходят все пары a и b находящ в заштрихованной области

Объединим 1 и 2 случай, получим



получается подходят все пары a и b нах. в пересеч. окр.

Так. как. ~~a это~~ $(a;b)$ - центр окр (1), то получаем:



мы ~~вычеем~~ a и b из заштрихованной области, одна из точек это центр окр. с $R=\sqrt{13}$ получаем окр $S=\pi R^2=13\pi$

Ответ: $S=13\pi$

21104644 (U316172 M1295361)

Черновик.

a_1 $\quad a_6 \; a_{11}$

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_1 + 2d$

$S = \frac{a_1 + a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = 5a_1 + 10d$

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_9 = a_1 + 8d$

$(a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < 5a_1 + 10d + 39$

$a_1^2 + 7da_1 + 8da_1 + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39$

$a_1^2 + 15da_1 - 5a_1 + 56d^2 - 10d - 39 < 0$

2) $a_1^2 + 5a_1(3d-1) + 56d^2 - 10d - 39 < 0$

1) $a_1^2 + 5a_1(3d-1) + 50d^2 - 10d - 15 > 0$

$\begin{array}{r} 46 \\ -39 \\ \hline 7 \end{array}$

1) $\cancel{50d^2 - 10d > 15}$

$-a_1^2 - 5a_1(3d-1) < 50d^2 - 10d - 15$

$6d^2 - 24 < 0$

$d^2 < 4$

$(d-2)(d+2) < 0$

$d \in (-2; 2) \Rightarrow$ т.к. $d \in \mathbb{Z}$ и $d > 0$

$\Rightarrow d = 1$

$a_1^2 + 10a_1 + 56 - 10 - 39 < 0$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$D_1 = 25 - 7 = 18$

$a_{1;2} = \frac{-5 \pm 3\sqrt{2}}{1} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

$a_{1;2} \in (-5 - 3\sqrt{2}; -5 + 3\sqrt{2})$

$a_1^2 + 10a_1 + 50 - 10 - 15 > 0$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1 + 5)^2 > 0$

$a_1 \neq -5$

$3\sqrt{2} \vee 4$

$18 \vee 16$

$18 < 25$

$-5 + 3\sqrt{2} \vee 0$

$18 \vee 25$

$<$

$a_1 \in \mathbb{Z}$ и $a_1 \neq -5$ и $a_1 \in (-5 - 3\sqrt{2}; -5 + 3\sqrt{2})$

$a_1 = -9$

$a_1 = -8$

$a_1 =$

$-5 - 3\sqrt{2} > -10$

$-5 + 3\sqrt{2} < 0$

21104644 (U316172 M1295361)

Черновик:

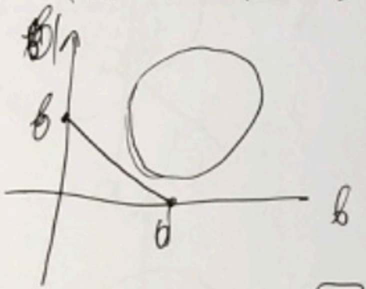
$(x-a)^2+(y-b)\le 13$

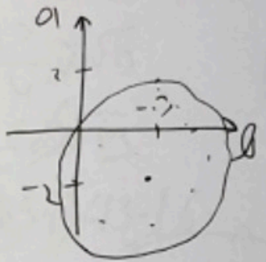
это всё что лежит в нем окр с центром (a,b) и $R=\sqrt{13}$

