Часть 1

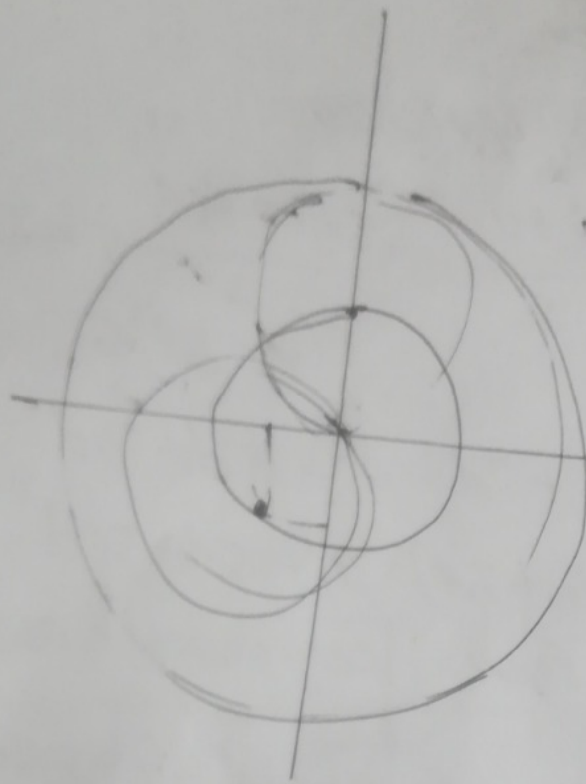
Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

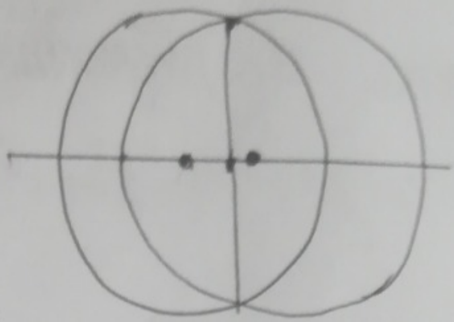
Шифр: **21104622**

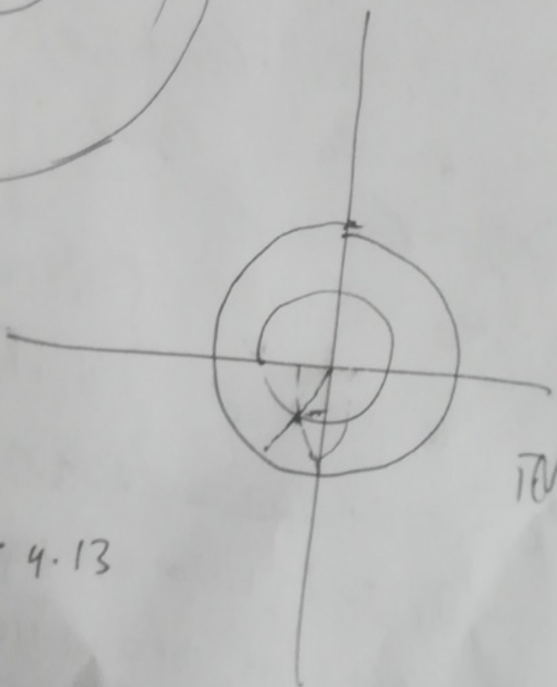
ID профиля: **808325**

Вариант 20

Черновик





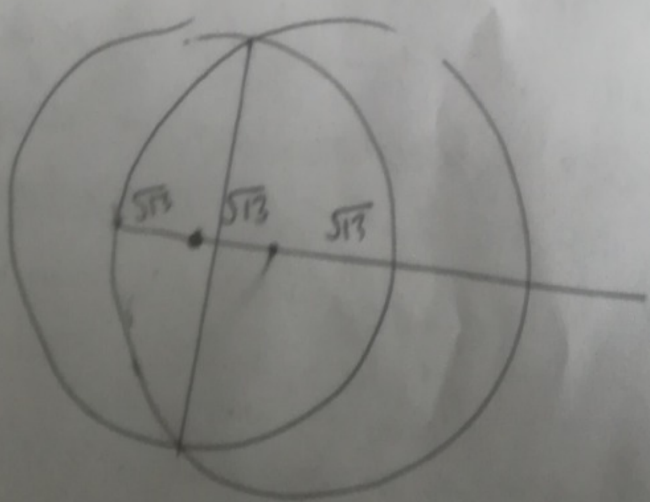


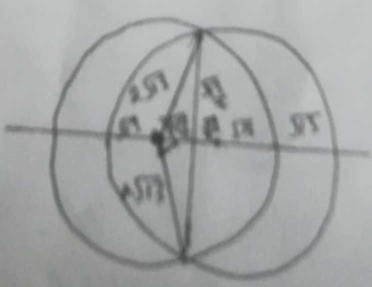
4 16

$x^2+y^2 \leqslant 4\cdot 13$

$(x+2)(x$

$(x+2)^2+(y+3)^2 \leqslant 4\cdot 13$

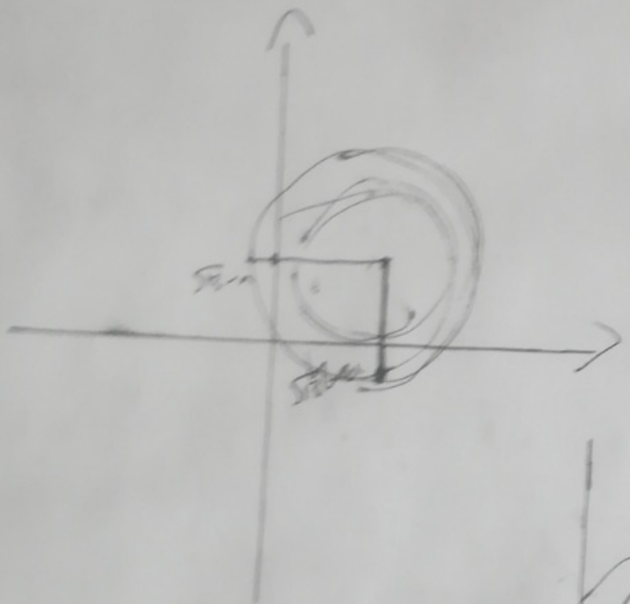




Чернавик

№ 3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b;\,13)\end{cases}$$



$a^2+b^2\le \min(-4a-6b;\,13)$

$-4a-6b$

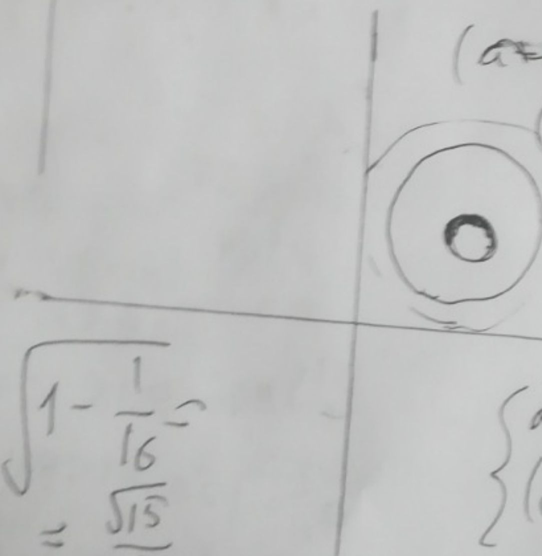
$a^2+b^2\le 13$

$a^2+b^2\le -4a-6b$

$\cancel{(a+2a)}^2$

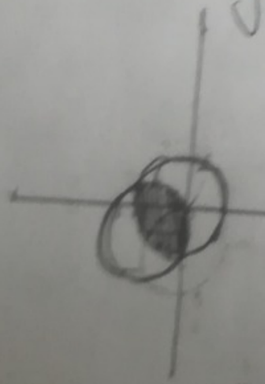
$(a+2)^2-4+(b+3)^2-9\le 0$

$(a+2)^2+(b+3)^2\le 13$



$$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 13\\ (a+2)^2+(b+3)^2\le 13\end{cases}$$



$$\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{13}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{13}{2}\sqrt{15}$$

