Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104504**

ID профиля: **864006**

Вариант 20

Черновик

$$\begin{cases}(x+2)^2+(y+3)^2=13\\ x^2+y^2=13 \quad |\cdot 16 \Rightarrow 16x^2+16y^2=16\cdot 13\end{cases}$$

$\cancel{x^2}+4x+4+\cancel{y^2}+6y+9=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}$

$4x+6y=-13$

$4x=-(13+6y)$

$13^2+26\cdot 6y+36y^2+16y^2=16\cdot 13$

$52y^2+156y+13\cdot(13-16)=0$

$4y^2+12y-3=0$

$D/4=36+12=48=(4\sqrt{3})^2$

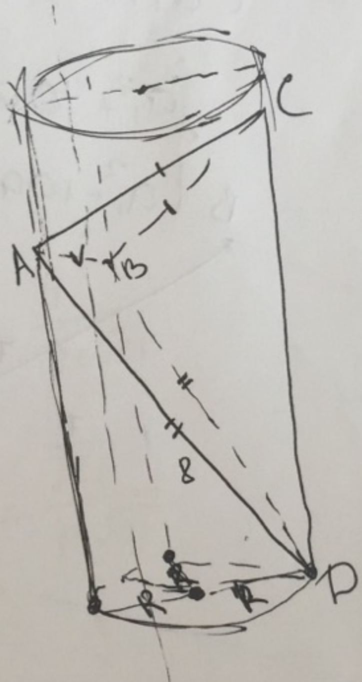
$y=\frac{-6\pm 4\sqrt{3}}{4}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{3}$

$4x=-13-6y$

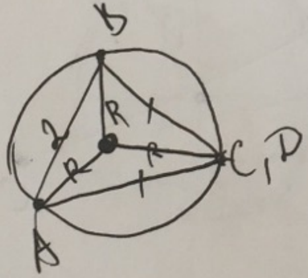
$$\left[\begin{array}{l}4x=-13+9-6\sqrt{3}\\ 4x=-13+9+6\sqrt{3}\end{array}\right.$$

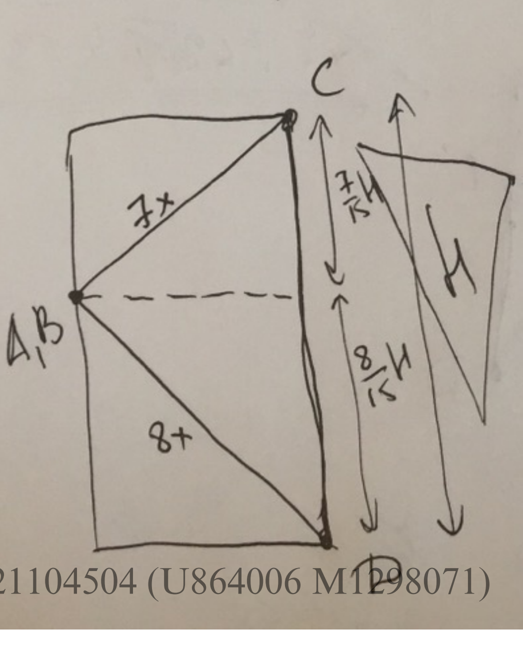
$4x=-4\pm 6\sqrt{3}$

$x=-1\pm\frac{3}{2}\sqrt{3}$



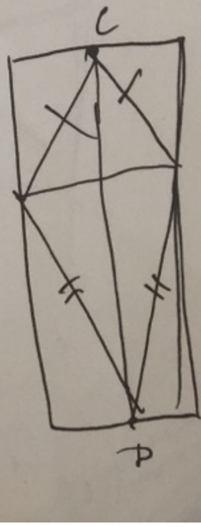
$R=\frac{2}{2\sin C}$





AB || осн.

