Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104377**

ID профиля: **347502**

Вариант 20

ЧИСТОВИК

№1.

Пусть d – разность прогрессии. Тогда $a_i = a_1 + d(i-1)$; $d \in \mathbb{Z}$

как $d = a_2 - a_1 \in \mathbb{Z}$

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_5 = 5a_1 + 10d$

$a_6 a_{11} > S + 15$

$(a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > 5a_1 + 10d + 15$

$a_8 a_9 < S + 39$

$(a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < 5a_1 + 10d + 39$

$a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15$ (1)

$a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39$ (2)

(2) – (1):

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

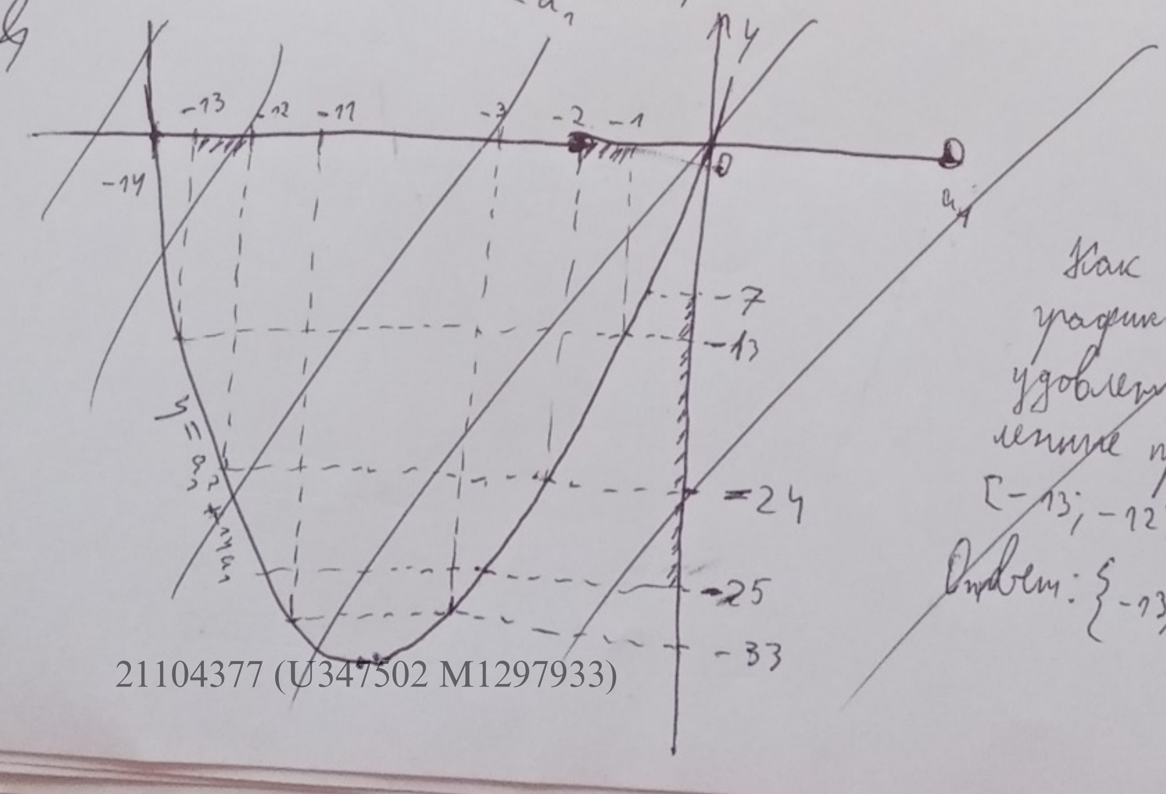
$\Updownarrow$

$|d| < 2 \underset{\substack{d>0, \\ \text{прогрессия} \uparrow}}{\Leftrightarrow} d = 1$

Тогда $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 10 + 15 \\ a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 10 + 39 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$-25 < a_1^2 + 10a_1 < -7$



Как видно из графика, неравенству удовлетворяют целочисленные промежутки $[-13; -12]$ и $[-2; -1]$

Ответ: $\{-13; -12; -2; -1\}$

21104377 (U347502 M1297933)

1/5

ЧЕРНОВИК

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_5 = \cancel{5a} \; a_1 + 10d$

$a_6 a_{11} > S + 15$

$(a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > S + 15$

$a_8 a_9 < S + 39$

$(a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < S + 39$

$a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > a_1 + 10d + 15$

$a_1^2 + 15a_1 d + \cancel{50}\, 56 d^2 < \cancel{8a_1+39}\; a_1 + 10d + 39$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