$a^2+b^2\le 13$ если $-4a-6b\ge 13$

$a^2+b^2\le -4a-6b$ если $-4a-6b\le 13$

$(a+2)^2+(b+3)^2\le 13$





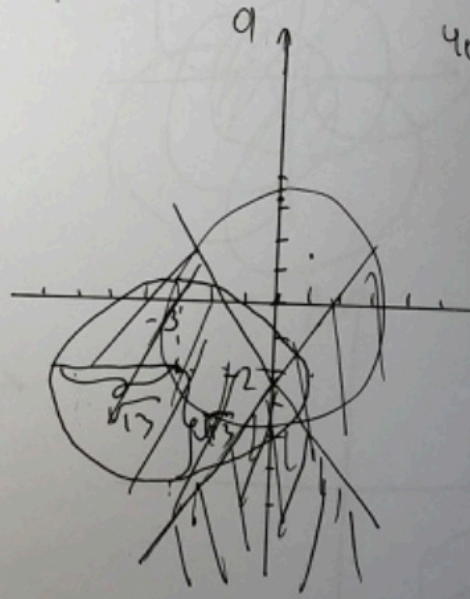
$\sqrt{13}<4$

$a\le \frac{-13-6b}{4}$

$4a\le -13-6b$

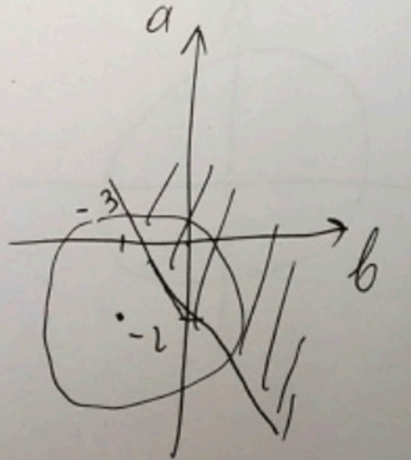
a	$-\frac{13}{4}$	
b	0	-1

$a\le -\frac{3}{2}b-\frac{13}{4}$



$-4a-6b<13$

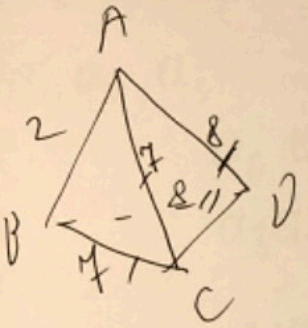
$4a>-6b-13$

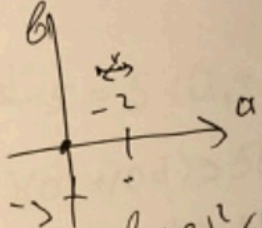


$3b\le -\frac{13}{2}$ $\frac{65}{2}$

$b=\frac{33}{2}$

Черновик



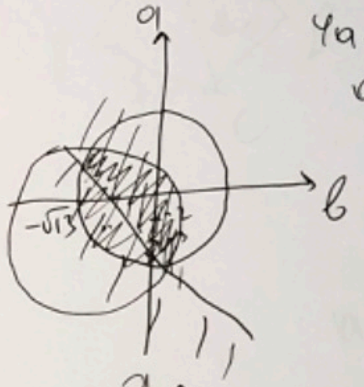


$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 13$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$ Черновик $\frac{2}{\cancel{8}}a=-\frac{13}{\cancel{8}2}$