$A_1C_1=\sqrt{8^2-\left(\frac{8}{15}H\right)^2}=\sqrt{2}$



$S=5a_1+6d$ $\qquad$ $a_1+a_1+d+\dots+a_1+4d$

$a_6=a_1+5d$ $\qquad$ $(a_1+5d)(a_1+10d)>5a_1+6d+15$

$a_{11}=a_1+10d$ $\qquad$ $a_1^2+15a_1d+50d^2>5a_1+6d+15$

$a_8=a_1+7d$ $\qquad$ $a_8\cdot a_9=a_1^2+15a_1d+56d^2<5a_1+6d+39$

$a_9=a_1+8d$ $\qquad$ $6d^2<24$

Даю x, y $\qquad$ $d^2<4$

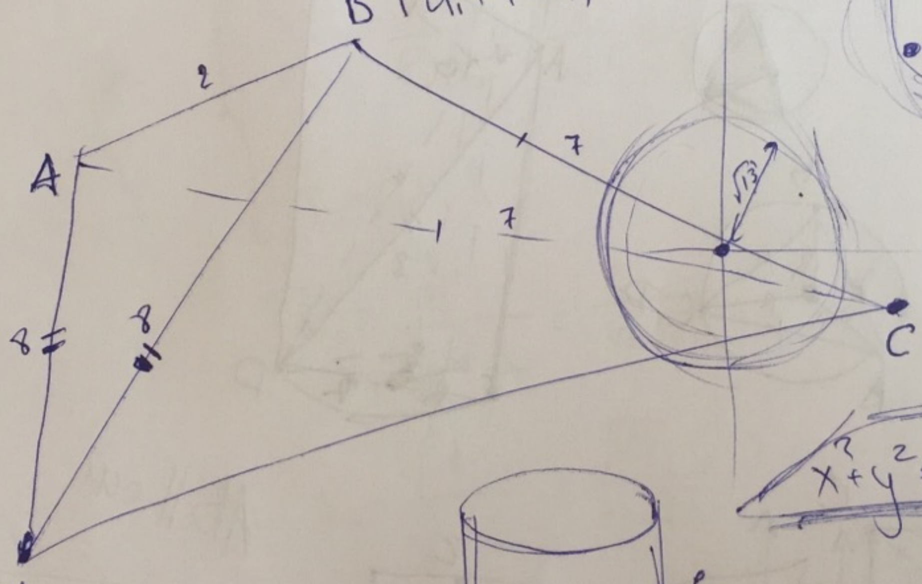
$\exists\, a, b$ $\qquad$ $d=1$

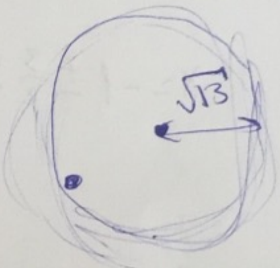
Черновик

$(x-a)^2+(y-b)^2\le 13$

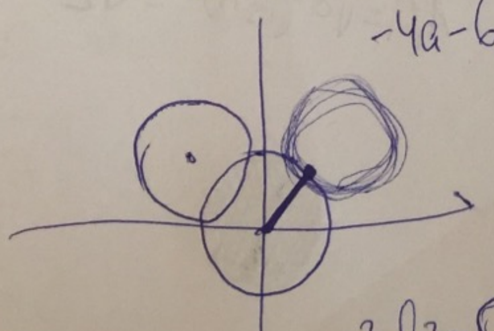
$a^2+b^2\le \min(-4a-6b,\ 13)$ $\qquad$ $\begin{cases} a_1^2+15a_1+50>5a_1+6+15 \\ a_1^2+15a_1+56<5a_1+6+39 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+10a_1+29>0 \\ a_1^2+10a_1+11<0 \end{cases}$

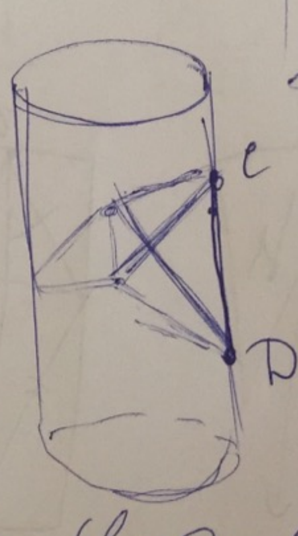




$x^2+y^2\le \cancel{\ }\ 4\cdot 13=52$



$-4a-6b$



$a^2+b^2\ge 0$ $\qquad$ $-4a-6b\ge 0$ $\qquad$ $2a\le -3b$ $\qquad$ $b=-\frac{2}{3}a$

$2a+3b\le 0$

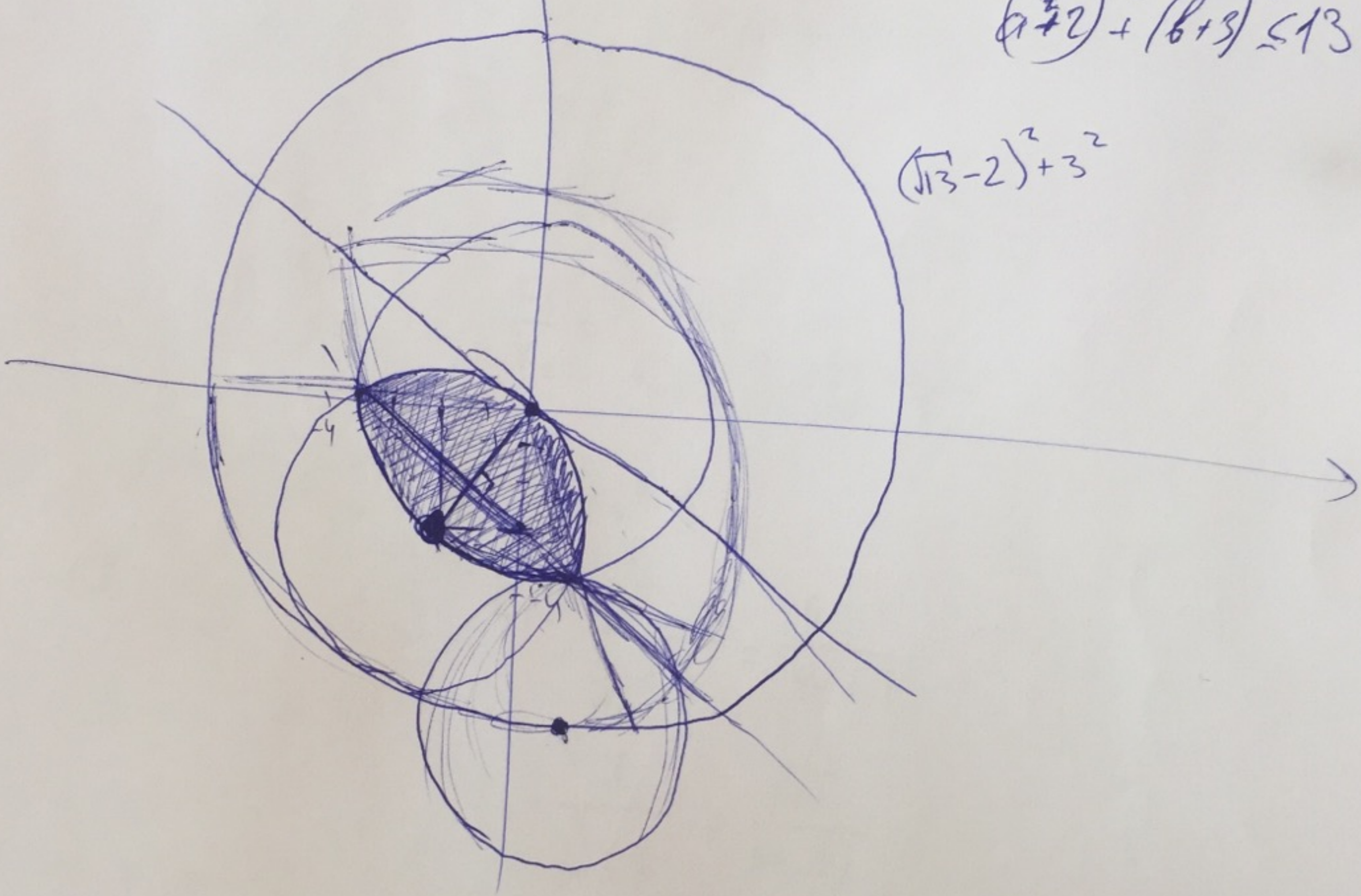
Черновик

$(a;b)$

$a^2+b^2 \leq -4a-6b$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \leq 13$

$(\sqrt{13}-2)^2+3^2$



№1

$S = a_1 + (a_1+d) + \dots + (a_1+4d) = 5a_1 + 10d$

Чистовик

$a_6 = a_1 + 5d$

Вариант 20

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_9 = a_1 + 8d$

$\left.\begin{array}{l}(a_1+5d)(a_1+10d) = a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \\ (a_1+7d)(a_1+8d) = a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6d^2 < 39 - 15 = 24$

$d^2 < 4$

$\underline{d = 1}$, т.к. $d = (a_2 - a_1) \in \mathbb{Z}$ и $d > 0$.

