Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104456**

ID профиля: **113532**

Вариант 20

Вариант 20.
Чистовик.

Лист № 1

1) 1) $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{Z}$

$\left.\begin{matrix} a_2 = a_1 + d \\ a_1 \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right| \Rightarrow d \in \mathbb{Z}$

Прогрессия возрастает $\Rightarrow d > 0$

2) $S = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = (a_1 + 2d)5$

3) $\left.\begin{matrix} a_6 = a_1 + 5d \\ a_{11} = a_1 + 10d \end{matrix}\right| \Rightarrow a_6 a_{11} = a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2$

$\left.\begin{matrix} a_8 = a_1 + 7d \\ a_9 = a_1 + 8d \end{matrix}\right| \Rightarrow a_8 a_9 = a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2$

4) $\begin{cases} a_6 a_{11} > S + 15 \\ a_8 a_9 < S + 39 \end{cases}$; $\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > S + 15 \\ a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 < S + 39 \;|\cdot(-1) \end{cases}$;

$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > S + 15 \\ -a_1^2 - 15a_1 d - 56d^2 > -S - 39 \end{cases}$ "+" $-6d^2 > -24$

$d^2 < 4 \Rightarrow \begin{cases} d \in (-2; 2) \\ d \in \mathbb{Z} \\ d > 0 \end{cases} \Rightarrow d = 1$

5) Учитывая, что $d = 1$ получим:

$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 + 17 < S \\ a_1^2 + 15a_1 + 35 > S \\ S = 5a_1 + 10 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 15a_1 + 17 < 5a_1 + 10 \\ a_1^2 + 15a_1 + 35 > 5a_1 + 10 \end{cases}$;

$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \end{cases}$;

1. $a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$\frac{D}{4} = 25 - 7 = 18$

$a_1 = -5 \pm 3\sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{matrix} a_1 = -5 - 3\sqrt{2} \approx -9{,}2 \\ a_1 = -5 + 3\sqrt{2} \approx -0{,}8 \end{matrix}\right.$

Метод интервалов:

$+ \quad - \quad + \quad a_1$

$-5-3\sqrt{2} \quad -9 \quad -1 \quad -5+3\sqrt{2}$

$a_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_1 \in \{-9; -8; -7; \ldots; -1\}$

2. $a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1 + 5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -5$

6) Имеем: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

<u>Ответ</u>: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Чистовик.

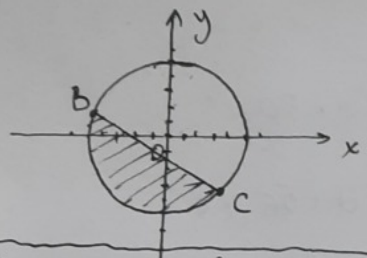
Лист №2

(3) $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,\,13)\end{cases}$

1) I Пусть $-4a-6b\ge 13$, тогда система примет вид:

$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le 13\end{cases}$

Первое уравнение задаёт ~~окружность~~ круг с центром в точке $O'(a;b)$ и $r=\sqrt{13}$. Второе уравнение показывает, что O' удалена от $O(0;0)$ на расстояние не более $\sqrt{13}$. Построим искомое множество точек* при условии, что $-4a-6b\ge 13$, т.е. все точки O' лежат ниже или на прямой $L: y=\frac{-4a-13}{6}$. Пусть прямая L пересекает $\omega(0;\ R=2\sqrt{13})$ в точках B и C



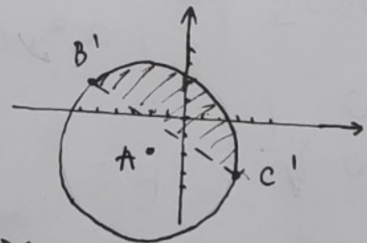
*искомое мн-во точек - точки круга $\omega(O';\ R=2\sqrt{13})$, лежащие ниже или на $y=\frac{-4x-13}{6}$

II Пусть $-4a-6b<13$, тогда система примет вид:

$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+4a+b^2+6b\le 0\end{cases}$; $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ (a+2)^2+(b+3)^2\le 13\end{cases}$

В данном случае второе уравнение показывает, что расстояние от точки $A(-2;-3)$ до $O'(a;b)$ не более $\sqrt{13}$, тогда искомое мн-во точек - точки ~~внутри и на~~ круга $\Omega(A;\ R=2\sqrt{13})$, лежащие выше $L: y=\frac{-4x-13}{6}$

Пусть прямая пересекает Ω в B' и C'



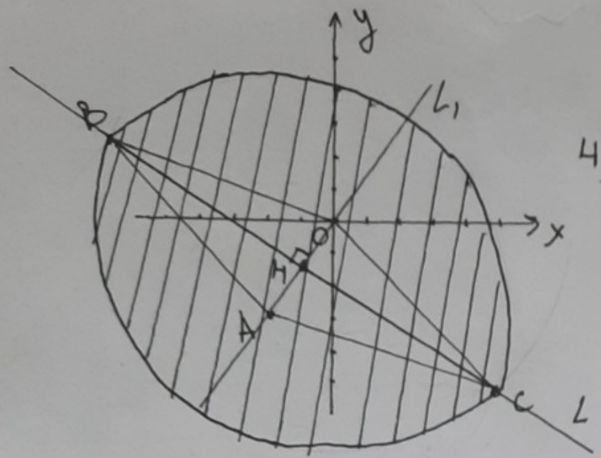
2) Найдем точки пересечения ω и Ω:

$\begin{cases}x^2+y^2=52\\ (x+2)^2+(y+3)^2=52\end{cases} \Rightarrow 2(2x+2)+3(2y+3)=0$

$4x+6y+13=0$

$y=\frac{-4x-13}{6}$ ⇒ точки пересечения лежат на L ⇒ раз $\omega\cap L$ в B и C, то и Ω пересекает в этих же точках.