№1 Черновик

$(a_1 + 5b)$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > \dfrac{a_1+a_1+4d}{2}\cdot 5+15 \\ (a_1+7d)(a_1+8d) < \dfrac{a_1+a_1+4d}{2}\cdot 5+39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > (a_1+2d)\cdot 5+15 \\ (a_1+7d)(a_1+8d) < (a_1+2d)\,5+39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+15ad+50d^2 > 5(a_1+5d)+15 \\ -a_1^2-15d-56d^2 > -(a_1+5d)-39 \end{cases}$$

$-6d^2 > -24$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

$d = \pm 1$ $\quad d = 1$

$a_1^2 + 15a + 50 < 5a_1 + 25 + 15$

$a_1^2 + 10a + 20 < 0$

$D = 100 - 80$

21104622 (U808325 M1302426)

№3 Черновик

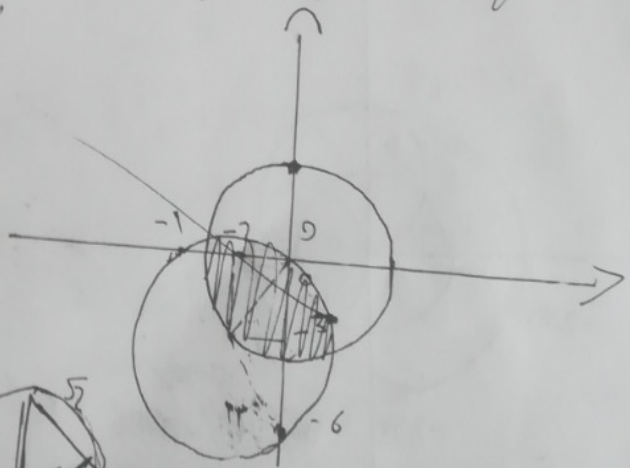
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;\ 13) \end{cases}$$

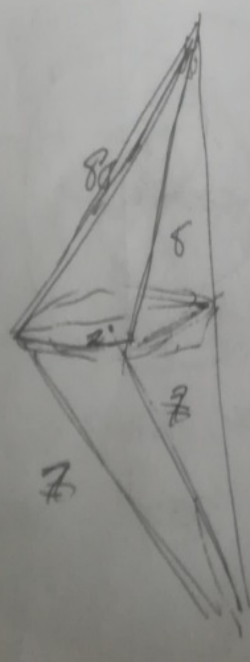
1 неравенство - часть плоскости ограниченная окружностью с радиусом $\sqrt{13}$ с центром в т$(a;b)$

2 нерав-во равносильно следующей системе

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le -4a-6b \\ a^2+b^2 \le 13 \end{cases} \quad \begin{cases} (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le 13 \end{cases}$$

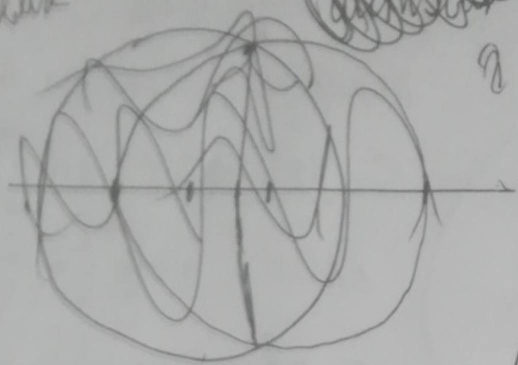
Найдем множество точек, в которых может располагаться центр ~~окруж~~ круга, задаваемого уравнением 1.





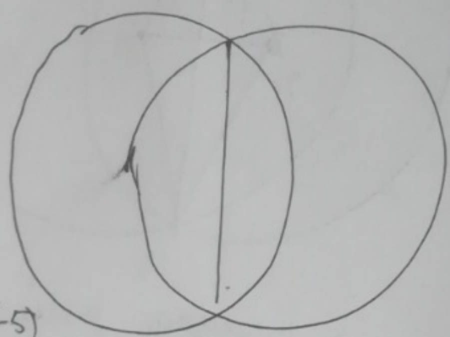
$\sqrt{67}$ $\sqrt{47}$

черновик



расстояние между центра-ми двух окружностей:

$\sqrt{12}$ $R_1=R_2=2\sqrt{13}$



$a_1=-9$

$b=\cancel{11}$ 1

$a_{6}=-3$ -6

$a_{11}=2$

$S=\frac{-9+(-5)}{2}\cdot 5=-7\cdot 5=-35$ -20

$a_1=-10$

$S=\frac{-10+(-6)}{2}\cdot 5=-40$

-25

$a_6a_{11}=-4$ 1

-4

$S=-40+39=-1$

$a_1=-10$

$a_1=\cancel{0}$

$5+15=25$

$a_6a_{11}=0$

$5+39=49$

$a_8a_9=-3\cdot -2=6$

$S_5=\frac{0+4}{2}\cdot 5=10$

S a_8a_{10} $a_6a_{11}=0\cdot 5\cdot 10=$

$=50$

-1

$a_8a_9=6\cdot 7=\cancel{35}\cdot 42$

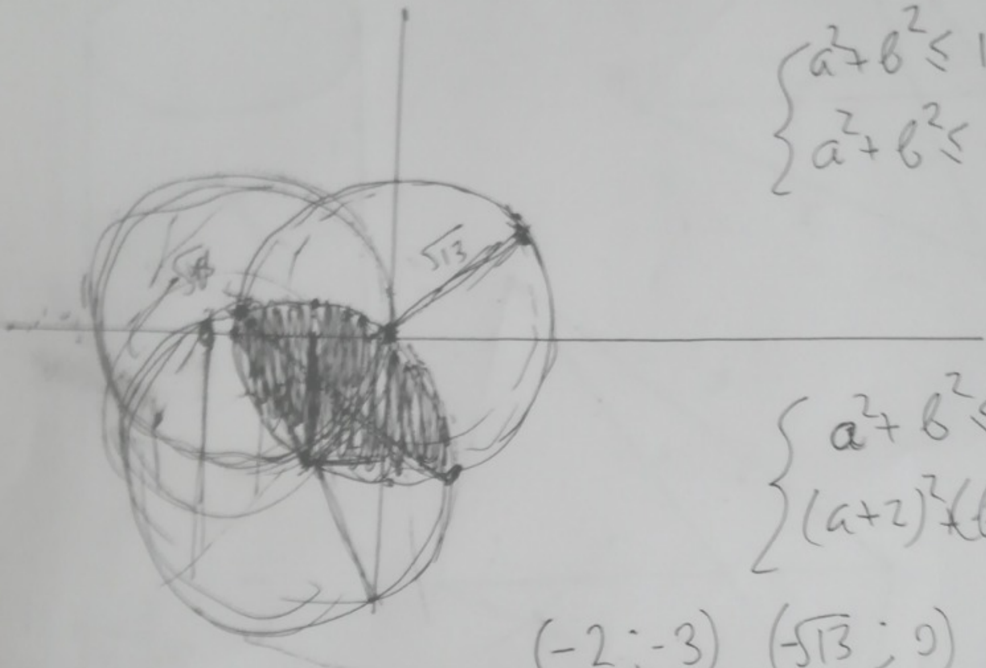
$\cancel{a_8a_9=7\cdot 8=56}$

$S=\frac{-1+3}{2}\cdot 5=5$ S_4 a_4

Черновик

№3

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le -4a-6b \end{cases}$$



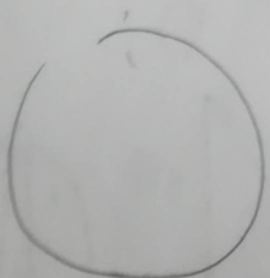
$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 13 \\ (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13 \end{cases}$$