$a=-\frac{13}{4}$

1) $-4a-6b \le 13$ то $a^2+b^2 \le 13$



$4a \le -6b-13$

$a \le -\frac{3}{2}b-\frac{13}{4}$

$b=-\frac{13}{6}$

$-\frac{13}{4} \ge -\sqrt{13}$

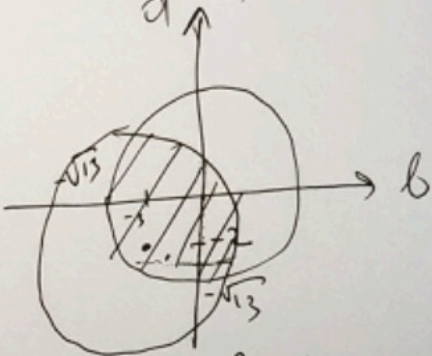
$\frac{13}{4} \le \sqrt{13}$

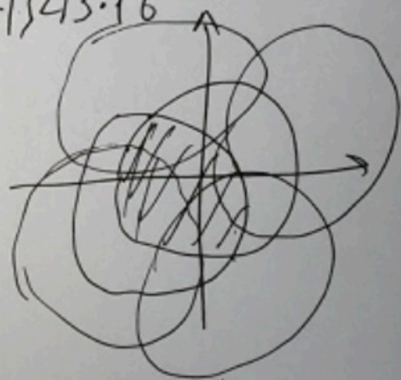
$169 \cdot 13 < 13 \cdot 16$

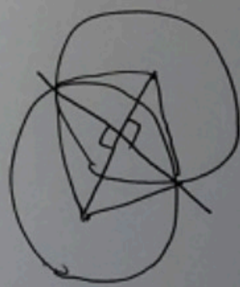
2) $-4a-6b<13$

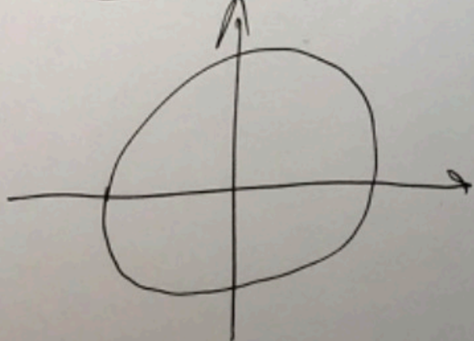
$a>-\frac{3}{2}b-\frac{13}{4}$

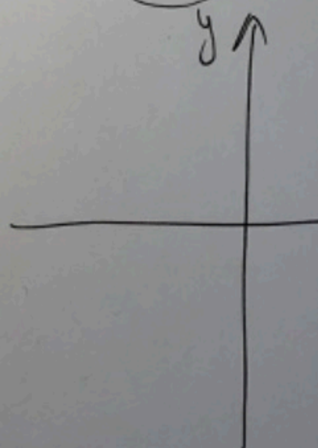
$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$

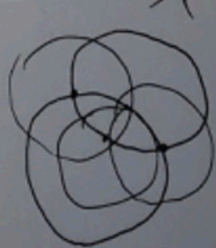












Черновик.

$a_1, a_2, a_3 \dots$

$a_6 a_{11} > S+15$

$a_8 a_9 > S+39$

a_1

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_1 + 2d$

$\dots$

$S = \frac{a_1 + a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = 5 \cdot (a_1 + 2d)$

$(a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1 + 10d + 15$

$a_1^2 + 5da_1 + 10da_1 + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15$

$a_1^2 + 5a_1(d + 2d - 1) + 50d^2 - 10d - 15 > 0$

$D = 25(3d-1)^2 - 200d^2 + 40d + 60 =$

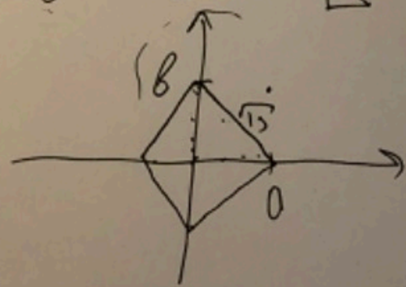
$= 225d^2 + 25 - 150d - 200d^2 + 40d + 60 =$

$= 25d^2 - 110d + 85 = 5(5d^2 - 22d + 17)$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 13$

$a^2 + b^2 \leq \min(-4a - 6b, 13)$

1) $-4a - 6b \geq 13$ $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq (\sqrt{13})^2 \\ a^2 + b^2 \leq 13 \end{cases}$ Δ



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104644**

ID профиля: **316172**

Вариант 20

Чистовик (лист №1)

№5) Числа: $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$, $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$, $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$.

Ограничения: $\begin{cases} 2x-8>0 \\ 2x-8\neq 1 \\ x-4>0 \\ x\neq 4 \\ x\neq 3 \\ x\neq 5 \\ 5x-26>0 \\ 5x-26\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ x\neq \frac{9}{2} \\ x>4 \\ x\neq 4 \\ x\neq 3 \\ x\neq 5 \\ x>5,2 \\ x\neq 5,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ x\neq 4,5 \\ x\neq 5 \\ x>5,2 \\ x\neq 5,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>5,2 \\ x\neq 5,4 \end{cases}$

Заметим, что $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)\cdot\log_{(x-4)^2}(5x-26)\cdot\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$