3) Объединим 2 случая на одном рисунке:



Заштрихованная область и есть фигура М. Найдем ее площадь.

4) $BO=OC=AB=AC=2\sqrt{13}$
BC – общая $\Bigg| \Rightarrow \Delta BOC=\Delta ABC \Rightarrow$
O и A симм. отн. BC $\Rightarrow$
BC разбивает фигуру на 2 равные части! Найдем площадь $S'_н$ нижней $\Rightarrow$

5) Проведем через O прямую $L_1 \perp L$. $L_1 = k_1x+b_1$
$L = k_2x+b_2 = -\frac{2}{3}x-\frac{13}{6}$
$L_1 \perp L \Rightarrow k_1\cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_1\cdot\frac{2}{3}=1 \Rightarrow k_1=\frac{3}{2}$
$O \in L_1 \Rightarrow 0=\frac{3}{2}\cdot 0+b_1 \Rightarrow b_1=0$
$L_1: y=\frac{3}{2}x$

6) Пусть $L_1 \cap L = H$. Найдем координаты H
$\frac{3}{2}x = -\frac{2}{3}x-\frac{13}{6} \Rightarrow \begin{matrix} x=-1 \\ y=-\frac{3}{2} \end{matrix} \Rightarrow H\left(-1;-\frac{3}{2}\right)$
$OH=\sqrt{1+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

7) ΔBOH – п/у $\Rightarrow$ по т. Пифагора $BH=\frac{\sqrt{195}}{2}$
Пусть $\angle BOH = \angle HOC = \alpha$
$\left.\begin{matrix} \sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \cos\alpha = \frac{1}{4} \end{matrix}\right| \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{15}}{8} \Rightarrow \angle BOC = \arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}$

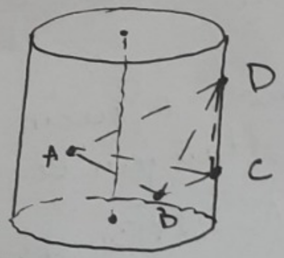
8) $S'_н = S'_{сектора} - S_{\Delta BOC} = \frac{\cancel{\pi} R^2\cdot 2\alpha}{2\cancel{\pi}} - \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{195}}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}}{2} =$
$= 26\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8} - \frac{13\sqrt{15}}{4}$
$S'_ф = 2S_н = 52\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8} - \frac{13\sqrt{15}}{2}$

Ответ: $52\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8} - \frac{13\sqrt{15}}{2}$

Чистовик.

Лист №4

(2)



21104456 (U113532 M1299129)

1) $x^2+y^2=52$

Черновик

$$y=\frac{-4x-13}{6}$$

$$x^2+\frac{16x^2+104x+169}{36}=52$$

$$6x^2+16x^2+104x+169-112=0$$

$$22x^2+104x+57=0$$

$$\frac{D}{4}=2704-1254=1450 \qquad 2\cdot29\cdot5^2$$

$$x=\frac{-52\pm5\sqrt{58}}{22}$$

$13\cdot4=52$, $52\cdot2=104$, $52\cdot6=112$, $169-112=57$, $52\cdot52=2704$, $57\cdot22=1254$, $2704-1254=1450$, $145:5=29$, $29\cdot2=58$

2) $(x+2)^2+(y+3)^2=52$

$$y=\frac{-4x-13}{6}$$

$$(x+2)^2+\quad 16$$

$$\frac{-4x-13}{6}+3=\frac{-4x-13+18}{6}=$$

$$=\frac{-4x+5}{6}$$

$52\cdot36=2572$ $\quad 36+16=52$ $\quad 2572$

$$52x^2+104x+169-2572=0$$

$$\begin{cases}x^2+y^2=52\\(x+2)^2+(y+3)^2=52\end{cases}$$

$$(x+2-x)(x+2+x)+(y+3-y)(y+3+y)=0$$

$$2(2x+2)+3(2y+3)=0$$

$$4x+4+6y+9=0$$

$$4x+6y+13=0$$

$$y=\frac{-4x-13}{6}$$

$$4x+6y+13=0$$

$$-4x+6y+13=0$$

$$y=\frac{-4x-13}{6}=\frac{4x-13}{6}$$

$$-4x-13=4x-13$$

$$8x \qquad b=0$$

$$\rho_1=\sqrt{2\cdot\frac{13^2}{8^2}}=\frac{13\sqrt2}{8}$$

$$y=\frac{2}{3}x+b$$

$$-\frac{2x}{3}-\frac{13}{6}=\frac{2}{3}x$$

$$\frac{4}{3}x=-\frac{13}{6}\,/\cdot6$$

$$8x=-13$$

$$x=-\frac{13}{8} \qquad y=-\frac{13}{8}$$

$$-3=-2\cdot\frac{2}{3}+b$$

$$-3+\frac{4}{3}=b$$

$$\frac{-9+4}{3}=\frac{-5}{3}=b$$

$$y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$$

$$y=-\frac{16}{3}-\frac{5}{3}=\frac{-21}{3}$$

$$\frac{2}{3}x-\frac{10}{6}=-\frac{2}{3}x-\frac{13}{6}$$

$$\frac{4}{3}x=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=-\frac{8}{3}$$