$(-2;-3)$ $(-\sqrt{13};0)$

$\cancel{2A\sqrt{13}}(\sqrt{13}-2)^2+9=$

$=12-4\sqrt{13}+4+9$

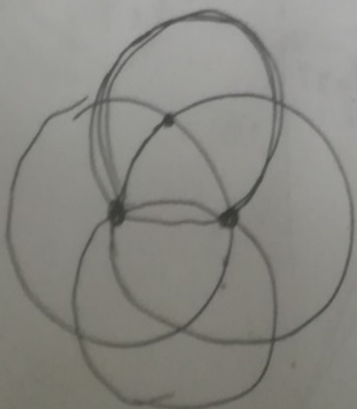
$=25-4\sqrt{13}$

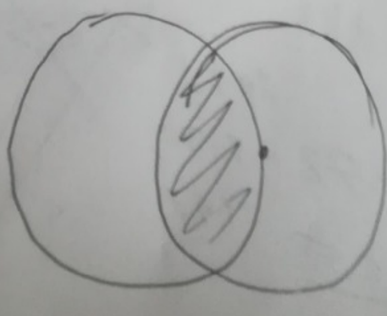


$a_1^2+15a_1+56<5a_1+10+39$

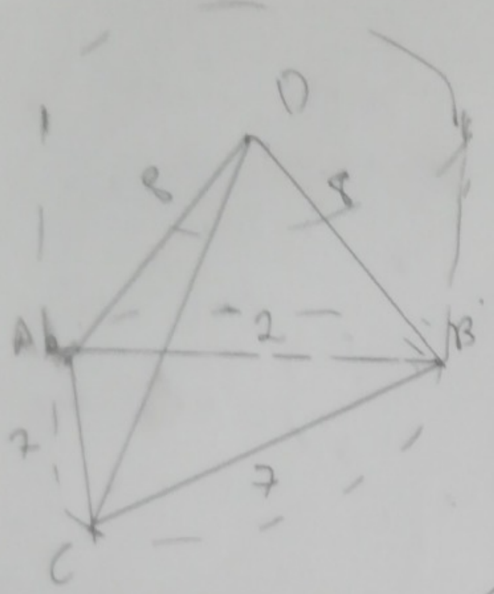
$a_1^2+10a_1+7<0$

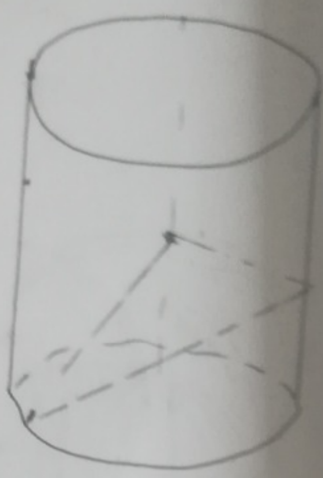
$\cancel{(a+4)(a}$

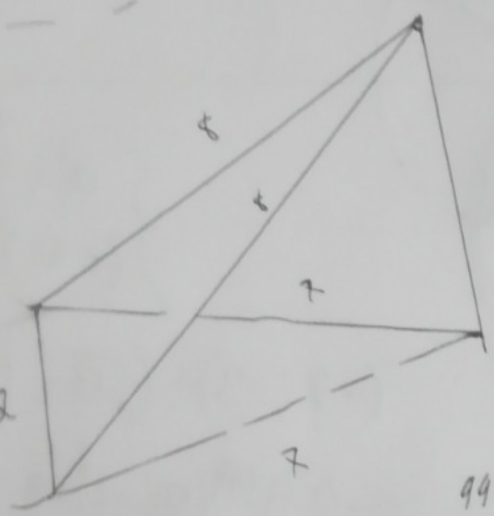




Черновик







$\frac{2}{\sin\alpha} = 2R$

$R = \frac{1}{\sin\alpha}$

$99 - 2$

$\frac{a_1+a_1+4}{2}\cdot 5 = (a_1+2)5 = 5a_1+10$

$(a_1+7)(a_1+8) < 5a_1+49$

$a_1^2+15a_1+56 < 5a_1+49$

$a_1^2+10a_1+7<0$

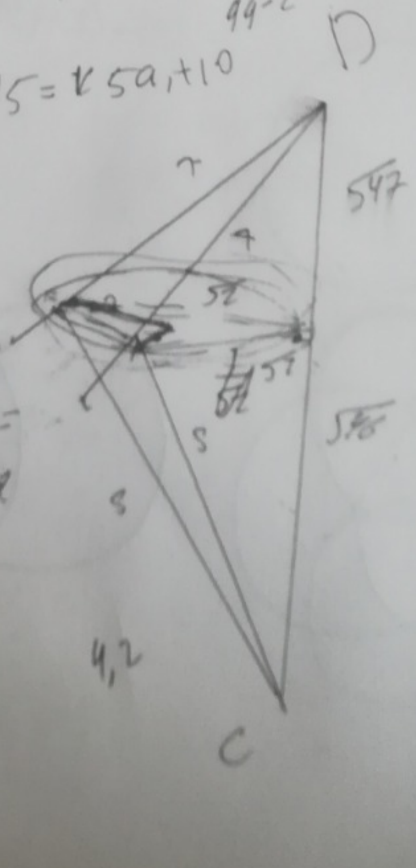
$D = 100-28 = 72 = 8\cdot 9 =$

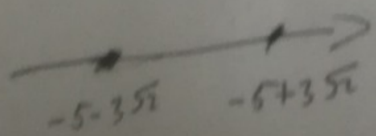
$24\cdot 3 =$

$4\cdot 4\cdot 2$

$a = \frac{-10\pm 6\sqrt{2}}{2}$

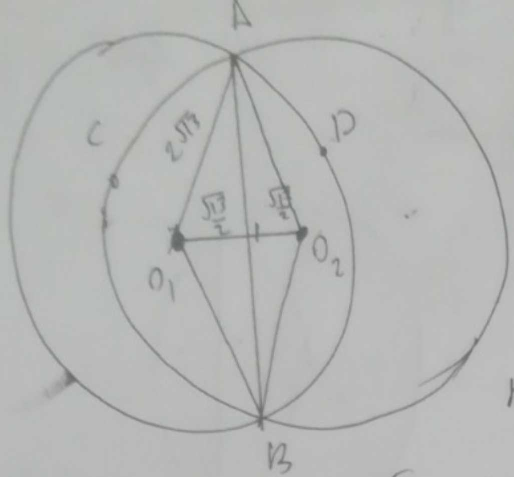
$a = -5\pm 3\sqrt{2}$





21104622 (U808325 M1302426)