~~Нус~~ Обозначим числа за a, b и c: получаем $\begin{cases} a\cdot b\cdot c=2 \\ a=b \\ c=a+1 \end{cases}$

$\Rightarrow a^2(a+1)=2 \Rightarrow a^3+a^2-2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a-1)((a+1)^2+1)=0 \Rightarrow a=1$

Получаем: 1) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1 \Rightarrow \sqrt{2x-8}=x-4$, т.к. $x>5,2$ т.е $x-4>0$

$\Rightarrow 2x-8=x^2+16-8x \Rightarrow x^2-10x+24=0$ ~~Д~~ $x=6$ или $x=4$ сопос с ограничениями, получим $x=6$.

2) $\log_{(x-4)^2}(5x-26)=1 \Rightarrow x^2+16-8x=5x-26 \Rightarrow x^2-13x+42=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=7$ или $x=6$. Подходят под ограничения.

3) $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1 \Rightarrow \sqrt{5x-26}=2x-8 \Rightarrow 4x^2+64-32x=5x-26 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2-37x+90=0$, $D=(1369-1440)<0 \Rightarrow$ нет корней

Проверим (должно быть два числа равны по 1, а третье равно 2):

1) $x=6$: $\log_{\sqrt{12-8}}(6-4)=\log_2 2=1$; $\log_{(6-4)^2}(30-26)=\log_4 4=1$; $\log_{\sqrt{30-26}}(12-8)=$ $=\log_2 4=2 \Rightarrow x=6$ подходит.

2) $x=7$: $\log_{\sqrt{14-8}}(7-4)=\log_{\sqrt{6}}3\neq 1$ и $\neq 2 \Rightarrow x=7$ не подходит

Ответ: $x=6$.

Чистовик (лист №2)

№4) $\begin{cases} НОД(a;b;c)=10=2^1\cdot5^1 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot5^{16} \end{cases}$

Пусть $a=2^{\alpha}\cdot5^{t}$, то $\min(\alpha,\beta,\gamma)=1$ и $\min(t,d,f)=1$

$b=2^{\beta}\cdot5^{d}$ $\quad \max(\alpha,\beta,\gamma)=17$ и $\max(t,d,f)=16$

$c=2^{\gamma}\cdot5^{f}$ => одна из α,β,γ равна 1, одна из α,β,γ равна 17, а оставшаяся принимает значения от 1 до 17;

Одна из t,d,f равна 1, одна из t,d,f равна 16, а оставшаяся принимает значения от 1 до 16

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}17\\16\end{array} \\ \hline 102 \\ 17 \\ \hline 272 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\begin{array}{r}272\\9\end{array} \\ \hline 2448 \end{array}$$

Получается:

α - 1 вар.		α - 1 вар.		α - 17 вар.
β - 1 вар.	или	β - 17 вар.	или	β - 1 вар
γ - 17 вар.		γ - 1 вар		γ - 1 вар

(вар. - это вариантов)

Так же

t - 1 вар		t - 1 вар		t - 16 вар
d - 1 вар	или	d - 16 вар	или	d - 1 вар
f - 16 вар		f - 1 вар		f - 1 вар

Получаем, всего кол-во троек a, b, c: $17\cdot3\cdot16\cdot3=272\cdot9=2448$

Ответ: 2448

Чистовик (лист №3)

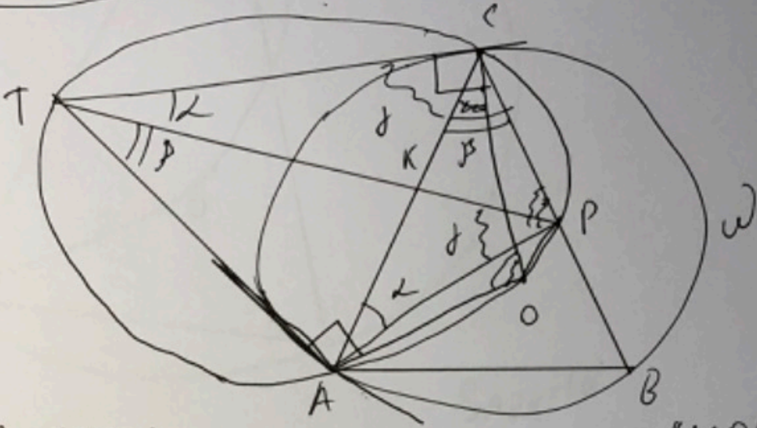
№6) $S_{APK}=10$

$S_{CPK}=8$

а) $S_{ABC}=?$

б) $\angle ABC=\arccos\frac{1}{2}$, $AC=?$

Решение:



