Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104392**

ID профиля: **329254**

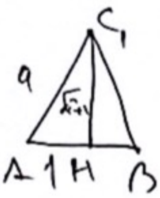
Вариант 20

(2)

Чистовик

C_1 это

$BC_1 = a$ · $S_{ABC_1} = \frac{1}{2} AB \cdot C_1H = \sqrt{a^2-1}$



$C_1H = \sqrt{a^2+1}$ Радиус ABC_1 это

~~Пусть~~

$R_{ABC_1} = \frac{abc}{4S} \Rightarrow R = \frac{a \cdot a \cdot 2}{4\sqrt{a^2-1}}$

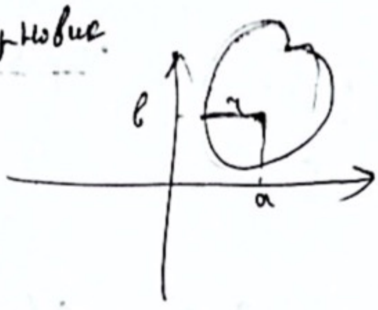
R_{ABC_1} это та же радиус цилиндра

~~Пусть $C_1 = a^2$~~ ~~$\geq$~~ 4.

(3)

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;\ 13) \end{cases}$$

черновик



$x^2+y^2=a^2$

$r^2 \le 13$

$a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;\ 13)$

3)

$a_1^2+15a_1+50 \ge (a_1+d)5+15$

$a_1^2+15a_1+50 \ge a_1 5+5+15$

~~$r=13$~~

$0 \le r \le \sqrt{13}$

2. $-4a-6b \le 13$

$4a+6b \ge -13$

$2a+3b \ge -\frac{13}{2}$

$0 \le a^2+b^2 \le 2a+3b$

$a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;\ 13)$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le -4a-6b \\ -4a-6b \le 13 \end{cases}$$

~~$\{ -4a-6b.$~~

~~$0 \le -4a-6b \le 13$~~

$0 \le a^2+b^2 \le -4a-6b \le 13$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$

$x^2-2xa+a^2+y^2-2yb+b^2 \le 13$

$\underbrace{a^2+b^2}_{\le 13}+x^2+y^2-2xa-2yb \le 13$

$-4a-6b \ge 13$

$2a+3b \le -\frac{13}{2} \approx -6{,}5$

$a^2+b^2 \le 2(2a+3b) \le -\frac{13}{2}$

≥ 0

$\varnothing$

$\Rightarrow -4a-6b \le 13$

$a^2+b^2 \le -4a-6b$

$a^2+b^2 \le -4a-6b \le 13$

$a^2+4a+b^2+6b \le 0$

~~$a(a+4)+b(b+6) \le 0$~~

$D=16-4b^2-24b=4(4-b^2-6b)=$

$-b^2-6b-9=-(b+3)^2$

$=4(-b^2-6b-9+13)=4(13-(b+3)^2)$

$a=\frac{-4\pm 2\sqrt{13-(b+3)^2}}{2}=-2\pm\sqrt{13-(b+3)^2}=$

$=-2$

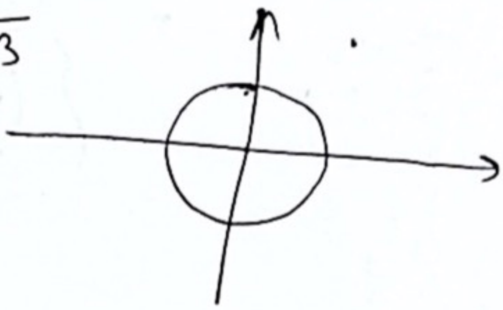
③ Есть 2 варианта

Чистовик

$$\left[\begin{array}{l} a^2+b^2\leq -4a-6b \\ a^2+b^2\leq 13 \end{array}\right. \Rightarrow$$

* $a^2+b^2\leq 13$ это круг центр в т. $(0;0)$ $r=\sqrt{13}$

$(x-a)^2+(y-b)^2\leq 13$ это тоже круг



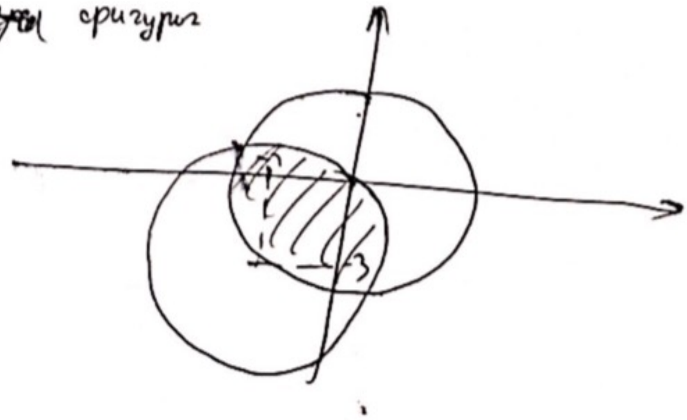
$a^2+b^2\leq -4a-6b$

$a^2+4a+4+b^2+6b+9\leq 13$

$(a+2)^2+(b+3)^2\leq 13$ тоже круг центр $(-2;-3)$ $r=\sqrt{13}$

множ. всех доп параметров a,b это пересечение этих круг.