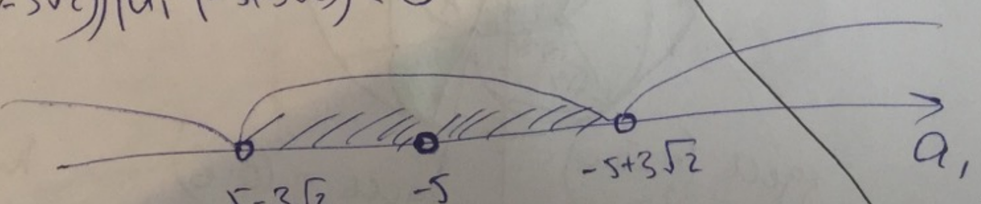
$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 25 \\ a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 49 \end{cases}$

Черновик

$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$ $\quad D/4 = 25 - 7 = 18 = (3\sqrt{2})^2$

$a_1 = \frac{-5 \pm 3\sqrt{2}}{1}$

$\begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \\ (a_1 - (-5-3\sqrt{2}))(a_1 - (-5+3\sqrt{2})) < 0 \end{cases}$



$a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5) \cup (-5; -5+3\sqrt{2})$

Целые значения:

$a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$, т.к. $4 < 3\sqrt{2} < 5$

1

21104504 (U864006 M1298071)

№1

Чистовик

$S = a_1 + a_1 + d + .. + a_1 + 4d = 5a_1 + 10d$

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_9 = a_1 + 8d$

$(a_1 + 5d)(a_1 + 10d) = a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15$

$(a_1 + 7d)(a_1 + 8d) = a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 6d^2 < 39 - 15 = 24$

$d^2 < 4$

$d = 1$, т.к. $d > 0$ и $d \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 25 \\ a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 49 \end{cases}$$

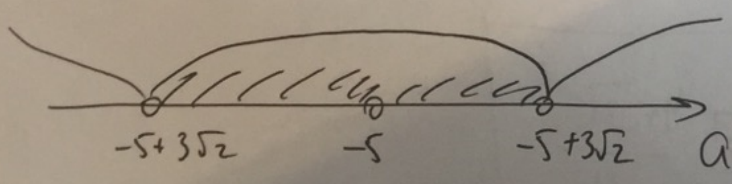
$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$$

$D/4 = 25 - 7 = 18 = (3\sqrt{2})^2$

$(a_1 + 5)^2 > 0$

$a_1 = \dfrac{-5 \pm 3\sqrt{2}}{1}$

$(a_1 - (-5 - 3\sqrt{2}))(a_1 - (-5 + 3\sqrt{2})) < 0$



1

$a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$, т.к. $4 < 3\sqrt{2} < 5$

№3

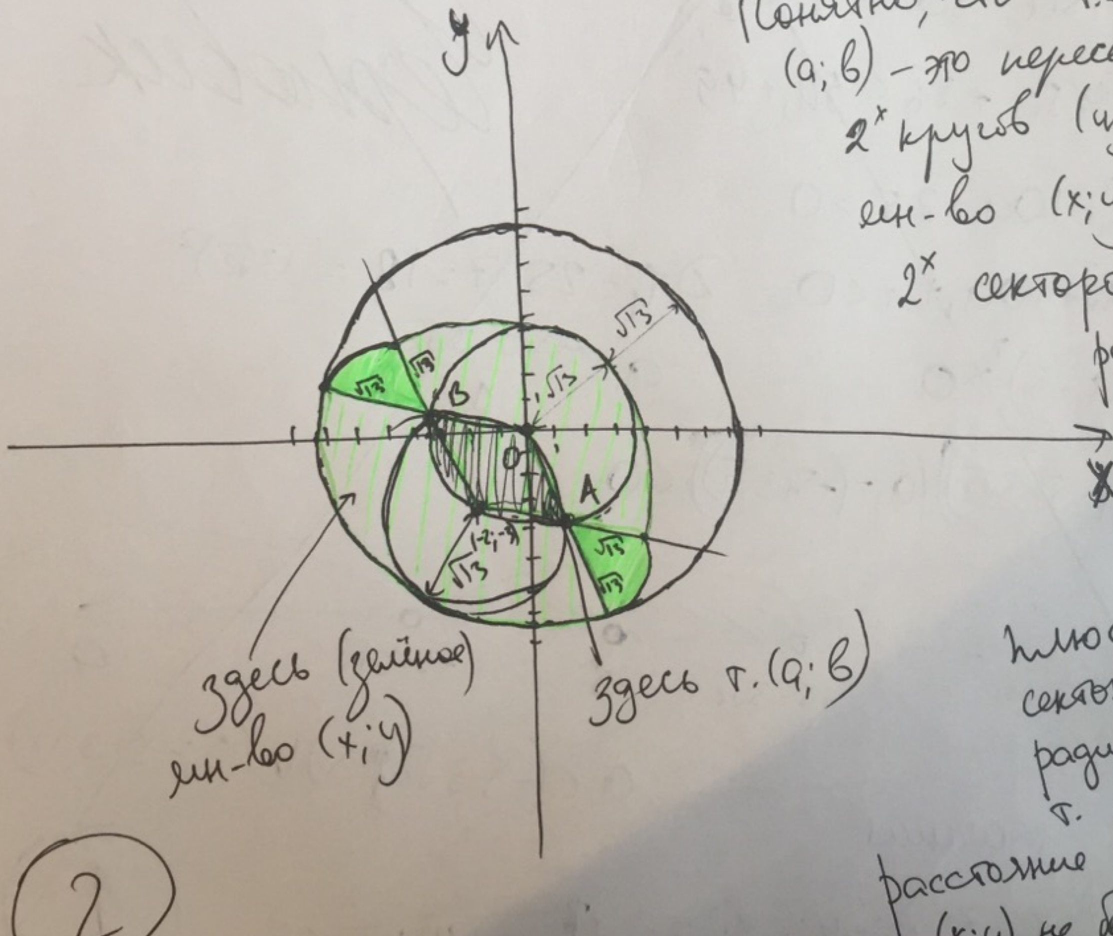
Чистовик

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2\le 13 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,\,13) & (2)\end{cases}$$

Рассмотрим точку с координатами $(a;b)$. Из первого неравенства следует, что она находится внутри круга радиуса $\sqrt{13}$, ~~вписанного в~~ с центром в т. $(x;y)$.