21104456 (U113532 M1299129)

Черновик.

$$\rho = \sqrt{\left(-2+\frac{8}{3}\right)^2 \left(-3+\frac{21}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{144}{9}} = \frac{\sqrt{148}}{3}$$

$$\frac{-6+8}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{-9+21}{3} = \frac{12}{3}$$

$\Delta ABC = \Delta BOC$ по 3-м сторонам $\Rightarrow$

BC разбивает пополам

$y = \cancel{\frac{3}{2}x}$ $\quad y = -\frac{2}{3}x - \frac{13}{6}$

$x = -2$

$y = -3$

$3y = 2x$

$y = \frac{3}{2}x$

$k_1 \cdot k_2 = -1$

$+\frac{2}{3} \cdot k_2 = 1$

$k_2 = \frac{3}{2}$

$3x = 2y$

$\frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}x$

$$\frac{3}{2}x = -\frac{2}{3}x - \frac{13}{6}$$

$$\frac{13}{6}x = -\frac{13}{6} \Rightarrow x = -1$$

$$y = -\frac{3}{2}$$

$52 : 2 = 26$

$52 \times 4 = 208$, $208 - 13 = 195$

$195 : 5 = 39$, $39 : 3 = 13$

$195 = 5 \cdot 3 \cdot 13$

$$\rho = \sqrt{1+\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2} = OH$$

$$BH^2 = BO^2 - OH^2 = 52 - \frac{13}{4} = \frac{195}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{195}}{2} = BH$$

$$S_{\Delta BOC} = \frac{\sqrt{195}}{2} \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{13\sqrt{15}}{4}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{195}}{2 \cdot 2\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{2 \cdot 2\sqrt{13}} = \frac{1}{4}$$

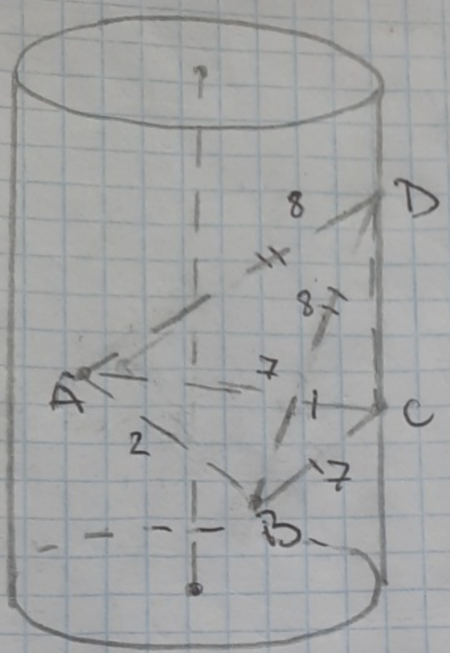
$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2 \cdot \sqrt{15}}{16} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

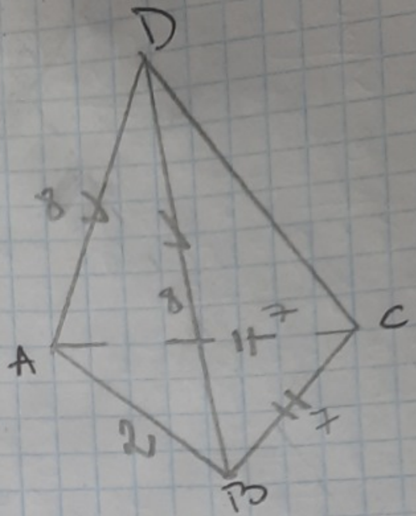
$$S_c = \frac{\pi R^2 \alpha}{2\pi} = \frac{52 \cdot \arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}}{2} = 26 \arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$S_{ф.} = 2\left(26 \arcsin\frac{\sqrt{15}}{8} - \frac{13\sqrt{15}}{4}\right) = 52 \arcsin\frac{\sqrt{15}}{8} - \frac{13\sqrt{15}}{2}$$

21104456 (U113532 M1299129)

Черновик.





1. Черновик.