Т.к. x,y той же декартовой плоскости. значит расстояние ~~бу~~ между точками должно быть $\leq$ (меньше или равно) $R=\sqrt{13}$, т.е. все допустимые зн. x,y это такие значения, на которые имеют расстояния до границы области круга $\leq R=\sqrt{13}$ те x,y это такие точки, ~~что к к круг их~~ сечения ~~это~~ 2 круга $(-2;3)$ (центр одного) и $(0,0)$ центр другого. ~~И~~ Радиус 2 круга - это $2\cdot R=2\sqrt{13}$. Осталось найти площадь этой ~~круга~~ фигуры



②

21104392 (U329254 M1295261)

1. $a_1, a_2, a_3\ a_4, a_5 \in Z$ Чернова

$\frac{a_1+a_5}{2} \cdot a_5 = S$

$a_6 a_{11} > S+15$ $a_6 \cdot a_{11} = \cancel{a_6(a_6+5d)}$

$a_8 a_9 < S+39$ $= (a_5+d)(a_5+6d) = a_5^2 + 6a_5 d + a_5 d + 6d^2 > \frac{a_1+a_5}{2} \cdot a_5$

$= \cancel{a_5(a_5+d)} + 6d(a_5+d) =$

$= (a_5+d)$

$\begin{cases} a_5^2 + 6a_5 d + a_5 d + 6d^2 > \frac{a_1+a_5}{2} \cdot a_5 \\ (a_5+3d)(a_5+4d) < \frac{a_1+a_5}{2} \cdot a_5 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} a_5^2 + \cancel{6a_5 d + a_5 d}^{10a_5 d} + 6d^2 > \frac{a_1+a_5}{2} \cdot a_5 \\ a_5^2 + 7a_5 d + 12d^2 < \frac{a_1+a_5}{2} \cdot a_5 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \cancel{\frac{a_1+a_5}{2} \cdot a_5 < > a_5^2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \{$

$a_1 a_2 a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ \ a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}$

$a_6 = \frac{a_1+a_{11}}{2}$ $\cdot$ $a_6 a_{11} = \frac{(a_1+a_{11})a_{11}}{2} = \frac{a_1 a_{11} + a_{11}^2}{2} > \frac{a_1+a_5}{2} \cdot a_5 + \cancel{3} 15$

$\cancel{a_6 + 3d + a_6} +$

$a_1 a_{11} + a_{11}^2 + 2 > a_1 a_5 + a_5^2$

$\boxed{a_{11}^2 + a_1 a_{11} - a_5(a_1+a_5) > 0}$

$D = a_1^2 + 4a_5 a_1 + 4a_5^2$

$a_5\ a_6\ a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}$

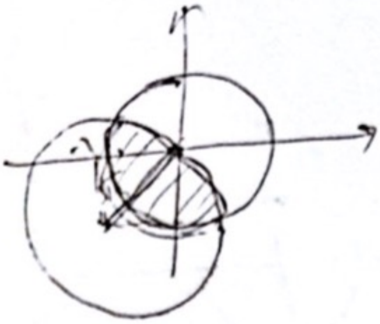
$a_8 = \frac{a_5+a_{11}}{2}$ $\frac{(a_5+a_{11})a_9}{2} =$

$a_8 \cdot a_9 < S+39$ $\begin{cases} a_6 a_1 > S+15 \\ a_7 a_9 < S+39 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\{$

$a_6 a_{11} > a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + 15$

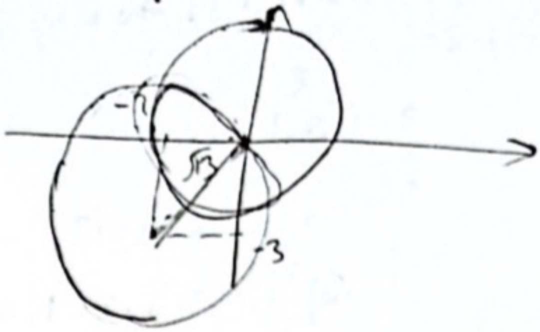
Черновик

$a^2+b^2 \le 13$



$a^2+b^2 \le -4a-6b$

$$\begin{cases} a^2+4a+4+b^2+6b+9-13 \le 0 \\ (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13 \Rightarrow \text{центр } (-2;-3),\ R=\sqrt{13} \\ (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \end{cases}$$