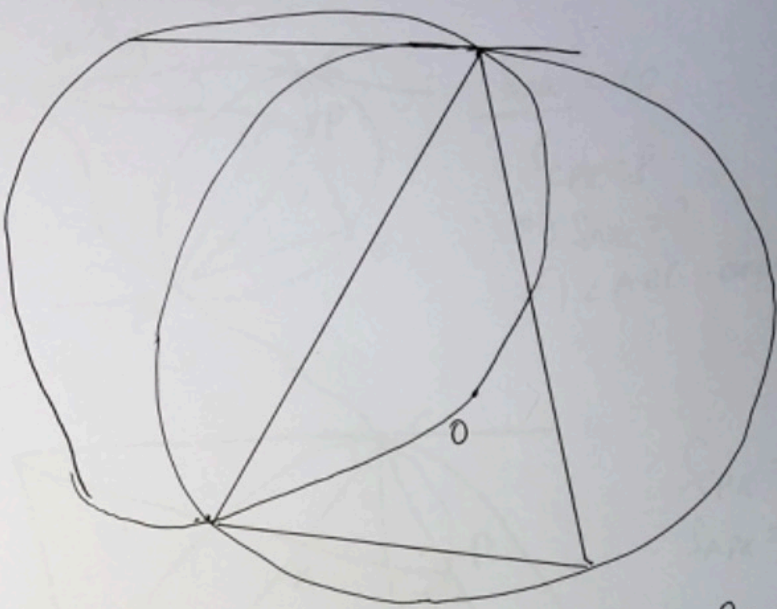
1) т.к. TC и TA - кас = ⇒ $\angle TCO=\angle OAT=90°$ ⇒ TCOA - впис 4-х угольник ⇒ ~~окр∈~~ T, C, O, A ∈ окр.

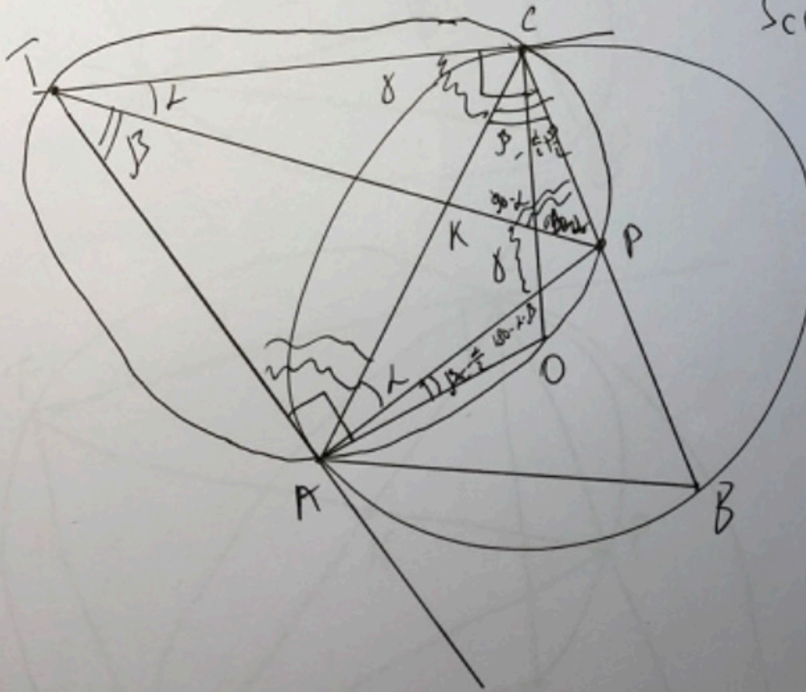
2) $\angle CTP=\angle CAP=\alpha$ и $\angle ATP=\angle ACP=\beta$ т.к. опир на одну дугу ⇒ $\triangle TCK\sim\triangle APK$ и $\triangle CPK\sim\triangle TAK$ (по 2-ум углам!)