$S' = \frac{2a_1+4d}{2}\cdot 5 = 5(a_1+2d)$

$a_6 = a_1+5d \quad a_8 = a_1+7d$

$a_6 a_{11} > S+15 \quad a_{11} = a_1+10d \quad a_9 = a_1+8d$

$(a_1+5d)(a_1+10d) > S+15$

$a_1^2 + 5a_1d + 10a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15$

$a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 \cancel{-5a_1-10d-15>0}$
$> S+15$

$a_1^2 + 7a_1d + 8a_1d + 56d^2 < S+39$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 < S+39 \\ -a_1^2 - 15a_1d - 50d^2 < -S-15 \end{cases}$$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4 \Rightarrow d \in (-2; 2)$

(a_n) - возраст. $\Rightarrow d = 1$

$a_1, \ldots \in \mathbb{Z}$

$39 - 15 = 24$

$56 - 39 = 17$

$50 - 15 = 35$

$25 - 7 = 18$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 + 56 < S+39 \\ a_1^2 + 15a_1 + 50 > S+15 \end{cases}; \begin{cases} a_1^2 + 15a_1 + 17 < S \\ a_1^2 + 15a_1 + 35 > S \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 + 17 < 5a_1 + 10 \\ a_1^2 + 15a_1 + 35 > 5a_1 + 10 \end{cases}; \begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \end{cases}$$

$2\cdot 5$

$\frac{D}{4} = 25 - 7 = 18$

$a_1 = -5 \pm 3\sqrt{2} \Rightarrow a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$

$(a_1+5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -5$

$a_1 \in \mathbb{Z}$

$3\sqrt{2} \vee 5$

$\sqrt{18} < \sqrt{25}$

$4,$

$1,4 \times 3 = 4,2$

$5,0 - 4,2 = 0,8$

$-5-3\sqrt{2} \quad -5+3\sqrt{2} \quad 0 \quad a_1$

$\approx -9,2 \quad \approx -0,8$

$a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; \cancel{-5}; -4; -3; -2; -1\}$

Черновик

$a_1 = -1$

$S' = 5(-1+2) = 5$

$(\underbrace{-1+5}_{4})(\underbrace{-1+10}_{9}) = 36 > 20$

$(\underbrace{-1+7}_{6})(\underbrace{-1+8}_{7}) = 42 < 44$

$a_1 = -9$

$S' = 5(-9+2) = -35$

$(\underbrace{-9+5}_{-4})(\underbrace{-9+10}_{1}) = 4 > -20$

$(\underbrace{-9+7}_{-2})(\underbrace{-9+8}_{-1}) = 2 < 4$

$+\begin{matrix}39\\ \cancel{20}\end{matrix}$

$a_1 = 0 \quad S' = 10$

$5 \cdot 10 = 50 > 25$

$7 \cdot 8 = 56 > 49$

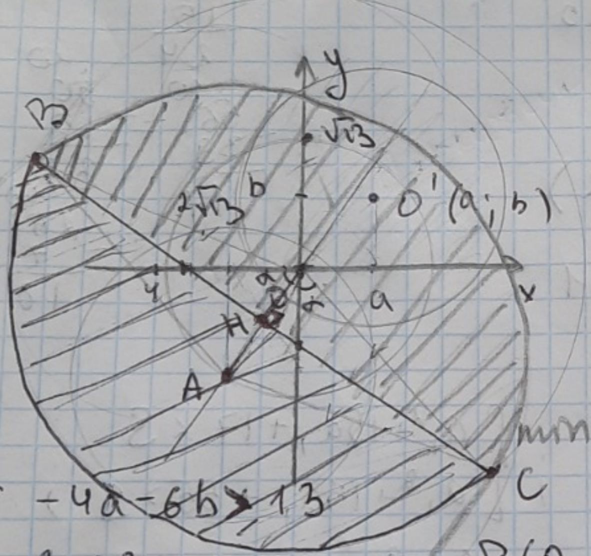
$a = -10 \quad 5 \cdot 0 = 0 < 5$

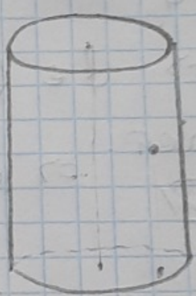
$S' = -15$

$0 > \cancel{-45}$ 0 – нет

$+2 \cdot 3 = 6$

(3) $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 13 \\ a^2 + b^2 \le \min(-4a-6b, 13) \end{cases}$





$\min(-4a-6b, 13)$

I $\;-4a-6b > 13$

$a^2 + b^2 \le 13$

$\rho^2(O; O') \le R^2$

Получаем $\omega(O; R = 2\sqrt{13})$

$a = 0$

$b = \sqrt{13}$

$-4a - 6b = -6\sqrt{13}$

$-4a - 6b \ge 13$

$b \cdot 6 \le -4a - 13$

$b \le \dfrac{-4a-13}{6}$

$-\dfrac{13}{6} = -2\dfrac{1}{6}$

$-\dfrac{13}{4} = -3\dfrac{1}{4}$

$a = -\cancel{5}$

$b = 1$

$a = 1$

$b = 1$

$20 - 6 = 14 \ge 13$

$\rho(O; O') = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

II $\;-4a-6b < 13$

$a^2 + b^2 \le -4a - 6b$

$a^2 + 4a + 4 + b^2 + 6b + 9 - 13 \le 0$

$(a+2)^2 + (b+3)^2 \le 13$

$\rho^2(A; O') \le 13$

$A(-2; -3)$

Получаем $\Omega(A; R = 2\sqrt{13})$

21104456 (U113532 M1299129)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104456**