21104392 (U329254 M1295261)

Черновик

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{a_1+a_5}{2} \cdot 5 = \frac{2a_1+4d}{2} \cdot 5 = (a_1+2d) \cdot 5$

$\begin{cases} a_6 a_{11} = (a_1+5d)(a_1+10d) > 5(a_1+2d)+15 \\ a_7 a_9 = (a_1+7d)(a_1+8d) < 5(a_1+2d)+39 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 d + \cancel{100}^{50} d^2 > 5(a_1+2d)+15 \\ a_1^2 + \cancel{56d} \cancel{15} 15a_1 d + 56d^2 < 5(a_1+2d)+39 \end{cases}$

$\ell + \cancel{100}^{50} d^2 > c+15 \qquad \ell + 100d^2 < -c-15$

$\ell + 56d^2 < c+39 \qquad \ell + 56d^2 < c+39$

$\begin{array}{r} 100 \\ 56 \\ \hline 44 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ 39 \\ \hline 54 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 39 \\ 15 \\ \hline 24 \end{array}$

$\cancel{-44d^2 < 24}$

$\cancel{d^2 > -\frac{24}{44}} = -\frac{6}{11}$ $d \in R$

$6d^2 < 24.$

$d^2 < 4 = d = 1$

Чистовик

1) $S=\frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5=\frac{a_1+a_1+4d}{2}\cdot 5=\frac{2a_1+4d}{2}\cdot 5=(a_1+2d)5$

$\begin{cases} a_6a_{11}>S+15 \\ a_8a_9<S+39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d)>S+15 \\ (a_1+7d)(a_1+8d)<S+39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+15a_1d+50d^2>(a_1+2d)5+15 \\ a_1^2+15a_1d+56d^2<(a_1+2d)5+39 \end{cases}$

$\begin{cases} -a_1^2-15a_1d-50d^2<-(a_1+2d)5-15 \\ a_1^2+15a_1d+56d^2<(a_1+2d)5+39 \end{cases} + \Leftrightarrow \begin{cases} 6d^2<24 \\ d^2<4 \\ d\in Z \end{cases} \Rightarrow d=1$

$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+10)>(a_1+2)5+15 \\ (a_1+7)(a_1+8)<(a_1+2)5+39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+15a_1+50>5a_1+25 \\ a_1^2+15a_1+56<5a_1+49 \end{cases} \Leftrightarrow$ $56-49=7$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0 \\ a_1^2+10a_1+7<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+5)^2>0 \Rightarrow a_1\neq-5 \\ \cancel{a_1} \end{cases}$

$D_1=100-100=0$

$a_1=-5$

$D=100-49=51$

$a=\frac{-10\pm\sqrt{51}}{2}$ $\cancel{a\in\left(\frac{-\sqrt{10}-\sqrt{51}}{2};\frac{-\sqrt{10}+\sqrt{51}}{2}\right)}$

$a\in\left(\frac{-10-\sqrt{51}}{2};\frac{-10+\sqrt{51}}{2}\right)$ $\sqrt{51}\approx 7,..$

$\frac{-10-\sqrt{51}}{2}\approx\frac{-17,..}{2}=-8,..$

$-8,..$ -8 $-1,5$ -1 0

$\frac{-10+\sqrt{51}}{2}=\frac{-3,..}{2}$ $\cancel{a\in[-8;-2]}$ $a\in[-8;-2]\ /-5$

$a\in\{-8;-7;-6;-4;-3;-2\}$

1

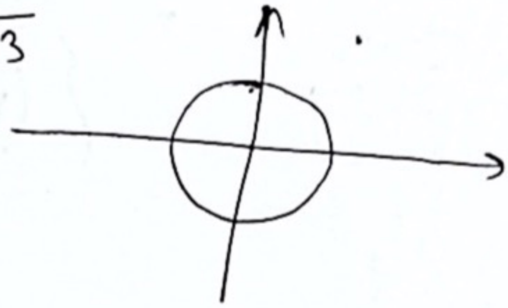
21104392 (U329254 M1295261)

Чистовик

3. Есть 2 варианта

$$\left[\begin{array}{l} a^2+b^2\le -4a-6b \\ a^2+b^2\le 13 \end{array}\right. \Rightarrow$$