$a^2+b^2\le 13$, значит т. $(a;b)$ лежит и внутри круга радиуса $\sqrt{13}$ с центром в $(0;0)$.

$a^2+b^2\le -4a-6b \Leftrightarrow a^2+4a+b^2+6b\le 0 \Leftrightarrow (a+2)^2+(b+3)^2\le 13$, т.е. $(a;b)$ лежит внутри круга радиуса $\sqrt{13}$ с центром в $(-2;-3)$. Решим графически:



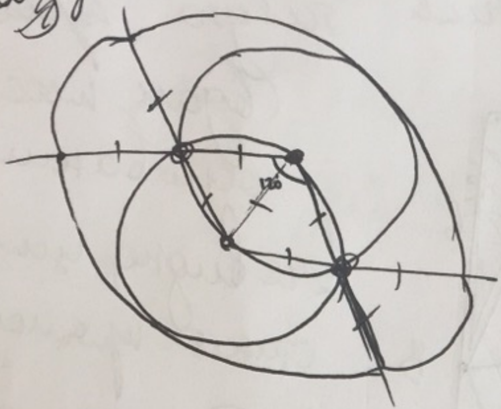
Понятно, что т.к. мн-во $(a;b)$ – это пересечение 2^x кругов (из (2)), то мн-во $(x;y)$ – пересечение 2^x секторов кругов радиусов $2\sqrt{13}$ с центрами в $(0;0)$ и $(-2;-3)$, плюс 2 сектора кругов радиуса $\sqrt{13}$ из т. A и B, т.к. расстояние от $(a;b)$ до $(x;y)$ не больше $\sqrt{13}$

2

21104504 (U864006 M1298071)

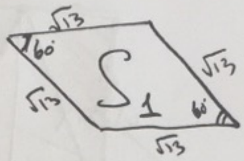
Фактически мы ставим окружность радиуса $\sqrt{13}$ с центром в т. на границе заштрихованной области, двигаем точку и смотрим что получится — это м-во $(x;y)$.

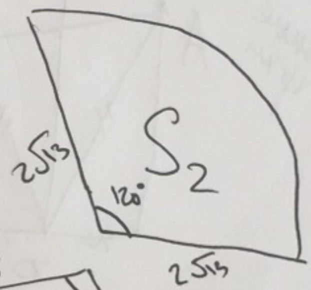
Найдём площадь геометрически: Чистовик



$$S_1 = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

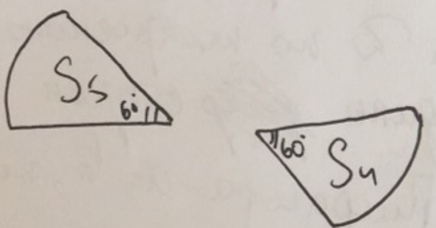
$$= \frac{13\sqrt{3}}{2}$$ - площадь 2^x р/стор тр-ков со стороной $\sqrt{13}$

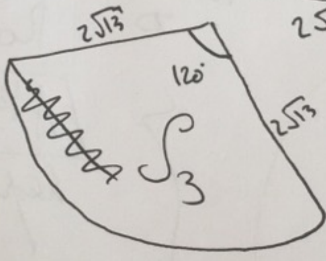




$$S_2 = S_3 = \pi\cdot(\sqrt{13})^2\cdot\frac{120°}{360°} =$$

$$= \frac{13\pi}{3}$$





$$S_4 = S_5 = \pi(\sqrt{13})^2\cdot\frac{60°}{360°} =$$

$$= \frac{\pi\cdot 13}{6}$$

$$S = S_3 + S_2 - S_1 + S_4 + S_5 = 2\cdot\frac{13\pi}{3} - \frac{13\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{13\pi}{6} =$$

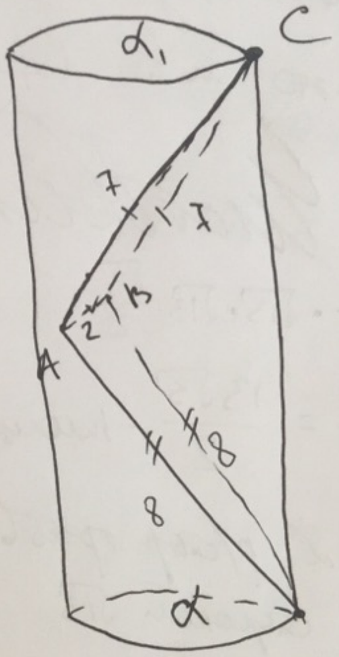
$$= 13\pi - \frac{13\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $S = 13\pi - \frac{13\sqrt{3}}{2}$

3

№2

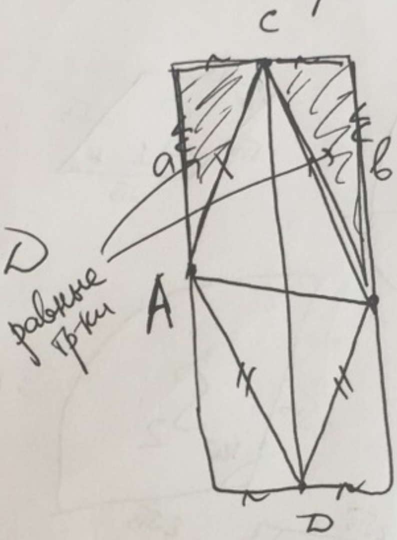
Чистовик



$\alpha_1 \parallel \alpha$

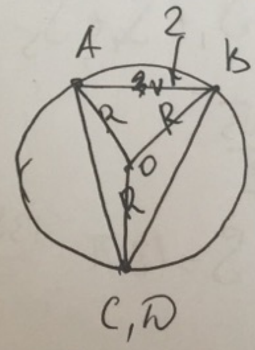
~~Разу~~ ~~...~~ „обрежем“ тетраэдр так, чтобы C и D были в основаниях. Очевидно, ничего не изменится.