№3 Чистовик



площадь сектора ADB

$$S = \frac{\pi R^2}{2\pi} \cdot \angle AO_1B =$$

$$\angle AO_1B = \arccos\left(\frac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{2\sqrt{13}}\right) = \arccos\frac{1}{4}$$

$$S = 2\cdot 13 \arccos\frac{1}{4}$$

площадь сектора ACB: $S_{ACB} = S_{ADB} = 26 \arccos\frac{1}{4}$

площадь ромба AO_1BO_2:

$$AB = 2\sqrt{(2\sqrt{13})^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{13}\sqrt{4 - \frac{1}{4}} = 2\sqrt{13}\cdot\sqrt{\frac{15}{4}} = \sqrt{13\cdot 15}$$

$$S_{AO_1BO_2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{13\cdot 15} = \frac{13}{2}\sqrt{15}$$

площадь искомой фигуры:

$$\cancel{2\cdot 52\pi \arccos\frac{1}{4} - \frac{13}{2}\sqrt{15} = 104\pi \arccos\frac{1}{4} - \frac{13\sqrt{15}}{2}}$$

~~Ответ:~~ $\cancel{104\pi \arccos\frac{1}{4} - \frac{13\sqrt{15}}{2}}$

$$S_M = 2S - S_{AO_1BO_2} = 52 \arccos\frac{1}{4} - \frac{13}{2}\sqrt{15}$$

Ответ: $52 \arccos\frac{1}{4} - \frac{13}{2}\sqrt{15}$

5

№3 Чистовик

№3 Чистовик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b;13)\end{cases}$$

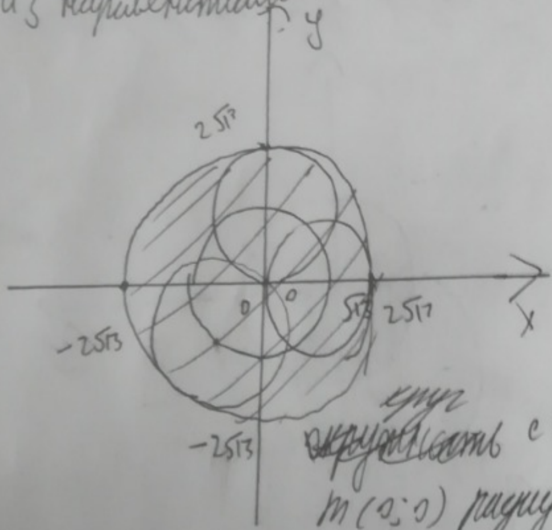
1 нерав-во задает на плоскости круг с ц. в т$(a;b)$ радиусом $\sqrt{13}$

Второе нерав-во равносильно системе:

$$\begin{cases}a^2+b^2\le -4a-6b\\ a^2+b^2\le 13\end{cases}\quad \begin{cases}(a+2)^2+(b+3)^2\le 13\\ a^2+b^2\le 13\end{cases}$$

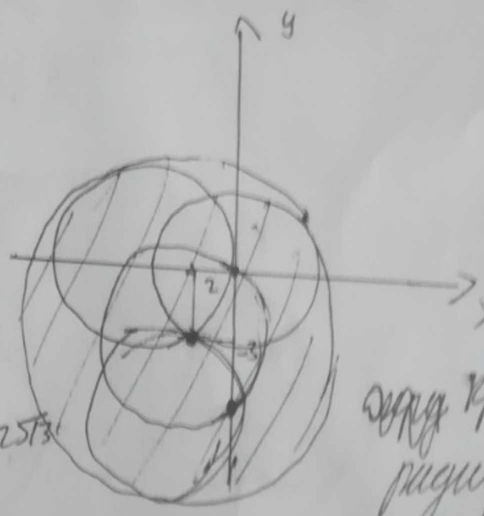
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ (a+2)^2+(b+3)^2\le 13\\ a^2+b^2\le 13\end{cases}$$ множество точек плоскости, задаваемых ~~1 и 3 неравенствами~~:

1 и 3 неравенствами:



~~окружность~~ круг с ц. в т$(0;0)$ радиуса $2\sqrt{13}$

1 и 2 неравен-ством



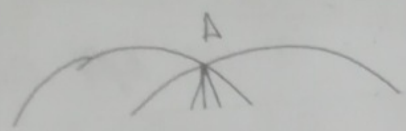
~~окруж~~ круг радиуса $2\sqrt{13}$ с ц. в т$(-2;-3)$

Найдем теперь площадь фигуры, получающейся при пересечении этих множеств

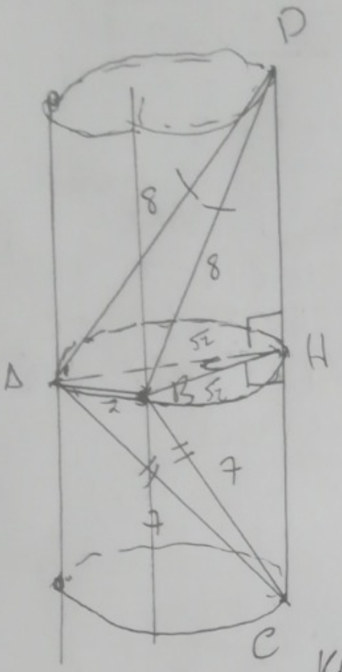
4

№3 Шестовик

площадь сектора ADB



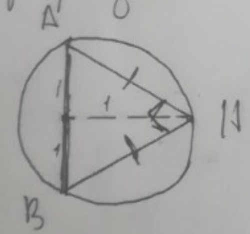
№2 Шестовик



т.к. т. D и C лежат на боковой поверхности цилиндра, а CD параллелен оси цилиндра, отрезок CD лежит на боковой поверхности цилиндра.

Проведем плоскость, проходящую через отрезок AB и перпендикулярную CD. Эта плоскость перпендикулярна оси цилиндра. ⇒ сечение цилиндра этой плоскостью — окружность

изобразим плоскость $(ABH) \perp CD$



радиус окружности, описанной около ABH — радиус цилиндра

$$\frac{AB}{\sin(\angle AHB)} = 2R \qquad \frac{2}{\sin(\angle AHB)} = 2R$$

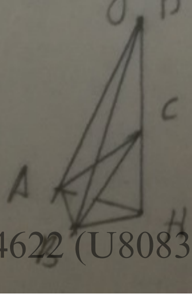
наименьшее значение R принимает при $\sin(\angle AHB) = 1$

$R = 1 \quad \angle AHB = 90^\circ$

$AH = BH = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ по т. Пифагора.

