Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104419**

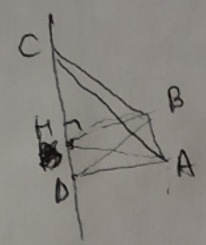
ID профиля: **156379**

Вариант 20

Чистовик

(2) ~~С~~ $C, D \in$ боковой поверхности

$CD \parallel$ оси цилиндра



Проведём перпендикуляры из точек A и B к CD – BH и AH (Они попадут в одну точку т.к. $\triangle ACD = \triangle BCD$ по 3 сторонам)

$CD \parallel$ оси $\Rightarrow CD \perp$ (плоскости основания цилиндра)

$\left.\begin{array}{l} BH \perp CD \text{ (по постр)} \\ AH \perp CD \text{ (по постр)} \end{array}\right\} \Rightarrow (BHA) \parallel$ плоскости цилиндра $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ радиус ~~вписан~~ описанной вокруг $\triangle BHA$ окружности равен радиусу цилиндра

По Th sin:

$\dfrac{AB}{\sin\angle BHA} = 2R \Rightarrow R$ будет min, когда $\dfrac{AB}{\sin\angle BHA}$ – min, AB постоянная $\Rightarrow$

$\sin\angle BHA$ – должен быть max $\Rightarrow \angle BHA = 90° \Rightarrow$ по Th Пифагора $BH = AH = \sqrt{2}$

$(BH = AH$ по равенству $\triangle ACD$ и $\triangle BCD) \Rightarrow$

$CH = \sqrt{BC^2 - HB^2} = \sqrt{47}$ (по Th Пифагора) $\Rightarrow CD = \sqrt{47} + \sqrt{62}$

$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{62}$

Ответ: $\sqrt{47} + \sqrt{62} = CD$

(1) a – первый член прогрессии d – число, на которое она возрастает

$a_6 = a + 5d$

$a_{11} = a + 10d$

$a_8 = a + 7d$

$a_9 = a + 8d$

$S = \dfrac{a + a + 4d}{2} \cdot 5 = 5a + 10d$

(1) $a_6 \cdot a_{11} > S + 15$

$(a+5d)(a+10d) > S + 15$

$a^2 + 15ad + 50d^2 > S + 15$

(2) $a_8 \cdot a_9 < S + 39$

$(a+7d)(a+8d) < S + 39$

$a^2 + 15ad + 56d^2 < S + 39$

$\boxed{1}$

21104419 (U156379 M1298893)

$~~5+15<a~~$ $5+15<a^2+50d^2+15ad \Rightarrow 5+15+6d^2<a^2+50ad+15ad<5+39 \Rightarrow$

$5+15+6d^2<5+39$

$\Rightarrow 6d^2<24$

$d^2<4$

$0<d<2$ (т.к прогрессия возраст.)

Чистовик

~~Значит при $d\in(0,2)$ и выполнении первого (1), выполняется и вопрос (2)~~

$a^2+15ad+50d^2>5+15$

$a^2+15ad+50d^2-5a-10d-15>0$

Задача сводится к нахождению такого параметра a, что данное неравенство имеет решение на промежутке от $(0;2)$ относительно d

$50d^2+d(15a-10)+a^2-5a-15>0$

Это парабола, чтобы была решение на этом отрезке, достаточно, чтобы неравенство было >0 на концах отрезка, т.к ветви направлены вверх

$$\left[\begin{array}{l} f(0)>0, \\ f(2)>0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0+0+a^2-5a-15>0, \\ 200+30a-20+a^2-5a-15>0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a^2-5a-15>0, \\ a^2+25a+165>0; \end{array}\right.$$

$a^2-5a-15=0$

$D=25+4\cdot15=85$

$a=\frac{5\pm\sqrt{85}}{2}$

$a^2+25a+165>0$

$D=625-4\cdot165=625-660=-35\Rightarrow$

при любом a, $a^2+25a+165>0$

$\frac{5-\sqrt{85}}{2}$ $\frac{5+\sqrt{85}}{2}$

2

21104419 (U156379 M1298893)

$\boxed{\text{Чистовик}}$

~~По усл~~ $\cancel{d\in(0,2)}$,

Чтобы ~~и~~ выполнялось ~~оба~~ второе неравенство $d \in (0,2)$)