$\angle TCK=\angle KPA=\gamma$ т.к. опир на одну дугу

$\angle CPA=\angle COA$ т.к. опир на одну дугу

Черновик





$S_{APK} = 10$

$S_{CPK} = 8$

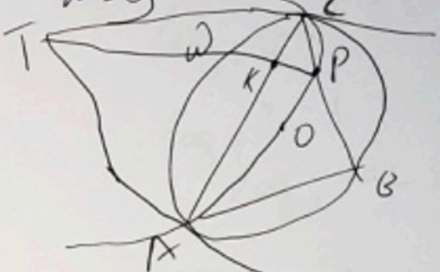
$\triangle TCK \sim \triangle APK$

$\triangle CPK \sim \triangle TAK$

$\frac{180-18+2+8}{2}$

Черновик.

№6)

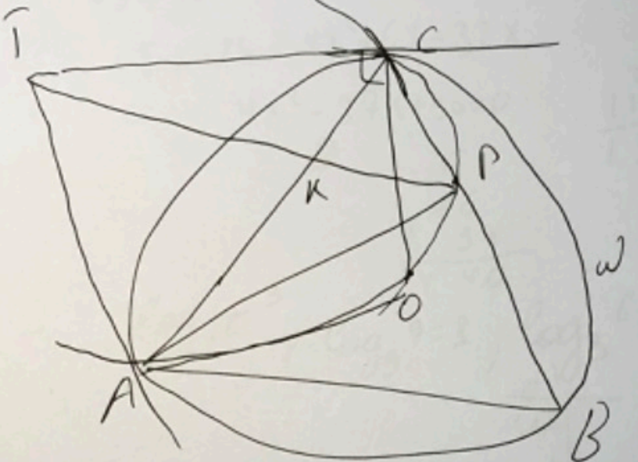


$\underline{S_{\Delta APK}} = 10$

$S_{CPK} = 8$

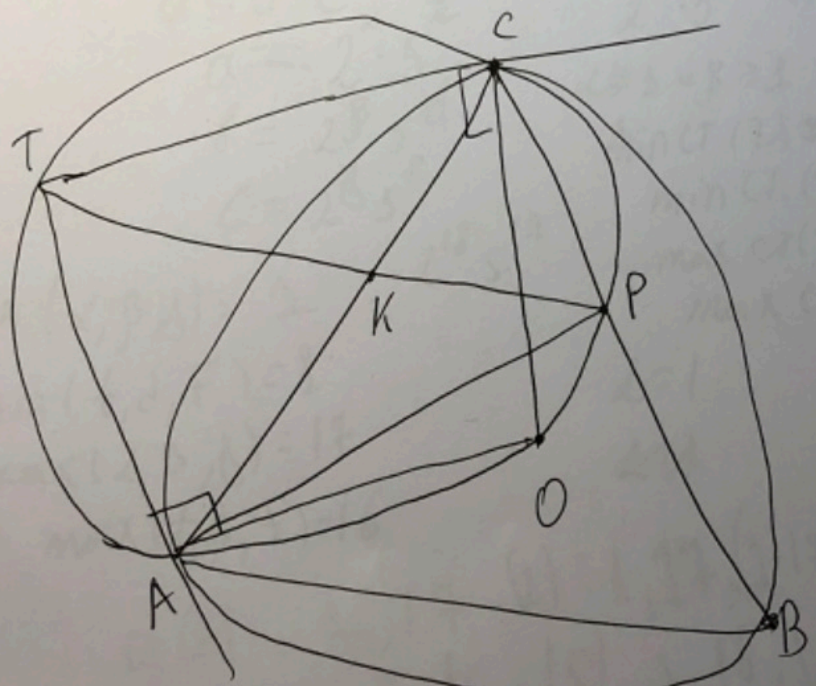
а) $S_{ABC} = ?$

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$, $AC = ?$



$S_{CPK} = 8$

$S_{APK} = 10$



Черновик

$\cancel{2^{18}}\cdot 5^{16}$, $2^{17}\cdot 5^{5}$ $2^{17}\cdot 5$

$\log_{\sqrt{4}} 2 = 1$

$\log_4 4 = 1$

$\log_2 4 = 2$

$3\cdot 17\cdot 16 + 3\cdot 17\cdot 16 + 3\cdot 17\cdot 16$

$169 - 168 = 1$

$\frac{17 \pm 1}{2}$

$\times 37, 37, 259, 111, 1369$

$17\cdot 16\cdot 3\cdot 3$

$\times 16, 90, 1440$

$\sqrt{5x-16} = 2x-8$

$5x-26 = 4x^2+64-32x$

$4x^2-37x+90=0$

D

$\times 37, 37, 259, 111, 1369$

$\times 17, 9, 153$

$\times 153, 16, 918, 153, 2448$

$\times 16, 90, 1440$

$\log_{\sqrt{6}} 3$, $\log_9 9 = 1$, $\log_3 6$

$\frac{1}{\log}$

$\max ст(2) = 17$

$\max =$

$a \le b \le c$

$a = 2^{\alpha}\cdot 5^{t}$

$b = 2^{\beta}\cdot 5^{d}$

$c = 2^{\gamma}\cdot 5^{f}$

$2^{18}\cdot 5^{17}$ $ст(2) \le 17$

$\alpha \ge 1$ и $\beta \ge 1$

$\min ст(2) = 1$

$\min ст.(5) = 1$

$\max ст(2) = 17$

$\max ст(5) = 16$