* $a^2+b^2\le 13$ это круг центр в т. $(0;0)$ $r=\sqrt{13}$



$(x-a)^2+(y-b)^2\le 13$ это тоже круг

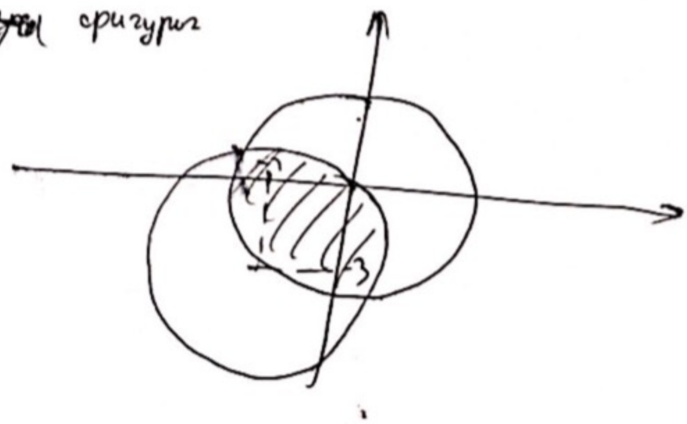
$a^2+b^2\le -4a-6b$

$a^2+4a+4+b^2+6b+9\le 13$

$(a+2)^2+(b+3)^2\le 13$ тоже круг центр $(-2;-3)$ $r=\sqrt{13}$

множ. всех доп параметров a, b это пересечение этих круг.

a x, y той же декартовой плоскости. значит расстояние ~~оу~~ между точками должно быть $\le$ (меньше или равно) $R=\sqrt{13}$ } т.е. все допустимые зн. x, y это такие значения, на которых имеет расстояния до границы области круга $\le R=\sqrt{13}$ те x, y это такие точки, ~~что~~ ~~...~~ сечения 2 круга $(-2;3)$ (центр одного) и $(0,0)$ центр другого. Радиус 2 круга - это $2\cdot R=2\sqrt{13}$. Осталось найти площадь этой ~~круга~~ фигуры



21104392 (U329254 M1295261)

Часть 2

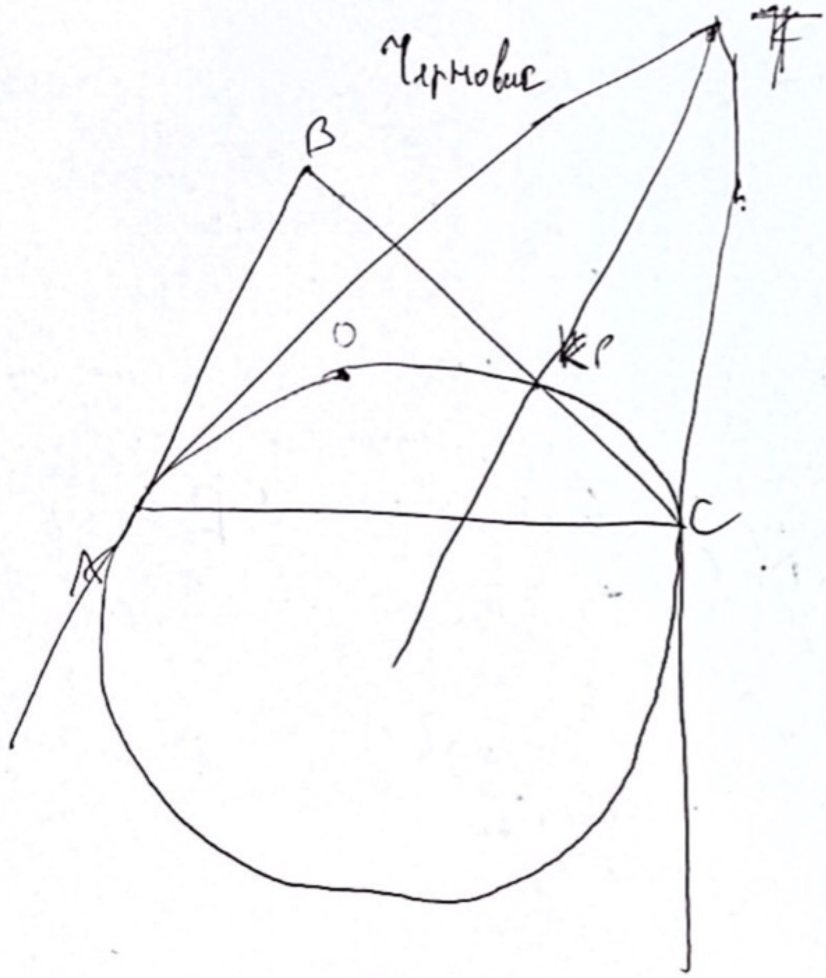
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