Рассмотрим такую проекцию: (вдоль плоскости оснований) α



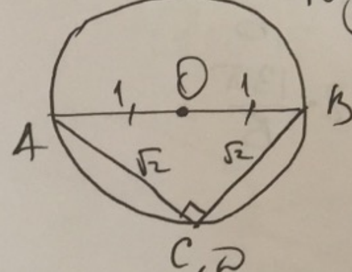
Очевидно цилиндр станет прямоугольником, C и D по построению — середины ~~...~~ сторон. По т. Пифагора $a = b$, значит $\boxed{AB \parallel \alpha}$. Теперь рассмотрим перпендикулярную проекцию на плоскость α:

В ней $AB = 2$, т.к. длина не изменилась при проекции.



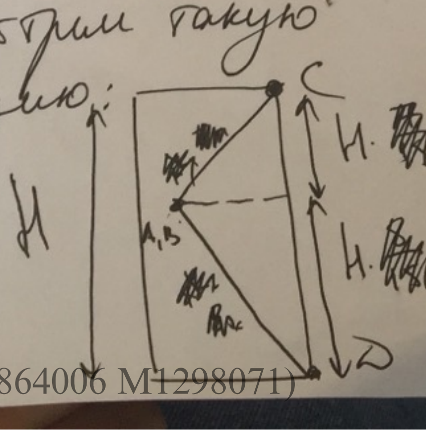
По т. синусов $R = \frac{AB}{2\sin\angle ACB}$

Очевидно, R_{min} при $\sin\angle ACB = 1$, т.к. при $\angle ACB = 90°$:



Тогда проекция AD на α равна $\sqrt{2}$.

Рассмотрим такую проекцию:



$H \cdot k_1 = H_1$

$H \cdot k_2 = H_2$

4

~~Чтобы строго доказать, что высоты~~ Чистовик

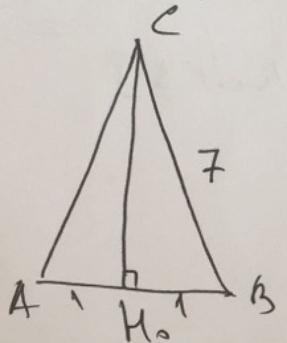
~~пропорциональны~~, можно провести CH₀ в

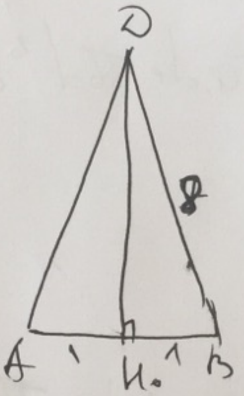
$\triangle ACB$ ($CH_0 \perp AB$, H_0 – сер. AB) и DH_0 в $\triangle ADB$.

Они лежат в плоскости, содержащей „медиану" цилиндра (в силу симметрии, т.к. $AB \parallel \alpha$).

$CH_0 = \sqrt{49-1} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$DH_0 = \sqrt{64-1} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$





$$\begin{cases} \dfrac{k_1}{k_2} = \dfrac{CH_0}{DH_0} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{7}} = \dfrac{4}{\sqrt{21}} \\ k_1 + k_2 = 1 \end{cases}$$

$$k_1 = \frac{\frac{4}{\sqrt{21}}}{\frac{4}{\sqrt{21}} + 1} = \frac{4}{4+\sqrt{21}}$$

$$k_2 = \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{21}} + 1} = \frac{\sqrt{21}}{4+\sqrt{21}}$$

$$H_1 = H \cdot \frac{4}{4+\sqrt{21}} = CD \cdot \frac{4}{4+\sqrt{21}}$$

$$H_2 = H \cdot \frac{\sqrt{21}}{4+\sqrt{21}}$$

Проекция AD на α равна

$$A_1D_1 = \sqrt{AD^2 - H_2^2} = \sqrt{2}$$

$$64 - H_2^2 = 2$$

$$H_2 = \sqrt{62}$$

$$H = H_2 \cdot \frac{4+\sqrt{21}}{\sqrt{21}} = \boxed{\sqrt{62} \cdot \frac{4+\sqrt{21}}{\sqrt{21}}} = CD$$

5

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104504**

ID профиля: **864006**

Вариант 20

(4)

Вариант 20

Чистовик

Понятно, что $a = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}$,

т.е. нет прочих делителей. Т.к. $НОД(a; b; c) = 2 \cdot 5$, $\exists i \mid \alpha_i = 1$, иначе все были бы кратны 4 или вовсе ~~не были бы кратны степени двойки~~ НОД был бы нечётным (если $\exists j \mid \alpha_j = 0$). $\exists k \mid \alpha_k = 17$, т.к. иначе либо $2^{16} \cdot 5^{16}$ делилось бы на любое из чисел (если $\alpha_i < 17\ \forall i$) или ~~любое~~ нужно было бы $2^{18} \cdot$ ~~...~~ (если $\exists i \mid \alpha_i > 17$).
Третье α любое от 1 до 17. Вариантов распределения степеней двоек:

$$3 \cdot 2 \cdot 15 + 3 + 3 = \boxed{96}$$

вариантов выбрать i для $\alpha_i = 1$	вариантов выбрать j для $\alpha_j = 17$	вариантов α_k, если $\alpha_k \neq 1$, $\alpha_k \neq 17$	вариантов распределений индексов, если $\{\alpha\} = \{1; 1; 17\}$	вариантов, если $\{\alpha\} = \{17; 17; 1\}$

Аналогично посчитаем для β:

$\exists \beta_i = 1$, $\exists \beta_j = 16$

$$3 \cdot 2 \cdot 14 + 3 + 3 = \boxed{90}$$

вариантов выбрать i для $\beta_i = 1$	вариантов выбрать j для $\beta_j = 16$	вариантов β_k, если $\beta_k \neq 1$, $\beta_k \neq 16$	вариантов распределений индексов, если $\{\beta\} = \{1; 1; 16\}$	вариантов распределений индексов, если $\{\beta\} = \{16; 16; 1\}$

(1)

Значит ответ $\underline{96 \cdot 90}$ Чистовик

№5

Введём для краткости обозначения:

$a = \log_{x-4}(5x-26)$, $b = \log_{x-4} 2$.