Все члены прогрессии – целые числа $\Rightarrow$ a – целое и d – целое
(иначе $a+d$ – нецелое)

$d \in (0,2) \Rightarrow d=1$ (единственное целое число, которое удовлетворяет)

$$a^2+50\cdot1+15\cdot a\cdot 1>5a+10\cdot1+15$$

$$a^2+10a+25>0$$

$$(a+5)^2>0 \Rightarrow a\neq -5$$

~~Ответ~~ $\cancel{a\in(-\infty,-5)\cup(-5,+\infty)}$

$$(a+7)(a+8)<5a+10+39$$

$$a^2+15a+56<5a+49$$

$$a^2+10a+7<0$$

~~$D=100$~~ $a^2+10a+7=0$

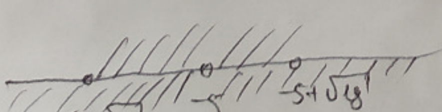
$$\frac{1}{4}D=25-7=18$$

~~$a=-5+\sqrt{18};\ -5-\sqrt{18}$~~

$\sqrt{18}>4$

$$a=-5-\sqrt{18}$$

$$a=-5+\sqrt{18}$$



a – может принимать любое целое значение в промежутках: $(-5-\sqrt{18};-5)\cup(-5;-5+\sqrt{18})$

$$\boxed{a=-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1}$$

Ответ:

$\boxed{3}$

21104419 (U156379 M1298893)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104419**

ID профиля: **156379**

Вариант 20

$\boxed{\text{Чистовик}}$

(5) Пусть два из этих чисел равны a, а третье $a+1$, тогда:

$$a\cdot a\cdot(a+1) = 2\log_{(2x-8)}(x-4)\cdot\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)\cdot 2\log_{(5x-26)}(2x-8) =$$

$$= 2 \quad (\text{ОДЗ}: x > 5{,}2)$$

$a^3+a^2-2=0$

$(a-1)(a^2+2a+2)=0$

$a=1$ или $(a+1)^2+1=0$ (нет решен)

Значит два числа из них равны 1

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1$

$2x-8=(x-4)^2$

$(x-4)^2-2(x-4)=0$

$x-4=0$ или $x-6=0$

$x=4$ (не уд ОДЗ) $x=6$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)=1$

$x^2-8x+16=5x-26$

$(x-6)(x-7)=0$

$x=6$ или $x=7$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1$

$5x-26=4x^2-32x+64$

$4x^2-37x+90=0$

$D=37^2-4\cdot 90\cdot 4=$

$37^2-36\cdot 40=1369-1440<0$

$\Rightarrow$ нет решен

Единственное подходящее значение $x=6$

Проверка:

$\log_{\sqrt{12-8}}(6-4)=1$

$\cancel{\log 8}$

$\log_{(6-2)^2}(6\cdot 5-26)=1$

$\log_{\sqrt{30-26}}(12-8)=2$

Ответ: $x=6$

$\boxed{1}$

21104419 (U156379 M1298894)

чистовик

(4) $НОК(a, b, c) = 10$

$НОД(a,b,c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$ } => при ~~представлении~~ разложении чисел a, b, c на простые множители у каких-то чисел обязательно встретятся $2^{17}, 5^{16}, 2, 5$, при чём $5, 2$ – минимальная степень у a, b, c; $2^{17}, 5^{16}$ – максимальная

Представим a, b, c в виде:

$2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2}$; $2^{\alpha_3} \cdot 5^{\alpha_4}$, 2^{α_5}; 2^{α_6} – всего 6 мест для степеней, ~~и~~ у нас есть 4 обязательные степени => какие-то 2 обязательно встретятся ~~в~~

Если встретились $2^{17} \cdot 5^{16}$, а 2 и 5 в разных местах

$(2^{17} \cdot 5^{16}; 2^{\alpha_1} \cdot 5, 2 \cdot 5^{\alpha_2})$

$\alpha_1 \in [2; 16]$, $\alpha_2 \in [2, 15]$ } => кол-во случаев $\underset{\text{число перестановок}}{6} \cdot 16 \cdot 15 = 240 \cdot 6$

Аналогично для остальных подобных случаев (их всего три $2^{17} \cdot 5^{16}$; $2^{17} \cdot 5$, $5^{16} \cdot 2$)