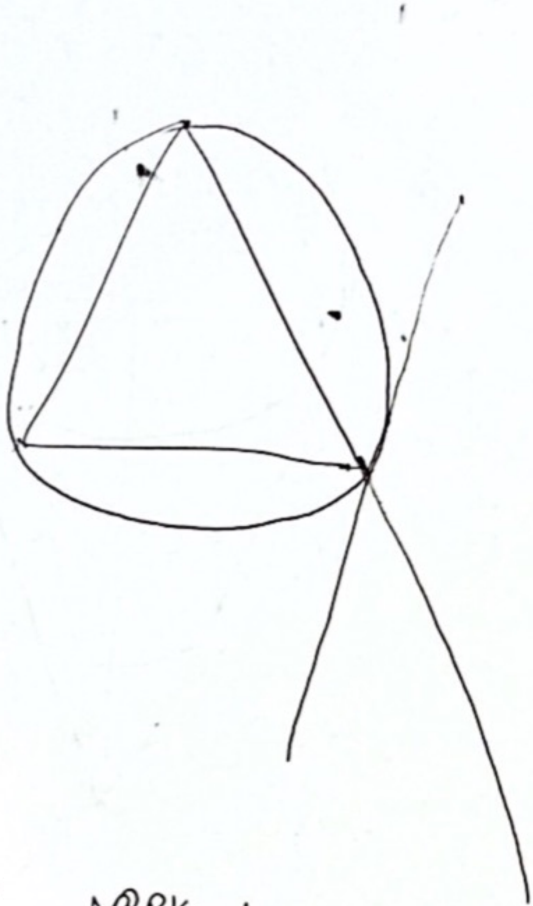
Шифр: **21104392**

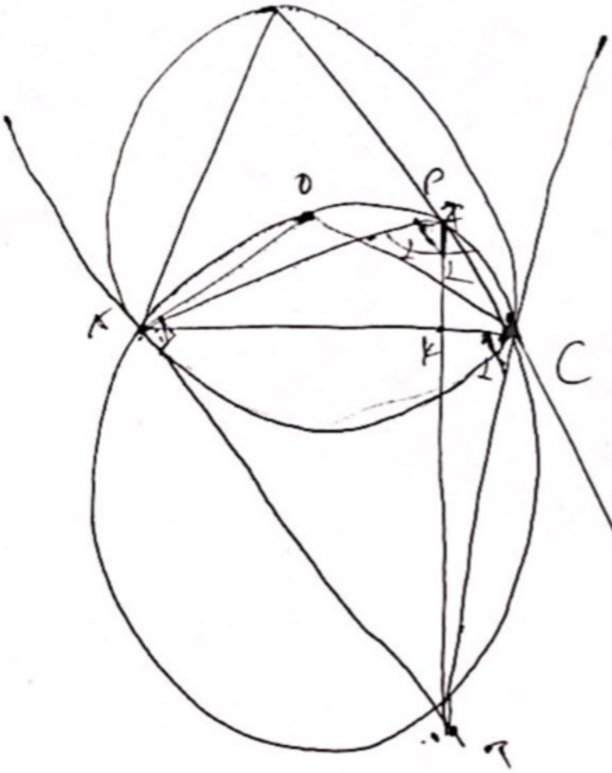
ID профиля: **329254**

Вариант 20

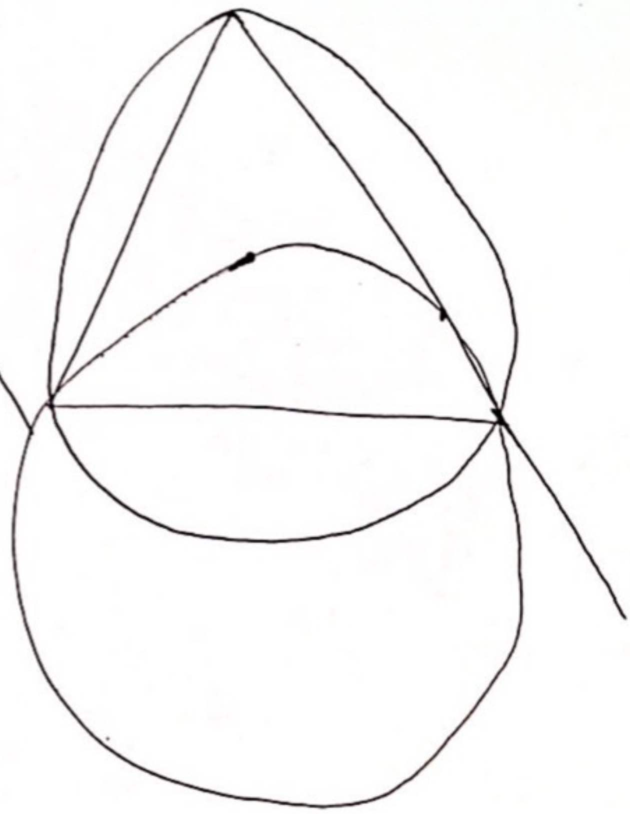
Черновик





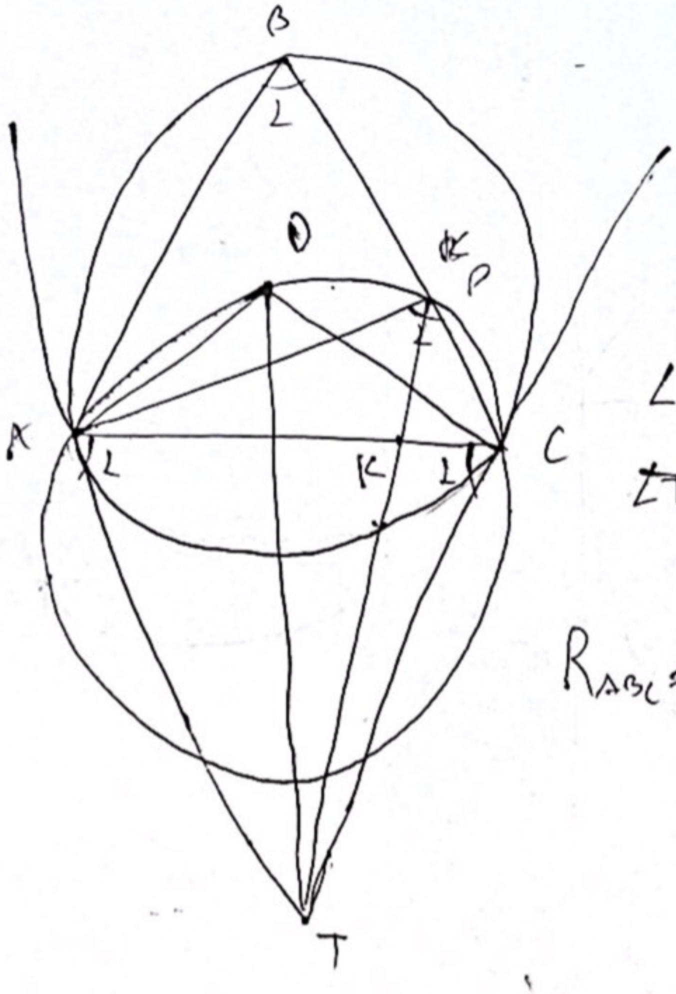


$$S_{APC} = \frac{AB \cdot PK \sin\alpha}{2}$$



Чистовик

3



$\angle OAT + \angle OCT = 180 \Rightarrow OACT$ можно описать круг.

$OA \perp AT$ (рис.)

$OC \perp CT$ (рис)

$\angle OAT = 90 \Rightarrow OT$ это диаметр окружности $OACT$

$\angle TCA = \frac{\smile AC}{2} = \angle APC$ (из окр. ABC) $= \angle CAT = \angle B$

$\angle TCA = \smile$

$R_{ABC} = \frac{abc}{4S_{ABC}} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{abc}{4R_{ABC}}$

3

21104392 (U329254 M1295262)

Чорновик

$$\underset{a}{\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)} = \underset{b}{\log_{(x-4)^2}(5x-26)} \cdot \underset{c}{\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)}$$

$x > 5,2$