Забудем про ограничения, просто потом сделаем проверку.

$$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \frac{1}{\log_{x-4}\sqrt{2x-8}} = \frac{1}{\log_{x-4}(x-4)^{\frac12} + \log_{x-4}\sqrt{2}} = \frac{1}{\frac12 + \frac12 \log_{x-4} 2} = \frac{2}{1+b}$$

$$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \frac12 \log_{x-4}(5x-26) = \frac12 a$$

$$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2\log_{5x-26}(2x-8) = 2\left(\log_{5x-26}(x-4) + \log_{5x-26} 2\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{a} + \frac{\log_{x-4} 2}{\log_{x-4}(5x-26)}\right) = \frac{2}{a} + \frac{2b}{a}$$

Пусть $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$:

$$\begin{cases} \frac{2}{1+b} = \frac12 a \\ \frac{2}{a} + \frac{2b}{a} = \frac12 a + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{4}{a} - 1 \\ \cancel{\frac{2}{a}} + \frac{8}{a^2} - \cancel{\frac{2}{a}} = \frac12 a + 1 \quad | \cdot 2a^2 \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} b = \frac{4}{a} - 1, \\ 16 = a^3 + 2a^2 \end{cases}$$

Чистовик

$$\begin{array}{l|l} a^3+2a^2+0a-16 & a-2 \\ \hline -a^3-2a^2 & a^2+4a+8 \\ \quad 4a^2+0a & \\ \quad -4a^2-8a & \\ \qquad 8a-16 & \\ \qquad -8a-16 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$(a-2)(a^2+4a+8)=0,$

$D=16-32<0$

$a=2$

$b=2-1=1$

Знаменатель нигде не обращается в ноль, всё в порядке.

$\log_{x-4} 2 = 1$

$\boxed{x=6}$

$\log_{x-4}(5x-26) = \log_2 4 = 2$

Подходит и по ограничениям по всем логарифмам.

Пусть $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{5x+26}}(2x-8)$

$$\begin{cases} \frac{2}{1+b} = \frac{2}{a} + \frac{2b}{a} \\ \frac{1}{2}a = \frac{2}{1+b} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l} b^3+3b^2+b-5 & b-1 \\ \hline -b^3-b^2 & b^2+4b+5 \\ \quad 4b^2+b & \\ \quad -4b^2-4b & \\ \qquad 5b-5 & \\ \qquad -5b-5 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$a = \frac{2(3+b)}{1+b}$

$\frac{2}{1+b} = \frac{2(1+b)(1+b)}{2(3+b)}$

$6+2b = b^3+3b^2+3b+1$

$b^3+3b^2+b-5=0$

$(b-1)(b^2+4b+5)=0$

$D=16-20<0$

3

21104504 (U864006 M1298072)

$b=1$ Чистовик

$a=\frac{2\cdot 4}{2}=4$

По ограничениям подходит

$\log_{x-4}2=1$

$x=6$

$\log_{x-4}(5x-26)=2$, а не 4. Не подходит.

Пусть $\log_{(x-4)^2}(5x-26)=\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}a=\frac{2}{a}+\frac{2b}{a}\\ \frac{2}{1+b}=1+\frac{1}{2}a\end{cases}$$

$$\frac{2(1-b)}{1+b}=a$$

$$\frac{1-b}{1+b}=\frac{(1+b)(1+b)}{1-b}$$

$$b^2-2b+1=b^3+3b^2+3b+1$$

$$b^3+2b^2+5b=0$$

$$b(b^2+2b+5)=0$$

$$D=4-20<0$$

$$b=0$$

$$\log_{x-4}2=0$$

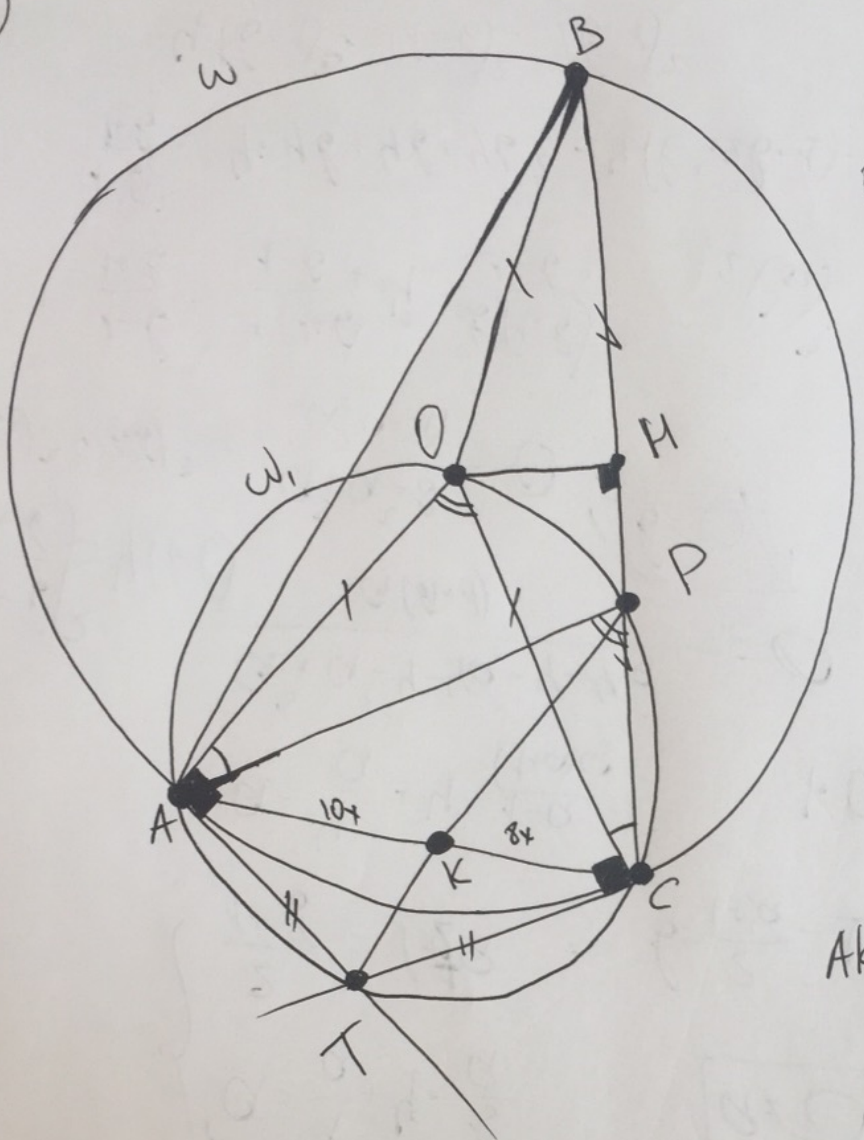
Противоречие

Ответ: $x=6$

4

21104504 (U864006 M1298072)