$17\cdot 16\cdot 3 + 17\cdot 16\cdot 3 + 17\cdot 16\cdot 3$

$= 17\cdot 16\cdot 3\cdot 3$

$2^{18}\cdot 5^{17}$

$\min(\alpha, \beta, \gamma) = 1$

$\min(t, d, F) = 1$

$\max(\alpha, \beta, \gamma) = 17$

$\max(t, d, f) = 16$

$\alpha = 1$

$\alpha = 17$

2

α 17 вар $\alpha = 1$ 17 вар

β 1 вар или $\beta = 17$ вар

γ 1 вар 1

ст(2) : 1, 17. (2) : 1, 17, (1-17)

ст(5) : 1, 16. (5) : 1, 16, (1-16)

(1,1,17) $17\cdot 3$

(1,1,16) $16\cdot 3$

Черновик.

$НОД(a,b,c)=10$

$НОК(a,b,c)=$

$a\cdot b\cdot c=2^{18}\cdot 5^{17}$

$\alpha \geq 1 \quad \beta \geq 1$

$a=2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$ Пусть

$b=2^{x}5^{y}$ $\quad \beta+y+z=17$

$c=2^{\gamma}5^{z}$ $\quad \alpha+x+\gamma=18$

$a \leq b \leq c$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4);\ \log_{(x-4)^2}(5x-26),\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$2\cdot 2\cdot 2=8$ $\quad a\cdot b c=8$ $\quad b^2(b+1)=8$

$a=b$ $\quad b^3+b^2-8=0$

$c=a+1$

	1	1	0	-8
-2	1	-1	2	-12
-4	1	-3	12	
-8	1	-7	56	

$a\cdot \cancel{b\cdot c}=$ 1,2

$2\cdot 2\cdot \frac{1}{2}=2$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$a\cdot b\cdot c=2$

$5x-26=2x-8$ $\quad a=b$ $\quad a^2c=2$

$3x=18$ $\quad c=a+1$ $\quad a^2(a+1)=2$

$x=6$ $\quad a^3+a^2-2=0$

$a=b=1$

	1	1	0	-2
1	1	2	2	0

$\log_4 2=$ $\quad c=2$

$25-24=1$

$\frac{5\pm 1}{1}=6;4$

$(a-1)(a^2+2a+2)=0$

$(a-1)((a+2)^2+1)=0$

$a=1$