$a = b$

a $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \dfrac{2\log_q(x-4)}{\log_q(2x-8)}$

b $\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \dfrac{\log_q(5x-26)}{2\log_q(x-4)}$

c $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = \dfrac{2\log_q(2x-8)}{\log_q(5x-26)}$

$\cancel{\dfrac{2\log_q(x-4)}{\log_q(2x-8)} = \dfrac{\log_q(5x-26)}{2\log_q(x-4)}}$ $\cancel{\log_q(5x-26)\cdot\log_q(2x-8) = (2\log_q(x-4))^2}$

$abc = 2$ $\qquad a^2(a+1) = 2$

$a = b$ $\qquad a^3 + a^2 - 2 = 0$ $\qquad a^3 - a^2 + 2a^2 - 2 = 0$

$c = a+1$ $\qquad a = 1$ $\qquad a^2(a-1) + 2(a-1)(a+1) = 0$

$(a-1)\cdot(\underbrace{a^2+2a+2}_{\neq 0}) = 0$

$D = 4-4$ $\varnothing$

$a = 1$

21104392 (U329254 M1295262)

Чистовик

ОДЗ $x > 5{,}2$

(2) $a = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \dfrac{\log_q(x-4)}{\log_q \sqrt{2x-8}}$ $= \dfrac{2\log_q(x-4)}{q}$ это любое число $= \dfrac{2\log_q(x-4)}{\log_q(2x-8)}$