$DH = \sqrt{64 - 2} = \sqrt{62} \quad CD = \sqrt{49 - 2} = \sqrt{47}$

2 случая:



1) $CD = DH - CD = \sqrt{62} - \sqrt{47}$

2) $CD = DH + CD = \sqrt{62} + \sqrt{47}$

Ответ: $\sqrt{62} - \sqrt{47}$; $\sqrt{62} + \sqrt{47}$

3

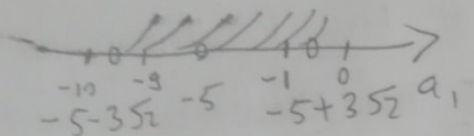
№1 Шетовик

$a_1^2+10a_1+7<0$

$a_1^2+10a_1+7=0$

$a=\dfrac{-10\pm\sqrt{100-28}}{2}$

$a=-5\pm3\sqrt{2}$



~~$-10<-5-3\sqrt{2}$~~

$16<18<25$

$4<3\sqrt{2}<5$ $\quad -5<-3\sqrt{2}<-4$

$-1<-5+3\sqrt{2}<0$ $\quad -10<-5-3\sqrt{2}<-9$

целые значения, принадлежащие промежутку $(-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$:

$-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1;$

с учетом $a_1\neq-5$

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

Вариант 20 Чистовик

№1

пусть d - разность прогрессии

тогда $S = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = \frac{a_1 + a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = (a_1 + 2d)5$

$a_{11}a_6 = (a_1 + 10d)(a_1 + 5d) = a_1^2 + 15da_1 + 50d^2$

$a_8 a_9 = (a_1 + 8d)(a_1 + 7d) = a_1^2 + 15da_1 + 56d^2$

по условию верна следующая система неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}a_6 > S + 15 \\ a_8 a_9 < S + 3d \end{cases} \quad \begin{cases} a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > (a_1 + 2d)5 + 15 \\ a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 < (a_1 + 2d)5 + 39 \end{cases}$$

~~$a_1^2 + 15d + 50d^2 > (a_1 + 2d)5 + 15$~~ из 2 нерав-ва

$(a_1 + 2d)5 + 15 > a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 - 24$

$a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > (a_1 + 2d)5 + 15 > a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 - 24$

$6d^2 < 24 \quad d^2 < 4 \quad -2 < d < 2$ по условию

прогрессия возрастающая и состоит из целых чисел, сл-но $d \in N$ единственное подходящее $d = 1$

из 1 нерав-ва

$a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 10 + 15$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a+5)^2 > 0 \quad a \neq -5$

из 2 нерав-ва при подстановке $d = 1$

$a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 10 + 39 \quad -5 - \sqrt{3}\sqrt{2} < a_1 < -5 + \sqrt{3}\sqrt{2}$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

1

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

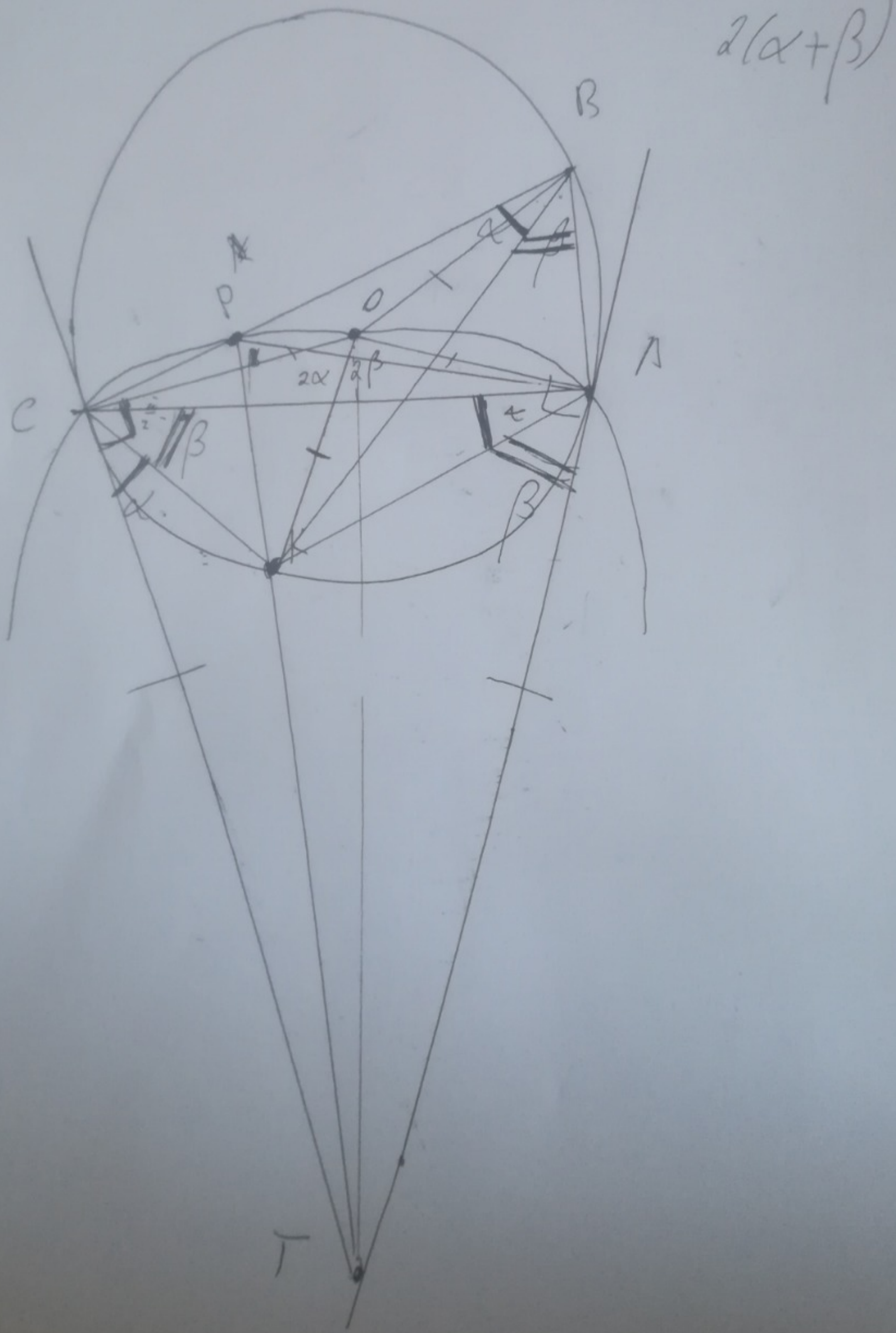
Шифр: **21104622**

ID профиля: **808325**

Вариант 20

Черновик

$2(\alpha+\beta)$



21104622 (U808325 M1302427)

№4 ~~Черновик~~ Черновик

НОД$(a;b;c)=10$

НОК$(a;b;c)=2^{17}\cdot5^{18}$

a a_1 a_2

a_3 a_3

b a_4 a_4

a_5 a_5

a_6

c a_7

a_8

$mn = abc^2 =$

$=$ НОК $\cdot$ НОД

$mn = 2^{18}\cdot5^{17}$

$$\frac{\log_2(x-4)}{\frac{1}{2}\log_2(x-4)+\frac{1}{2}}\cdot\frac{\log_2(5x-26)}{2\log_2(x-4)}\cdot\frac{\log_2(x-4)+1}{\frac{1}{2}\log(5x-26)}=$$

$= \quad 2$

$abc=2$

$a^2(a+1)=2$

$a=1$

$a^3+a-2=0$

$a=1$

a^2+a+2

$a^3+a-2 \mid a-1$

$a^3-a^2 \mid a^2+a+2$

a^2+a

a^2-a

$2a-2$

Черновик

Черновик

$\wedge 5$

$\log_{\sqrt{5(x-4)}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\frac{\lg (x-4)}{\frac{1}{2}\lg(2(x-4))} = \lg(5x-26)$