ID профиля: **113532**

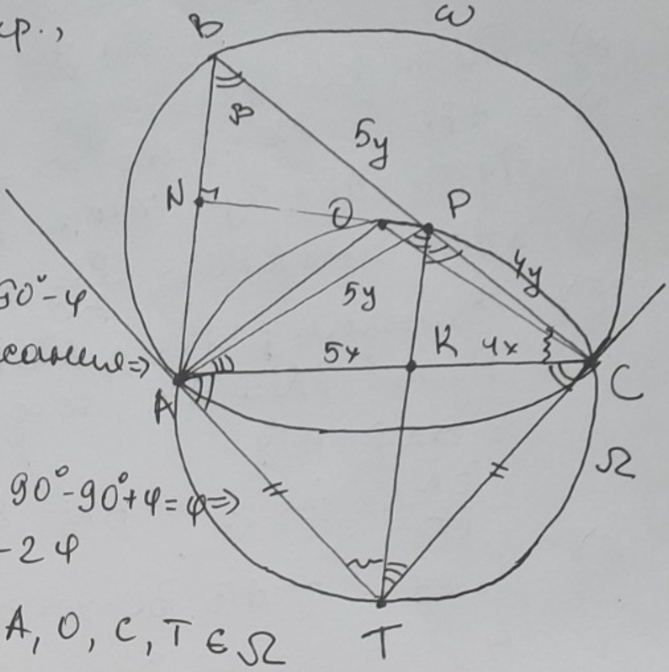
Вариант 20

Вариант №20.
Чистовик.

Лист №1

6

а) 1) Докажем, что $T \in \Omega$ - окр., проходящей через A, O, C



Пусть $\angle ATC = 2\varphi$

$AT = TC$ как отр. кас. $\Rightarrow$

$\triangle ATC$ - р/б $\Rightarrow \angle CAT = \angle ACT = 90^\circ - \varphi$

OC, OA - радиусы в точку касания $\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} OA \perp AT \\ OC \perp CT \\ OA = OC \end{array}\right| \Rightarrow \triangle AOC$ - р/б

$\angle OAC = \angle OCA = 90^\circ - 90^\circ + \varphi = \varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AOC = 180^\circ - 2\varphi$

$\left.\begin{array}{l} \angle AOC + \angle ATC = 180^\circ \\ \angle OAT + \angle OCT = 180^\circ \end{array}\right| \Rightarrow A, O, C, T \in \Omega$

2) $\angle AOC, \angle ABC$ - центр. и впис. соответственно, опирающ. на $\overset{\frown}{AC} \Rightarrow \angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle TAC = \beta$

3) ~~По т. об угле между кас. и хордой~~

$\left.\begin{array}{l} \angle PCA \text{ и } \angle ATP \\ \angle PTC \text{ и } \angle PAC \end{array}\right\}$ оп. на одну дугу $\Rightarrow$ равны

4) $ATCP$ - вписанный $\Rightarrow \angle APC = 180^\circ - \angle ATC = 180^\circ - 2\varphi$

$AT = TC$ - равные хорды $\Rightarrow \angle APT = \angle TPC = \frac{\angle APC}{2} = 90^\circ - \varphi = \beta$

5) $\triangle ABC \sim \triangle PKC$ по 2-м углам $\Rightarrow \left(\frac{KC}{AC}\right)^2 = \frac{S_{\triangle PKC}}{S_{\triangle ABC}}$

6) $\frac{KC}{AC} = \frac{S_{\triangle PKC}}{S_{\triangle APK} + S_{\triangle PKC}} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \Rightarrow$

7) $\frac{S_{\triangle PKC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{16}{81} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{81 \cdot 8}{162} = 40{,}5$

Ответ: 40,5

Чистовик. Лист №2

б) 1) $\angle ABC = \beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \Rightarrow tg\,\beta = \frac{1}{2},\ \beta \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$

$\frac{1}{\cos^2\beta} = 1 + tg^2\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

2) Пусть $KC = 4x$, тогда $AK = \frac{10}{8}KC = 5x$

3) $\triangle APC$: PK – бисс. $\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{5x}{4x} = \frac{5}{4}$

Пусть $AP = 5y$, тогда $PC = 4y$

4) $\triangle ABC \sim \triangle KPC \Rightarrow \frac{PC}{BC} = \frac{4}{9} \Rightarrow BC = 9y \Rightarrow BP = 5y$

5) Заметим, что $\triangle ABP$ – р/б

Пусть $PN \perp AB$, тогда $BN = NA = \frac{1}{2}AB$

$\triangle BNP$ – п/у:

$\frac{BN}{PB} = \cos\beta \Rightarrow BN = 5y \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}\,y \Rightarrow AB = 4\sqrt{5}\,y$

6) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5}\,y \cdot 9y \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{81}{2}$

$4y^2 = 9 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \Rightarrow BC = \frac{27}{2}$

$AB = 4\sqrt{5} \cdot \frac{3}{2} = 6\sqrt{5}$

7) $\triangle ABC$: по т. косинусов

$AC^2 = 180 + \frac{729}{4} - 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 6\sqrt{5} \cdot \frac{27}{2} = 180 + \frac{729}{4} - 324 =$

$= \frac{729 - 576}{4} = \frac{153}{4} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{153}}{2}$

Ответ: $\frac{\sqrt{153}}{2}$

Черновик. $a = 2^{\alpha_1} \cdot p \cdot 5^{\beta_1}$

Лист №3

Чистовик.