$b = \log_{(x-4)^2}(5x-26) = \dfrac{\log_q(5x-26)}{2\log_q x-4}$

$c = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = \dfrac{\log_q 2x-8}{\log_q \sqrt{5x-26}} = \dfrac{2\log_q(2x-8)}{\log_q (5x-26)}$

$a \cdot b \cdot c = \dfrac{2\log_q(\cancel{x-4})}{\log_q(\cancel{2x-8})} \cdot \dfrac{\log_q(\cancel{5x-26})}{\log_q(x-4)} \cdot \dfrac{2\log_q(\cancel{2x-8})}{\log_q(\cancel{5x-26})} = 2$

$a = b.$

$c = a+1$ $\Rightarrow a(a)\cdot(a+1) = 2$

$a^3 + a^2 - 2 = 0$

$\cancel{a^3 + a^2\ 2a^2 - 2 = 0}$

$\cancel{a(a+1) - 2}$

$a^3 - a^2 + 2a^2 - 2 = 0$

$a^2(a-1) + 2(a-1)(a+1) = 0$

$(a-1)(a^2+2a+2) = 0$

$D = 4 - 8 < 0 \Rightarrow \not\exists$ $a^2+2a+2 \neq 0 \Rightarrow a=1$ еуо $\Rightarrow a = b = 1$

$c = 2$

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 1 \\ \log_{(x-4)^2}(5x-26) = 1 \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = \sqrt{2x-8} \\ 5x-26 = x^2-8x+16 \\ 2x-8 = 2|5x-26| \end{cases}$$

ОДЗ $\Rightarrow 5x-26>0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-8x+16 = 2x-8 \\ x^2-13x+42 = 0 \\ 2x-8 = 5x-26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-10x+24=0 \\ \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=6 \end{array}\right. \\ 3x=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=4 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=6 \end{array}\right. \\ x=6 \end{cases} \Rightarrow x=6$$

ответ $x=6$

(2)

21104392 (U329254 M1295262)

$D = 169 - 168 = 1$ $D = 100 - 96 = 4$

$x = \dfrac{13 \pm 1}{2}$ $x = \dfrac{10 \pm 2}{2}$

Чистовик

1. $\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$ $2^{17}\cdot 3^{16} \vdots a, b, c \Rightarrow a_1 = 2^{m_1}\cdot 3^{n_1}$ Из условия

$b_1 = 2^{m}\cdot 5^{n_2}$

$c_1 = 2^{m_3}\cdot 5^{n_3}$

$\min(m_1, m_2, m_3)=1$

$\max(m_1, m_2, m_3) = 17$

если $m_1 \leq m_2 \leq m_3$

$\Downarrow$

$m_1 = 1 \quad m_3 = 17$

$1 \leq m_2 \leq 17$

если $m_2 = 1$ то существут

3 тройки m (1;1;17)

(1;17;1)

(17;1;1)

3 тройки и когда $m_2 = 17$

а когда $2 \leq m \leq 17 \Rightarrow 6$ вариантов 2

это перестановка 3 различных цифр

$3\cdot 2\cdot 1 = 6$ или просто можно

~~по~~ написать ~~все~~

т. пол. $15\cdot 6 = 90$

$90+3+3=96$

аналогично и делаем с n

$3+3+14\cdot 6 = 6+84 = 90$

теперь чтобы получить сколько общих цифр

$90\cdot 96 = 8640$

Ответ: 8640

1

Черновик

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$ $\quad \log_{(x-4)^2}(5x-26)$ $\quad \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$x>4$

$x\neq 1$

$5x-26>0$

$5x>26$

$x>\frac{26}{5}=5,2$

$x>5,2$

$2x>8$

$x>4$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\frac{1}{\log_{x-4}\sqrt{2x-8}}=\log_{(x-4)^2}\sqrt{(5x-26)}$

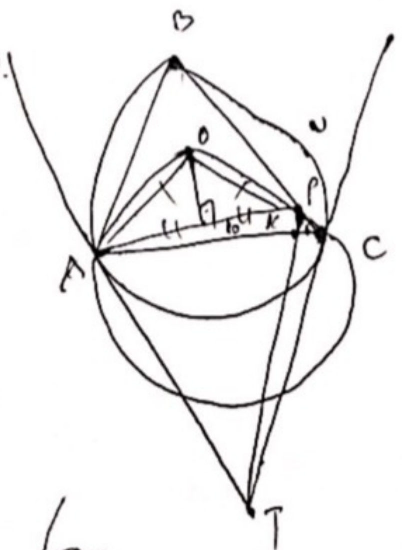
$\log_{(x-4)^2}(5x-26)\cdot\log_{(x-4)}\sqrt{2x-8}=1$