$\wedge 5$

$a;\ a;\ a+1$

$x-4=a \quad 5x-26=b$

$\log_{\sqrt{52a}} a \quad \log_{a^2} b \quad \log_{5b} 2a$

$\log_{\sqrt{52a}} a \quad \log_{\sqrt{5(x-4)}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\frac{\log_2(x-4)}{\log_2(x-4)+1} = \frac{\log_2(5x-6)}{\log_2(x-4)} \quad \lg(x-4) \quad \frac{\log_2(x-4)}{\cancel{1+}\,2+2\log_2(x-4)} = \frac{1}{4}\frac{\log_2 5x-6}{\log_2(x-4)}$

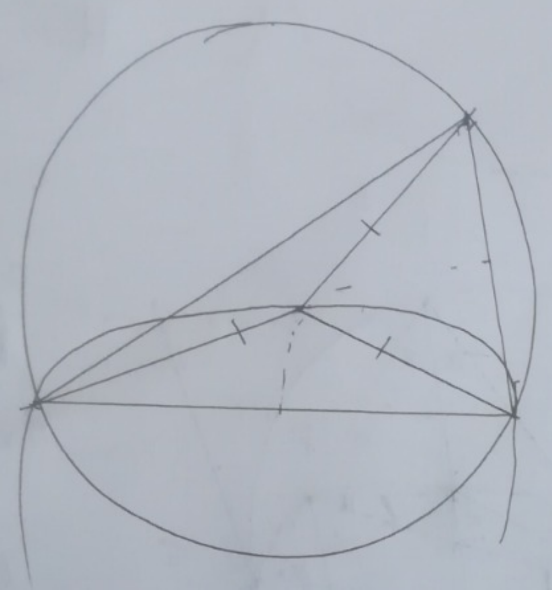
$\log_2^2(x-4) = \log_2(x-4)\log_2(5x-6) + \log_2^5 x - 6)$

$a\ b\ c$

$\cancel{\log(x-4)} \quad \frac{\log_2(x-4)}{\frac{1}{2}} \quad 4\log_c(x-4) =$

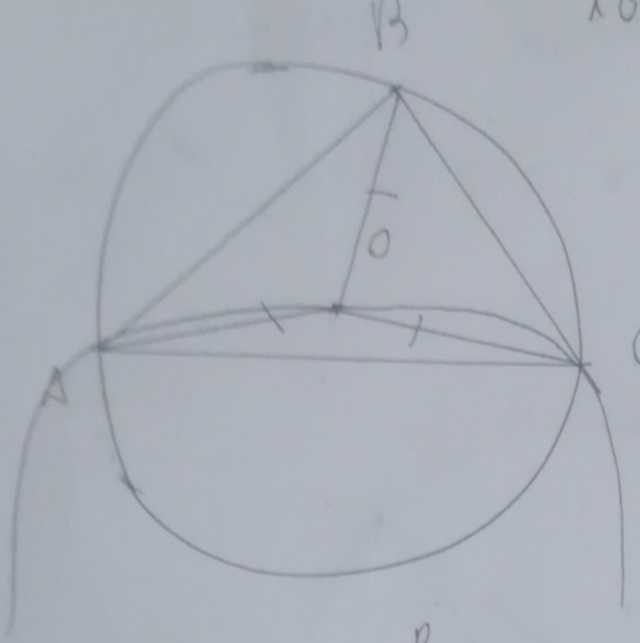
21104622 (U808325 M1302427)