(4) НОД $(a; b; c) = 10$
НОК $(a; b; c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$

1) Заметим, что каждое из чисел для выполнения условия должно ~~содержать~~ быть вида $x = 10 \cdot 2^{\alpha}$ или $y = 10 \cdot 5^{\beta}$, $0 \le \alpha \le 16$, $0 \le \beta \le 15$, причем одно из чисел содержит 5^{16}, а другое - 2^{17}.

2) Рассмотрим случаи:

I $a = 2^{\alpha_1+1} \cdot 5$
$b = 2^{\alpha_2+1} \cdot 5$ Условно назовем его „2 двойки и 1 пятерка"
$c = 2 \cdot 5^{\alpha_3+1}$

1. α_3 однозначно $= 15$

2. $\left[\begin{array}{l}\alpha_1 = 16\\ \alpha_2 = 16\end{array}\right.$ Пусть $\alpha_1 = 16$, тогда на место α_2 можно поставить любое из 17 чисел. Аналогично для $\alpha_2 = 16$

Всего: $2 \cdot 1 \cdot 17 = 34$
Но 5^{α_3} может стоять в любом из a, b, c $\Big|\Rightarrow$ итого: $34 \cdot 3 = 102$ тройки $(a; b; c)$

II Аналогичные вычисления для случаев, где 2 пятерки и 1 двойка

3) Итого: $102 \cdot 2 = 204$

Ответ: 204

21104456 (U113532 M1299130)

Чистовик.

Лист №4

(5) I ~~$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) =$~~ Пусть $x-4=m$, $5x-26=n$

ОДЗ: $x > 5,2$; $x \neq 5,4$

$$\text{I}\ \begin{cases} \log_{\sqrt{2m}} m = \log_{\sqrt{n}} 2m \\ \log_{m^2} n = \log_{\sqrt{n}} 2m + 1 \end{cases}$$

$$\cancel{2} \log_{2m} m = \cancel{2} \log_n 2m$$

$$\log_{2m} m \cdot \log_{2m} n = 1$$

$$\frac{1}{2} \log_m n = 2 \log_n 2m + 1$$

$$4 \log_n 2m + 2 - \frac{1}{\log_n m} = 0$$

$$4 \log_n m + 4 \log_n 2 + 2 - \frac{1}{\log_n m} = 0$$

Пусть $\log_n m = t$

$$4t^2 + 4\log(2n^2)t - 1 = 0 \ \ldots$$

Угадаем возможные x:

$x = 6$

Ответ: $x = 6$

Черновик. ОДЗ:

④ $\log_{\sqrt{2(x-4)}}(x-4)$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2(x-4))$

$x-4=m$

$5x-26=n$

$x>4$

$\boxed{x>\frac{26}{5}=5,2}$

$(x-4)^2\neq 1$

$x-4\neq 1$

$x\neq 5$

$5x-26\neq 1$

$\boxed{x\neq\frac{27}{5}=5,4}$

$2(x-4)\neq 1$

$x-4\neq 0,5$

$x\neq 4,5$

$2\,\frac{1}{2}\log_{2m}m$

$\frac{1}{2}\log_m n$

$2\log_n 2m$

$\mathrm{I}\;2\log_{2m}m=\frac{1}{2}\log_m n$

$4\log_{2m}m=\log_m n$

$\frac{1}{\cancel{\log_{2m}m}}\;\frac{1}{\log_n 2m}=\log_m n$

$\frac{1}{2}\log_m n=2\log_n 2m+1$

$\frac{1}{2\log_n m}=2\log_n m+\log_n 4n$

$t^2+\log_n 4n\,t-1=0$

21104456 (U113532 M1299130)

Черновик.

I $\log_{\sqrt{2(x-4)}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\frac{1}{\log_{x-4}\sqrt{2(x-4)}} = \frac{2}{\log_{x-4}2(x-4)} = \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$

$4 = \log_{x-4}(5x-26)\cdot(\log_{x-4}2+1)$

$\log_{\sqrt{\cancel{2x-8}}}(x-4) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$2\log_{2x-8}(x-4) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)+1 = 2\log_{5x-26}(2x-8)+1$

$\log_{2x-8}(x-4) - \frac{1}{\log_{2x-8}(5x-26)} = \log_{2x-8}(x-4)\cdot\log_{2x-8}(5x-26)-1 =$

$= \log_{2x-8}(5x-26)$

$\log_{2x-8}(x-4)\cdot\log_{2x-8}(5x-26) = \log_{2x-8}(5x-26)(2x-8)$

$\frac{\lg m\cdot\lg n}{\lg^2 2m} = \frac{\lg m+\lg n}{\cancel{\lg 2m}}$

$2x-8=4$

$2x=12$

$x=6$

$\lg m\cdot\lg n = \lg m\cdot\lg 2m + \lg n\cdot\lg 2m$

$12-4=8$

27×27: 189, 54, 729

$60 - 26 = 34$

$\lg$

$2x-8=16$

$x=12$

$\log_2 2$ $\log_4 4$ $\log_2 4$ 1 1

$\log_4 8$

21104456 (U113532 M1299130)

$\log_{x-4}^2(x-4) = 2\log_{x-4}(5x-26)$

$4 = \log_{x-4}(5x-26)\cdot$ ...