Всего таких случаев: $240 \cdot 6 \cdot 3$

Если ~~дв~~ два числа состоят из обязательных (из $2^{17}, 2, 5^{16}, 5$):

$(2^{17} \cdot 5^{16}; 2 \cdot 5; 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2})$

$(2^{17} \cdot 5; 2 \cdot 5^{16}; 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2})$

$\alpha_1 \in [2; 16]$

$\alpha_2 \in [2, 15]$ } => таких случаев: $2 \cdot 15 \cdot 16 \cdot \underset{\text{число перестановок}}{6}$

~~Для~~ ~~Теперь~~ ~~случаи, где~~ ~~обязательные~~

Числа из обязательных степеней:

$2^{17} \cdot 5^{16}$

$2 \cdot 5$

$5^{16} \cdot 2$

$5 \cdot 2^{17}$

Возможных различных троек: $C_4^3 = 4 \cdot \underset{\text{число перестановок}}{6}$

(2)

21104419 (U156379 M1298894)

Теперь рассмотрим случаи, когда обязательные числа повторяются, (только они могут повторяться, иначе НОД $(a,b,c)>10$, или НОК $< 2^{14}\cdot 5^{16}$)

Возможные повторные случаи:

$(2^{14}\cdot 5^{16}, 2\cdot 5, 2\cdot 5)\cdot 3$ — кол-во перестановок

$(2^{14}\cdot 5^{16}, 2^{14}\cdot 5^{16}, 2\cdot 5)\cdot 3$ — кол-во перестановок

$(2\cdot 5^{16}; 5\cdot 2^{17}, 5\cdot 2^{17})$

$(2\cdot 5^{16}; 2\cdot 5^{16}, 5\cdot 2^{17})$

$\Rightarrow$ всего 12 случаев

Итого троек $3\cdot 6\cdot 16\cdot 15 + 2\cdot 15\cdot 16\cdot 6 + 4\cdot 6 + 12 =$

$\cancel{32}\ \overset{30}{\cancel{18}}\cdot 240 + 36 = \cancel{18\,242 \ldots 4\,336}$

7236

$240 \times 30 = 7200$

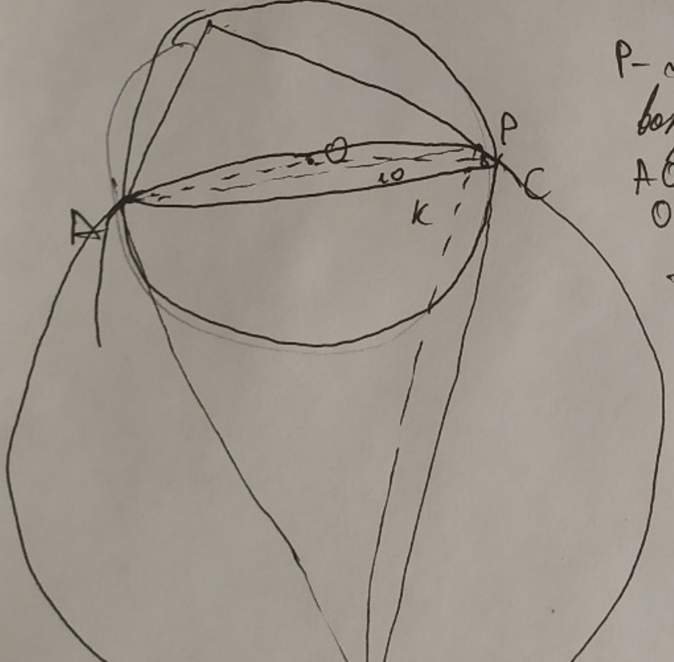
Ответ: ~~4336~~ 7236

Пояснение: обязательные числа — числа состоящие из $2^{17}, 2, 5, 5^{16}$

$[2^{17}; 2]\cdot[5^{16}; 5]$

~~6~~

6



P — лежит на окружности опис. вокруг AOC

$AO \perp AT$, $OC \perp AT$ $\Rightarrow$ AOCT — вписанный $\Rightarrow$

T — тоже лежит на этой окружности;

$\angle OAT = 90^\circ \Rightarrow$ OT — диаметр

Чистовик