Чернетка



№6

Черновик



$\log_6 9 \cdot \log_3 6 = 1+$

$1+\log_3 2$

2 $1+\log_6 \frac{3}{2}$

НОД

5

$a = 5^{n} \cdot 2^{m}$

$a = 5^{n_1} 2^{m_1}$

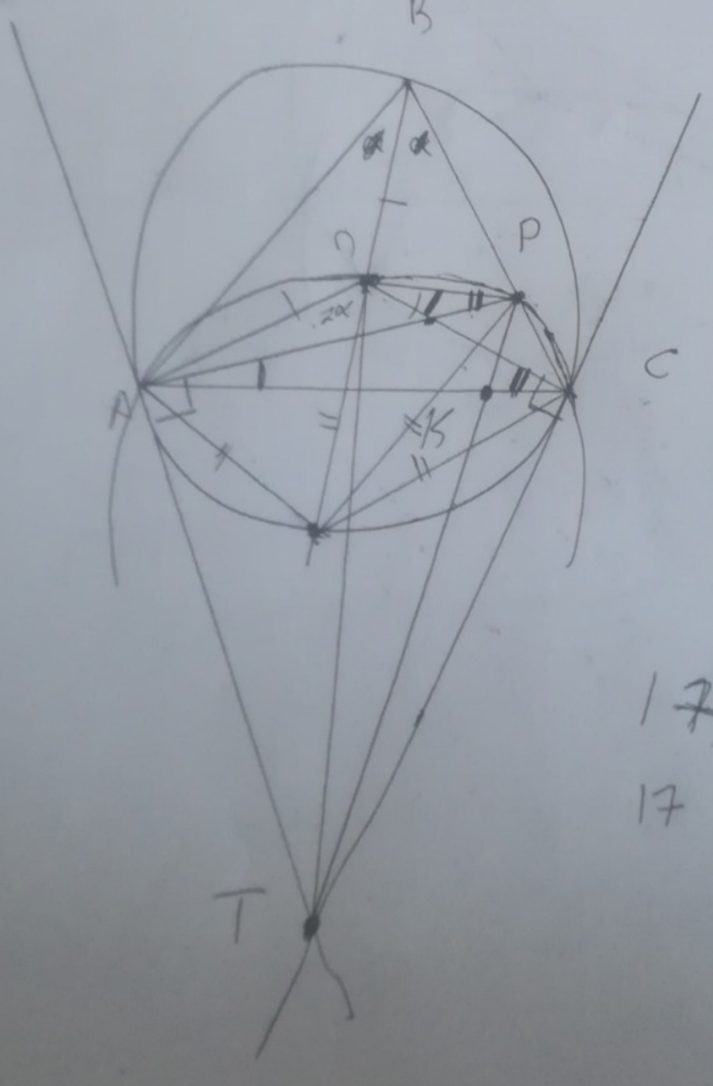
$c = 5^{n_3} 2^{m_3}$

Наибольшее $n = 17$

Наибольшее $m = 16$

Наим $n = 1$

Наим $m = 1$



$17, x, 1$

17 6

1 1 17

1 17 1

17 1 1

Черновик

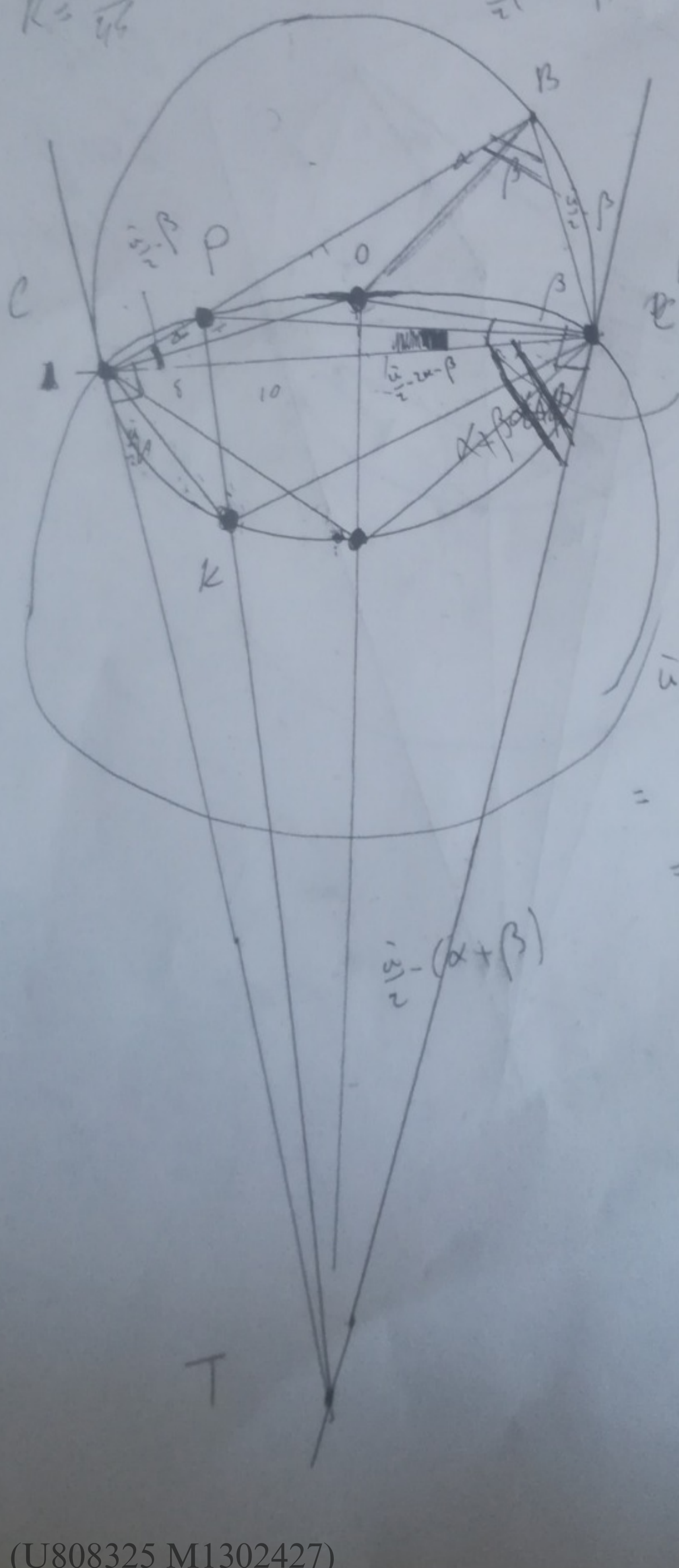
$R = \frac{abc}{4S}$

$\pi - \alpha - \beta$

$\frac{\alpha + \beta}{2}$

$2(\alpha+\beta)$

$\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$



$\alpha + \beta$

$\frac{\pi}{2} - \alpha$

$\frac{\pi}{2} - \beta$

$\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$

$\frac{\pi}{2} - \beta$

$2(\alpha+\beta)$

$\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - 2\alpha - 2\beta =$

$= \frac{\pi}{2} + \beta - 2\alpha - 2\beta =$

$= \frac{\pi}{2} - 2\alpha - \beta$

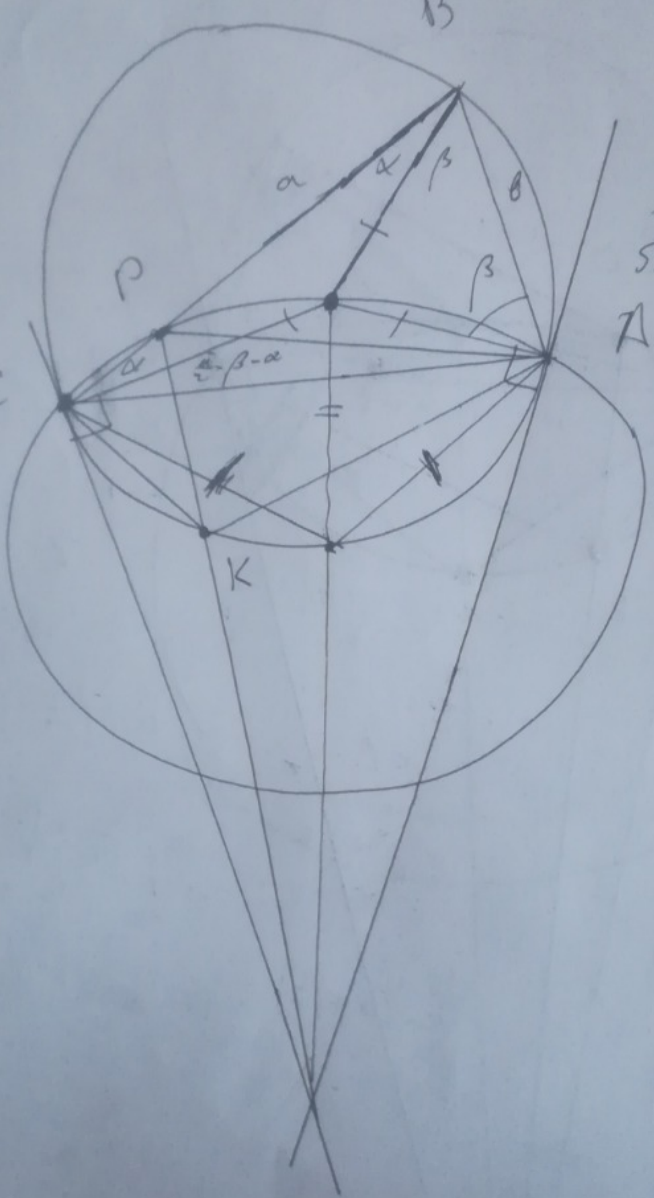
21104622 (U808325 M1302427)