Черновик

I $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$\log_{2x-8}(x-4) = \log_{5x-26}(2x-8)$ $\quad \log_{2x-8}(x-4) =$

$\log_{2x-8}(x-4)\cdot\log_{2x-8}(5x-26) = 1$

$\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26) - 2\log_{5x-26}(2x-8) = 1$

~~$\log_{x-4}\sqrt{5x-26} - \log_{2x-8}\sqrt{5x-26} = 1$~~

$\log_{x-4}\sqrt{5x-26} = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) - 1$

$\frac{1}{\log_{\sqrt{5x-26}} x-4} = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) - 1$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)\cdot\log_{\sqrt{5x-26}}(x-4) - \log_{\sqrt{5x-26}}(x-4) = 1$

$(\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) - 1)\log_{\sqrt{5x-26}}(x-4) = 1$

$\log_{x-4}\sqrt{5x-26} = \log_{\sqrt{5x-26}}\frac{2x-8}{\sqrt{5x-26}}$

$1 = \log_{\sqrt{5x-26}}\frac{2x-8}{\sqrt{5x-26}}\cdot\log_{\sqrt{5x-26}}(x-4)$ $\quad PK = \frac{20y^2 \cancel{\cos}\sin\varphi}{9y}$

$S_{APK} = 10$ $\quad \frac{AK}{KC} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

$S_{CPK} = 8$

$\angle AOC = 180 - 2\varphi$

AOC - вписан

$AT = TC \Rightarrow \angle APK = \angle KPC$

$\frac{AP}{PC} = \frac{5}{4}$

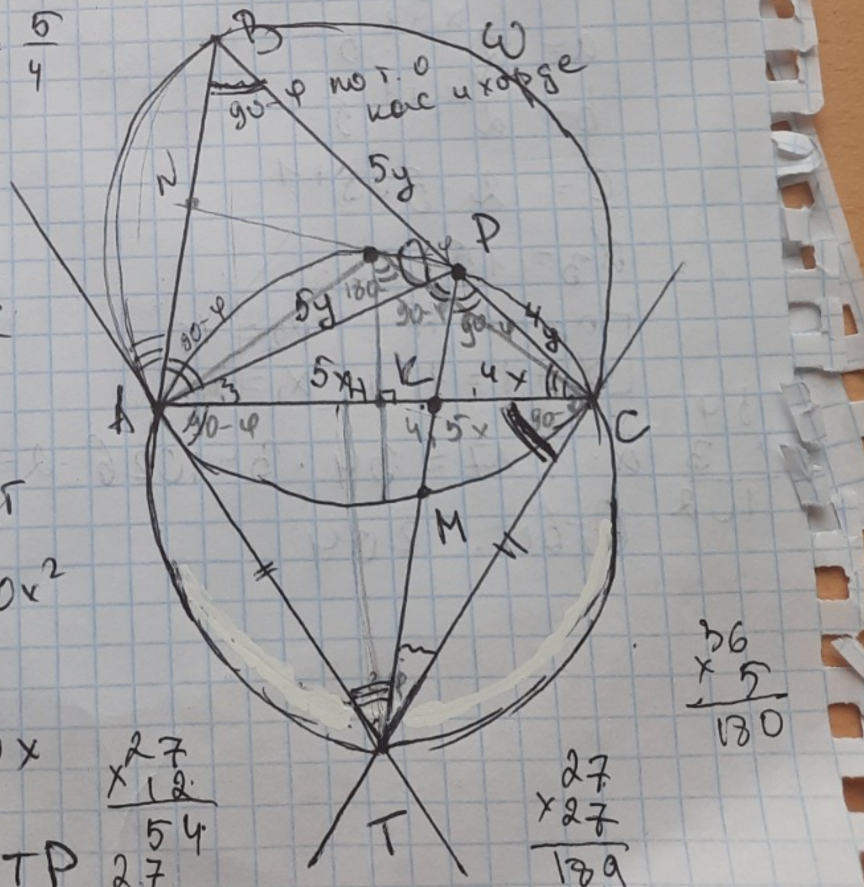
$5x\cdot 4x = PK\cdot KT$

$PK\cdot KT = 20x^2$

$PK = \sqrt{20y^2 - 20x^2} =$.

$S_{APC} = 18 = \frac{1}{2}h\cdot 9x$

$TC^2 = TM\cdot TP$



27×12: 54, 27, 324

27×27: 189, 54, 729

$36\times5 = 180$

Черновик.