№6



Чистовик

в 4ˣ угольнике AOCT сумма противоположных углов 180°, значит $T \in \omega_1$

$$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{KC} = \frac{5}{4}$$

$$S_{ABC} = S_{APC} \cdot \frac{BC}{PC} = 18 \cdot \frac{BC}{PC}$$

$$AK \cdot KC = KP \cdot KT$$

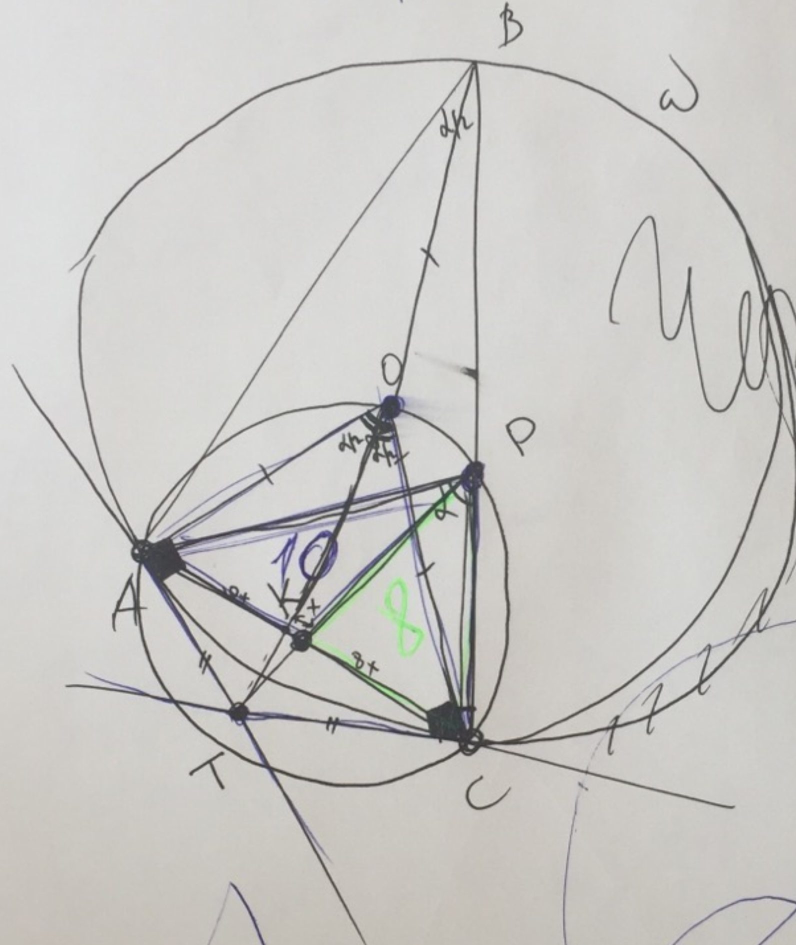
Чистовик

$\frac{2}{1+b}; \frac{1}{2}a; \frac{2}{a}+\frac{2b}{a}$

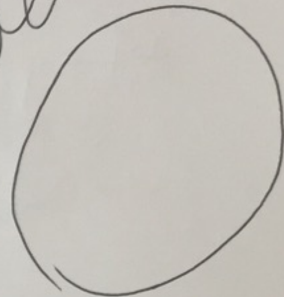
$a=\frac{4}{a}+\frac{4b}{a}=\frac{4(b+1)}{a} \Rightarrow a^2=4(b+1)$