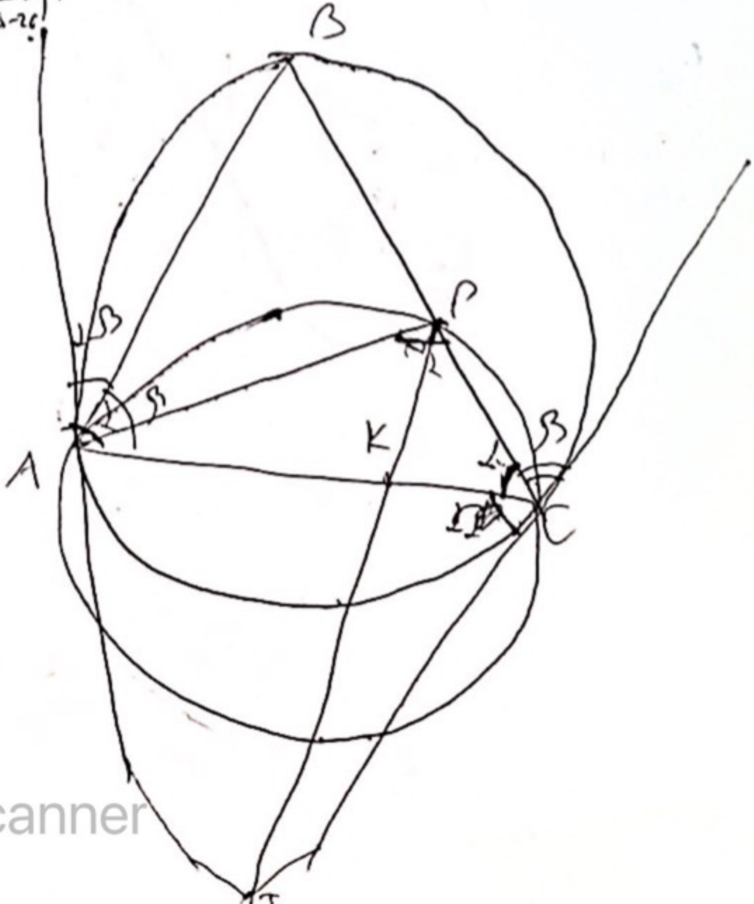
$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=\log_{(x-4)^2}(5x-26)+1$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=\log_{(x-4)^2}\sqrt{5x-26}+1$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)-\frac{1}{\log_{\sqrt{5x-26}}(x-4)}=1$

3.





21104392 (U329254 M1295262)

Черновик

1. $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 10 \\ НОК(a;b;c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \end{cases}$; a, b, c

$a = 2^{m_1} \cdot 5^{n_1}$ $b = 2^{m_2} \cdot 5^{n_2}$ $c = 2^{m_3} \cdot 5^{n_3}$

$m(m_1, m_2, m_3) = 1$ $min(n_1, n_2, n_3) = 1$

$m(m_1, m_2, m_3) = 17$ $max(n_1, n_2, n_3) = 16$

Сорт $m_1 \le m_2 \le m_3$

$m_1 = 1$ $1 \le m_2 \le 17$ — — $n_1 = 1$ $n_{max} = 16$

$m_3 = 17$ $14 \cdot 6 = 84$

с/б $m_2 \ge 2 \Rightarrow 15 \cdot 6 = 90$ $84 + 6 = 90$

$m_2 = 1$ +3 | (1, 17, 1) ~~3 - 2 - 1 = 6~~ $96 \cdot 90$ $96 \cdot 90 = 8640$

$m_2 = 17$ +3 | +6 $3 + 3 = 6$

Черновик

1 $\begin{cases} НОД(a; b; c) = 10 \\ НОК(a; b; c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \end{cases}$

$a \vdots 10$ $\quad 2^{17} \cdot 5^{16} = 2^{16} \cdot 5^{16} \cdot 2 = 16\ 0$

$b \vdots 10$ $\quad \underbrace{2\ 00 \ldots 00}_{16} \vdots a, b, c$

$c \vdots 10$

(10, 10, 20...0) ×3

(20, 10, 20...0) ×6

~~(10, 2~~

(100, 10, 20...0) ×6

(200, 10, 20...0) ×6

(1000, 10, 20..0) ×6

(2000, 10, 2000) ×6

$(\underbrace{20\ldots0}_{16}, 10, \underbrace{200\ldots00}_{16})$ ×3

~~(150, 20, 20¹⁶0)~~

$(\underbrace{100\ldots0}_{16}; 10; 2000)$ ×6

20 10 ..
20 ... 10
10 ... 20
10 20 ...
... 10 20
... 20 10

0-12 9+14 12+9

14
12
28
14
+168
13
186

21: 2 = 21

20 = 10.2

200 =

2000 | 2
1000 | 2
500 | 2
250 | 2
125 | 5
35 | 5
7 | 7
1 |