(4) $НОД(a; b; c) = 10 = 2 \cdot 5$

$НОК(a; b; c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$

$НОД(p; q; r) = 1$

$p, q, r \neq 2, 5$ – ые

$a = 2^{\alpha_1} \cdot p \cdot 5^{\beta_1}$

$b = \cancel{10 \cdot q}\ 2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2} \cdot q$

$c = \cancel{10} \cdot 2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3} \cdot r$

$\Rightarrow a = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}$

8, 12, 15

$8 = 2^3$

$12 = 2^2 \cdot 3$

$30 = 3 \cdot 5 \cdot 2$

$НОК = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ – наим. общее кратное

НОД – наиб. об. делитель

БОО. $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq 17$

$1 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3 \leq 14$

$\alpha_3 =$

$a = 2 \cdot 5 \cdot [2^{\alpha_1} | 5^{\beta_1}]$

$b = 2 \cdot 5 \cdot [2^{\alpha_2} | 5^{\beta_2}]$

$c = 2 \cdot 5 \cdot [2^{\alpha_3} | 5^{\beta_3}]$

$8 = 2^3$

$12 = 2^3 \cdot 3$ $\Rightarrow НОД = 2$

$30 = 3 \cdot 5 \cdot 2$

$a = 2^{\alpha_1 + 1} \cdot 5$

$b = 2^{\alpha_2 + 1} \cdot 5$

$c = 2 \cdot 5^{\alpha_3 + 1}$

$\alpha_3 = 15$

$\left[\begin{array}{l} \alpha_2 + 1 = 17 \\ \alpha_1 + 1 = 17 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} \alpha_2 = 16 \\ \alpha_1 = 16 \end{array}\right.$

$2 \cdot 1 \cdot 17 = 34 \cdot 3 = 102 \cdot 2 = 204$

Ответ: 204

$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 3 \\ \hline 102 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 729 & 4 \\ \hline 4 & 182,25 \\ 32 & \\ 32 & \\ 9 & \\ 8 & \\ 10 & \end{array}$

$\begin{array}{r} 362,25 \\ -\ 324,00 \\ \hline 38,25 \end{array}$

$38\frac{1}{4}$

$\begin{array}{r} 38 \\ \times\ 4 \\ \hline 152 \end{array}$

$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 3 \\ \hline 102 \end{array}$

21104456 (U113532 M1299130)

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\beta = 405 + \frac{6561}{16} - \cancel{2} \cdot 9\sqrt{\cancel{5}} \cdot \frac{81}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{5}}}$$

$$= \quad AC = \frac{9\sqrt{305}}{4}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times\ 5 \\ \hline 405 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 81 \\ \times\ 81 \\ \hline 81 \\ 648\ \\ \hline 6561 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times\ 9 \\ \hline 729 \\ +\ 405 \\ \hline 1134 \\ \times\ 16 \\ \hline 6804 \\ 1134\ \\ \hline 18144 \\ +\ 6561 \\ \hline 24705 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 24705 & 5 \\ \cline{2-2} 20\ \ \ \ & 4941 \\ \hline 47\ \ \ & \\ 45\ \ \ & \\ \hline 20\ \ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4941 & 9 \\ \cline{2-2} 45\ \ \ & 549 \\ \hline 44\ \ & \\ 36\ \ & \\ \hline 81\ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 549 & 9 \\ \cline{2-2} 54\ & 61 \\ \hline 9 & \end{array}$$

$\triangle KPC \sim \triangle AKT \Rightarrow \frac{AT}{PC} = \frac{AK}{PK}$

$\triangle KPC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{KPC}}{S} = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$

$81 \,|\, 2$, $40{,}5$; $\frac{8}{1}$

$$\boxed{S = \frac{81 \cdot 8}{\cancel{16}\ 2} = 40{,}5}$$

2) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

$\operatorname{tg}(90^\circ - \varphi) = \frac{1}{2}$

$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}$

$1 + \operatorname{tg}^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta}$

$1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2\beta}$

$\cos^2\beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin^2\beta = \frac{1}{5}$

$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\triangle OHC: \frac{HC}{R} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow R = \sqrt{5}\, HC = \sqrt{5} \cdot 4{,}5x$

$\frac{AC}{\sin\beta} = 2R \Rightarrow AC = 2R\sin\beta = \sqrt{5} \cdot 4{,}5x \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 9x$

$\frac{h}{AB} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow h = \frac{AB}{\sqrt{5}}$

$40{,}5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{\sqrt{5}} \cdot BC = \frac{AB \cdot BC}{2\sqrt{5}} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{}$

$AB \cdot BC = 81\sqrt{5}$

$\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R} = S$ $\quad \frac{81\sqrt{5} \cdot 9x}{2\sqrt{5} \cdot 9x}$

$4{,}5x$ $\quad \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 40{,}5$

$324 - 180 = 144$; $144 \cdot 4 = 576$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\frac{BN}{5y} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow BN = \frac{10y}{\sqrt{5}}$, $AB = \frac{20y}{\sqrt{5}}$

81 $\quad 729 - 576 = 153$

$\cancel{AC^2}$ $\quad \frac{20y}{\sqrt{5}} \cdot 9y = 81\sqrt{5}$

$180y = 81 \cdot 5$

$y = \frac{9\ \cancel{81} \cdot \cancel{5}}{\cancel{9} \cdot 2 \cdot \cancel{10}\ 2} = \frac{9}{4} \Rightarrow BC = \frac{81}{4}$

$AB = \frac{\cancel{20}\ \sqrt{5}\ \cancel{5} \cdot \frac{9}{\cancel{4}}}{\cancel{\sqrt{5}}} = \cancel{45}\ 9\sqrt{5}$

21104456 (U113532 M1299130)