$\frac{4}{b+1}=2+a \Rightarrow \frac{2-2b}{1+b}=a=\frac{2(1-b)}{1+b}$

$\frac{AC}{\sin\alpha}$

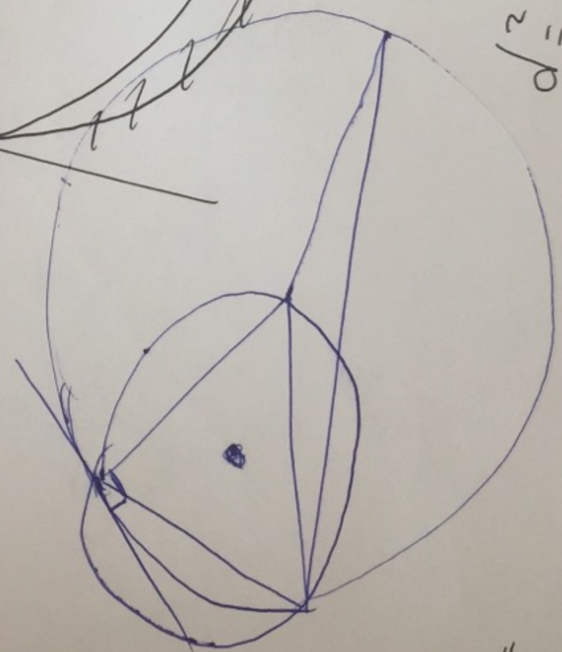


Черновик

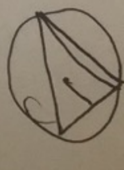


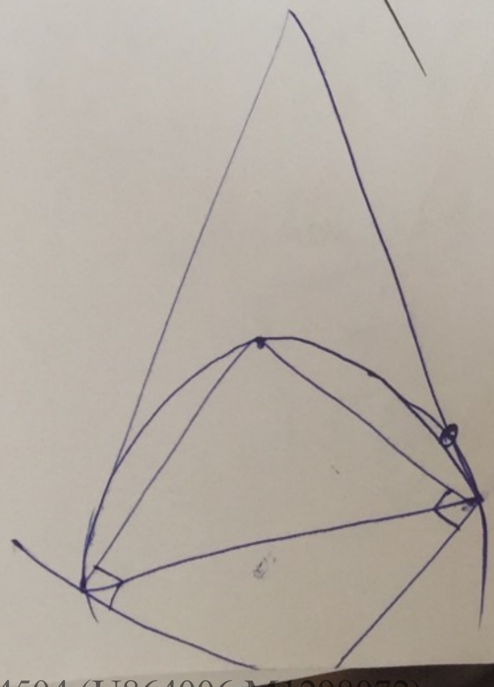
$d=$

$r=\frac{AC}{2\sin\alpha}$



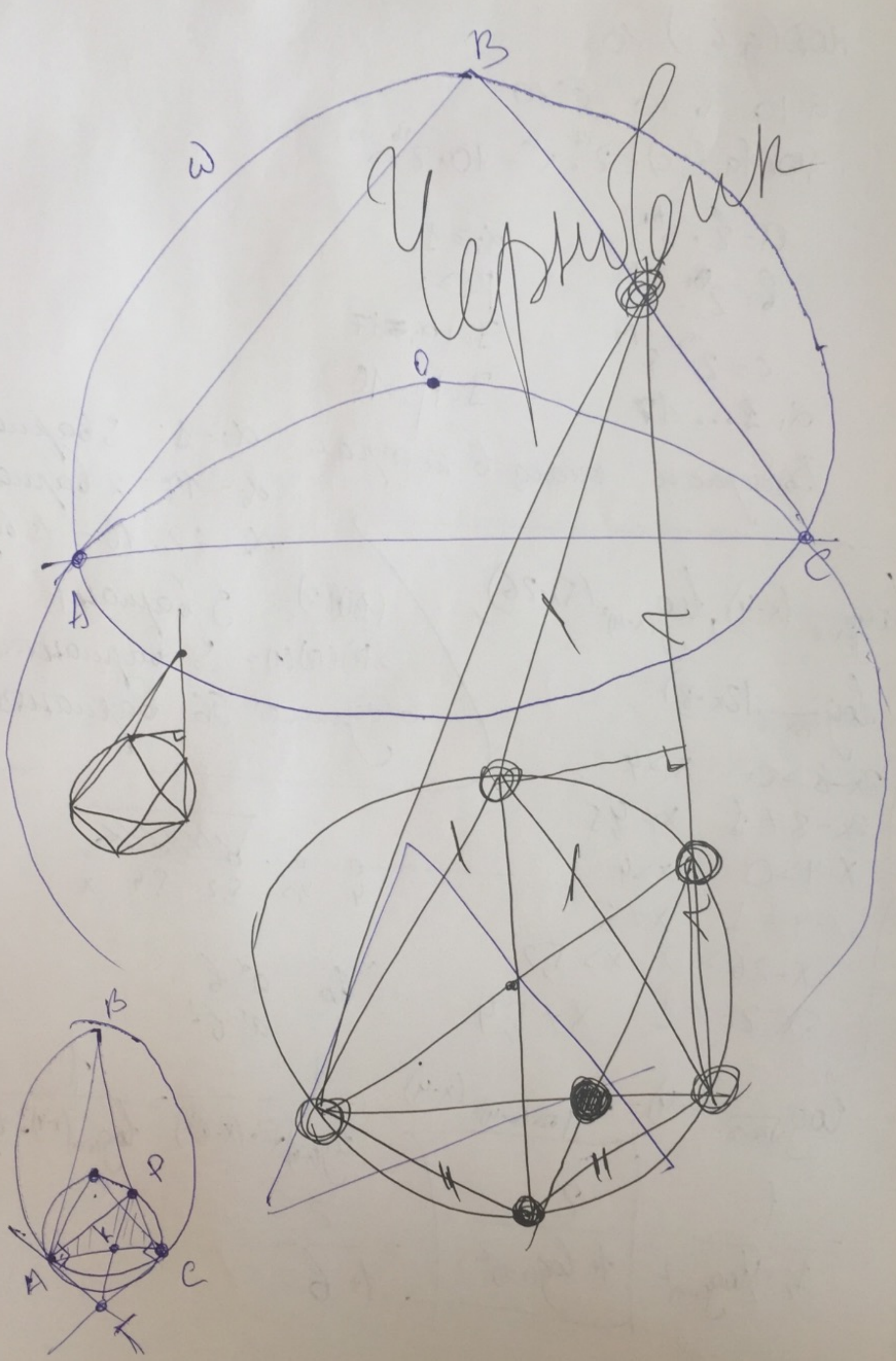
$S_{ABC}=$





Чистов
в 4ⁿ уг
AC
пр
уг
S_{APK}
S_{CPK}
S_{ABC}
$AK \cdot KC$

Черновик



НОД$(a; b; c) = 10$

$a \vdots 10 \quad b \vdots 10 \quad c \vdots 10$

НОК$(a; b; c) = 2^{17} \cdot 5^{16} = 10 \cdot 2^{16} \cdot 5^{15}$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}$ $\qquad \alpha_i \geq 1$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}$ $\qquad \beta_i \geq 1$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}$ $\qquad \exists i \mid \alpha_i = 17$

$\alpha_1\ 1 \ldots 17$ $\qquad \exists i \mid \beta_i = 16$

Выбираем число, в котором $\alpha_i = 1$: 3 варианта

$\alpha_j = 17$: 2 варианта

α_k : 2…16 – 15 вариантов

(1)(1)(17) – 3 варианта

(17)(17)(1) – 3 варианта

в сумме 96 вариантов

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4),\ \log_{(x-4)^2}(5x-26),$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$$\begin{cases} 2x-8>0 & x>4 \\ 2x-8 \neq 1 & x \neq 4{,}5 \\ x-4>0 & x>4 \\ x-4 \neq 1 & x \neq 5 \\ 5x-26>0 & x>5{,}2 \\ 5x-26 \neq 1 & x \neq 5{,}4 \end{cases}$$

4 $\quad$ 4,5 $\quad$ 5,2 $\quad$ 5,4 $\quad$ x

$a^{\alpha} = b$

$a^1 = b^{\frac{1}{\alpha}}$

$$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{2}\cdot(x-4)^{1/2}}(x-4) = \frac{1}{\log_{(x-4)}\left(\sqrt{2}\cdot(x-4)^{1/2}\right)} = \frac{1}{\log_{(x-4)}(x-4)^{1/2} + \log_{(x-4)}\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_{(x-4)}2} = \boxed{\frac{2}{1+\log_{(x-4)}2}} = \frac{2}{1+b}$$