Черновик

$b \sin\alpha = a \sin\beta$

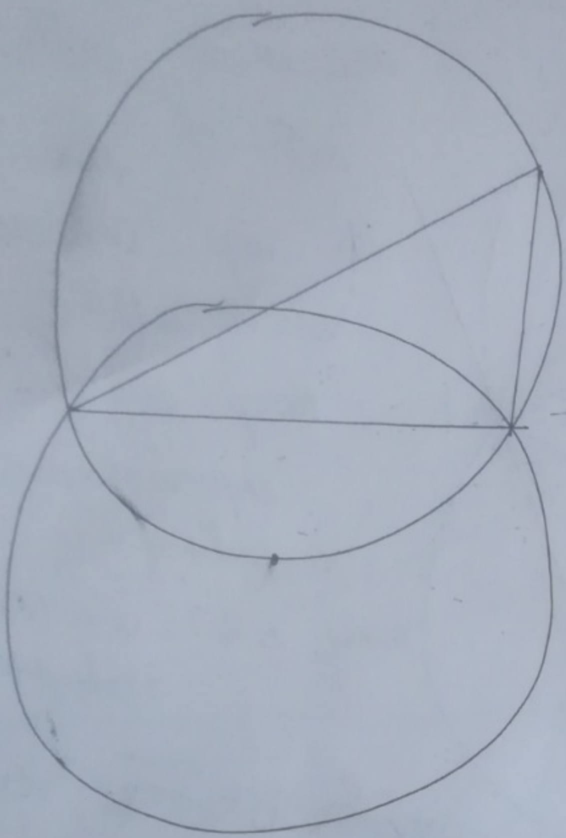
$b \sin\alpha$

$$\frac{b \sin\beta}{\sin(2(\alpha+\beta))} = 2R$$



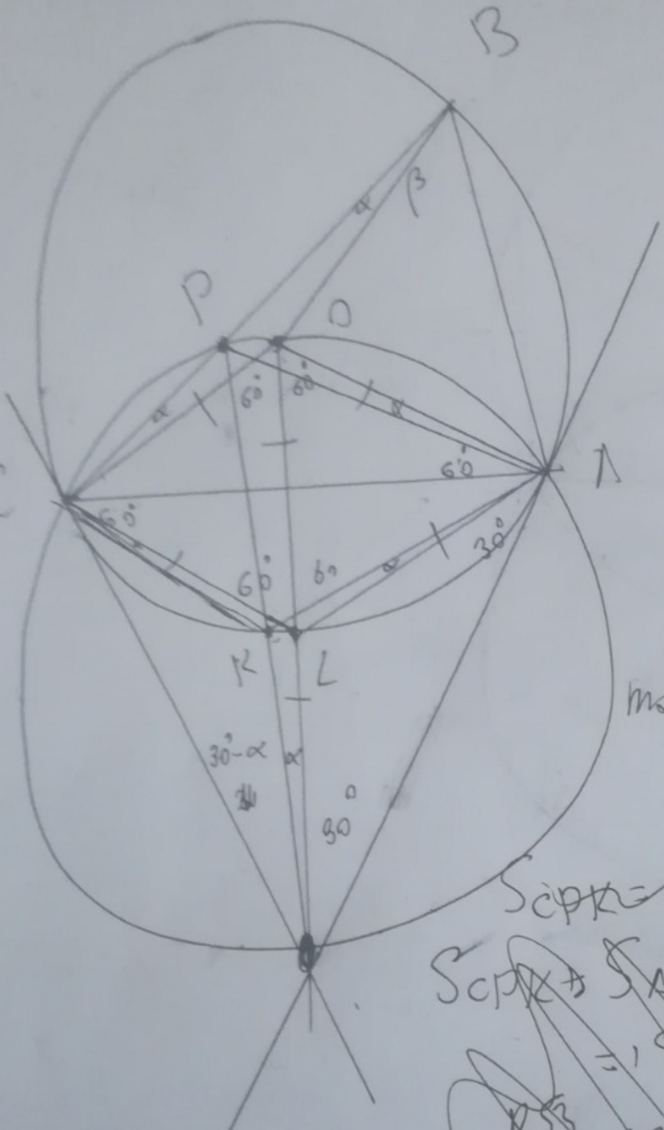
21104622 (U808325 M1302427)

№6 Чернявик



Чистовик

№6



центр окружности, описанной около △ADC лежит на окр, описанной около △ABC

тогда радиусы окружностей равны.

тогда △COL и △AOL - правильные

~~$S_{CPK} = S_{COD} + S_{CKL} + S_{CPO}$~~

~~$S_{CPK} + S_{APK} = S_{COL} + S_{AOL} = 18$~~

~~$\frac{R\sqrt{3}}{4} = 18 \quad R = 24\sqrt{3}$~~

~~$S_{COL} - S_{CPK} = S_{CPO} + S_{CKL}$~~

5

21104622 (U808325 M1302427)

Чистовик

если третье число не равно 4, не 17; не 1; число троек $n_1; n_2; n_3$, составит

$6 \cdot 15 = 90$ $3! = 6$ - число перестановок, 15 - кол-во возможных значений третьего числа

Итого: $90+6 =$ ~~[illegible]~~ 96 вариантов

аналогично для чисел $m_1; m_2; m_3$ так число таких троек:

$6 + 6 \cdot 15 =$ ~~[illegible]~~ $6 \cdot 15 = 90$

Итого возможных троек ABC

$90 \cdot 96 = 8100 + 540 = 8640$

Ответ: 8640

4

Черновик

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

т.к. НОК содержит только степени 2 и 5, каждое из чисел представимо в виде

$$\begin{cases} a = 2^{n_1} 5^{m_1} \\ b = 2^{n_2} 5^{m_2} \\ c = 2^{n_3} 5^{m_3} \end{cases}$$

т.к. НОД $= 10 = 5\cdot 2$

~~$m_1, m_2, m_3 \geq 1$~~

$m_1 \geq 1$ $n_1 \geq 1$

$m_2 \geq 1$ $n_2 \geq 1$

$m_3 \geq 1$ $n_3 \geq 1$

при этом наименьшее из значений n равно 1 и наименьшее из значений m равно 1

т.к. НОК $= 2^{17}\cdot 5^{16}$,

$m_1 \leq 16$ $n_1 \leq 17$

$m_2 \leq 16$ $n_2 \leq 17$

$m_3 \leq 16$ $n_3 \leq 17$

при этом наибольшее из значений m равно 16, а наибольшее из значений n равно 17

т.е. среди чисел $n_1; n_2; n_3$ найдется число 1; число 17 а третье число для которого справедливо нерав-во $1 \leq n \leq 17$

аналогично среди чисел m_1, ~~числа~~, m_2; m_3 найдется число 1; 16 и $1 \leq m_i \leq 16$

Найдем число троек ~~n_1~~ ~~где~~ $n_1; n_2; n_3$ удовлетворяющих этим условиям пусть третье число ~~(числа (17 или 1)~~ равно 1 – 3 тройки чисел $n_1; n_2; n_3$

если $(1;1;17)$ $(1;17;1)$ $(17;1;1)$

аналогично ~~если~~ третье число равно 17 – 3 тройки $\boxed{3}$

в ... = ... n

№5 Шитовик

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)=1$

$(x-4)^2=5x-26$

$x^2-8x+16=5x-26$

$x^2-13x+42=0$

$D=169-168=1$

$x=\frac{13\pm1}{2}$

$x=7 \quad x=6$

$x=6$ проверен в прошлом пункт

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=\log_{\sqrt{6}}3$. $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)=1$ $\quad = \log_{3}6$

не соотв условию

3) $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1$

$5x-26=4x^2-32x+64$

$4x^2-37x+90=0$

$D=37^2-90\cdot16=1440$

$=900+420+49-$

$=1369-1440<0$

нет реш

Ответ: 6

№5 Гистовик

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$; $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$ $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

перемножим эти числа. (ни одно из них не равно 0, т.к. $5x-26 \neq 1$ по ОДЗ. $x \neq 5$ т.к. $5x-26 > 0$)

$$\log_{\sqrt{2(x-4)}}(x-4) \cdot \log_{(x-4)^2}(5x-26) \cdot \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) =$$

$$= \frac{\log_2(x-4)}{\frac{1}{2}(1+\log_2(x-4))} \cdot \frac{\log_2(5x-26)}{2\log_2(x-4)} \cdot \frac{1+\log_2(x-4)}{\frac{1}{2}\log_2(5x-26)} =$$

$= 2$

пусть исходные числа: a, a и $a+1$

$a \cdot a(a+1) = 2$

$a^3 + a^2 - 2 = 0$

$a = 1$ - корень

$(a-1)(a^2+2a+2) = 0$

$D = 4 - 8 < 0$

$a = 1$ нет реш.

$$\begin{array}{r|l} a^3+a^2-2 & a-1 \\ \hline -\;a^3-a^2 & a^2+2a+2 \\ 2a^2 & \\ -\;2a^2-2a & \\ 2a-2 & \end{array}$$

один из логарифмов равен 1

① $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 1$ $\quad x-4 = \sqrt{2}\sqrt{x-4}$

$x = 4$ не сост. ОДЗ

$\sqrt{x-4} = \sqrt{2}$

$x = 6$

Проверим: $\log_{\sqrt{2}} 2 \neq 1$ $\quad \log_{(x-4)^2}(5x-26) = \log_4 4 = 1$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = \log_2 4 = 2$ $\quad \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 1$