$|d| < 2$

$d = -1,\ 0,\ 1$

$d = 0$

$a_1 + 39 > a_1^2 > a_1 + 15$

$39 > a_1^2 - a_1 > 15$

$d = 1$

$a_1^2 + 15a_1 + 50 > a_1 + 10 + 15$

$a_1^2 + 15a_1 + 56 < a_1 + 10 + 39$

$-1 \quad 0 \quad 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$

$10 \quad 11$

$50 > 10 + 15$

$56 < 10 + 39$

$36 > 5 + 15$

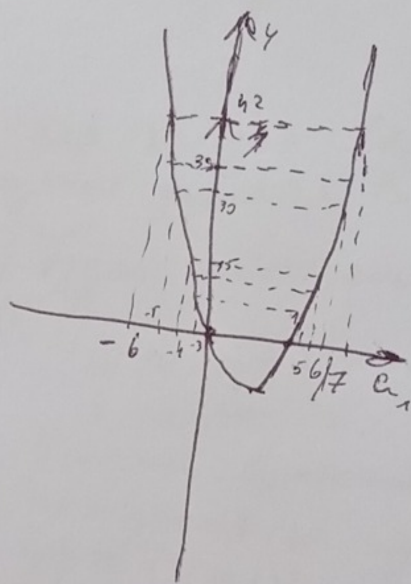
$42 < 5 + 39$

$-5 \quad 6\ 7\ 8\ 9 \quad 10\ 11\ 12\ 13\ 14$

$15 \quad 16$

$15 \cdot 0 > 35 + 15$

$15 \cdot 6 < 35 + 39$



$-5\ -4\ -3\ -2\ -1\ 0$

$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$

$0 > -15 + 15$

$-9 \quad -8 \quad -7 \quad -6$

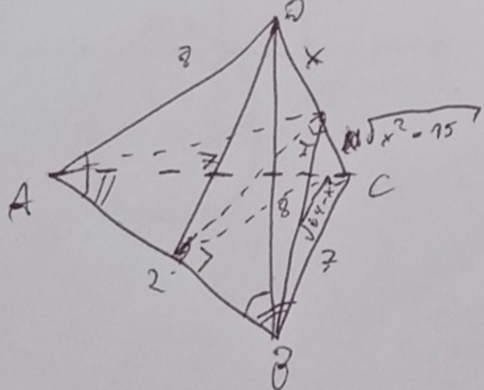
$-5 \quad -4 \quad -3 \quad -2$

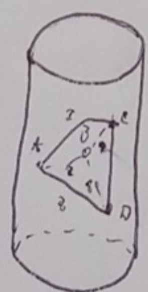
$-1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$

$-4 > -35 + 15$

$2 < -35 + 39$

$6 < -40 + 39$





$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{64-x^2}}$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{1}{64-x^2}} =$

$= \dfrac{\sqrt{63-x^2}}{\sqrt{64-x^2}}$

$\sin 2\alpha = 2\dfrac{\sqrt{63-x^2}}{64-x^2}$

$R = \dfrac{AB}{2\sin 2\alpha} = \dfrac{64-x^2}{2\sqrt{63-x^2}}$

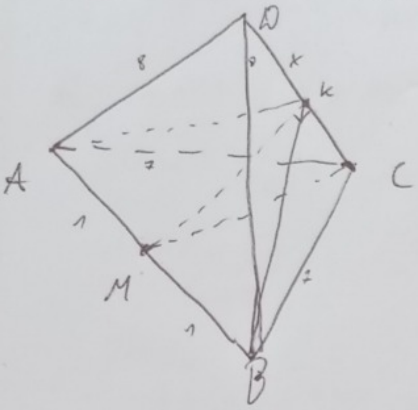
$$\frac{-\dfrac{-2x(64-x^2)}{2\sqrt{63-x^2}} + (-2x)\sqrt{63-x^2}}{2(63-x^2)} =$$

$$= \frac{2x(64-x^2-126+2x^2)}{4(63-x^2)\sqrt{63-x^2}} = \frac{2x(x^2-62)}{4(63-x^2)\sqrt{63-x^2}}$$

ЧИСТОВИК

№2

Заметим, что т.к. $C, D \in$ боковой поверхности цилиндра, и $CD \parallel$ его оси, ~~...~~ $CD \perp$ основанию цилиндра и CD лежит на образующей



Заметим, что $AD = BD$, $AC = BC$, т.е. ABD, ABC — равноб. треугольники с основанием AB.

Пусть M — середина AB.

Тогда $\left.\begin{matrix} DM \perp AB \\ CM \perp AB \\ DM \cap CM = M \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} AB \perp (DMC) \\ CD \subset DMC \end{matrix}\right| \Rightarrow AB \perp CD$

Пусть K — основание пер-ляра из M на CD

$\left.\begin{matrix} MK \subset \cancel{ABK}\ CDM \\ AB \perp CDM \end{matrix}\right| \Rightarrow AB \perp MK$

$\left.\begin{matrix} CD \perp MK \\ CD \perp AB \\ AB \cap MK = M \end{matrix}\right| \Rightarrow ABK \perp CD \Rightarrow$

$\Rightarrow ABK \parallel$ основанию цилиндра

Т.к. CD лежит на образующей, $K \in$ боковой пов-сти цилиндра

Тогда окр-ность, описанная около ABK — главная окружность цилиндра, и $R_ц = R_{ABK} = R$

3/5

21104377 (U347502 M1297933)

ЧИСТОВИК

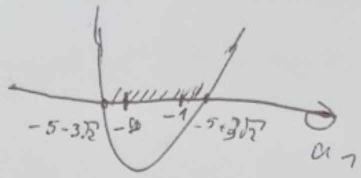
№1 (продолжение)

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \Leftrightarrow (a_1+5)^2 > 0 \Leftrightarrow a_1 \neq -5$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$\frac{D}{4} = 25 - 7 = 18$

$a_1 = -5 \pm 3\sqrt{2}$ - корни



$-9 > -5 - 3\sqrt{2} > -10$

$\Updownarrow$

$4 < 3\sqrt{2} < 5$

$\Updownarrow$

$16 < 18 < 25$

$-1 > -5 + 3\sqrt{2} > 0$

$\Updownarrow$

$4 < 3\sqrt{2} < 5$

Тогда $a_1 \in [-9; -1] \setminus \{-5\}$ - ответ.

21104377 (U347502 M1297933)

№3. ЧИСТОВИК

$(x;y)-?$ $(x;y)$: $\exists a,b$: $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,13)\end{cases}$

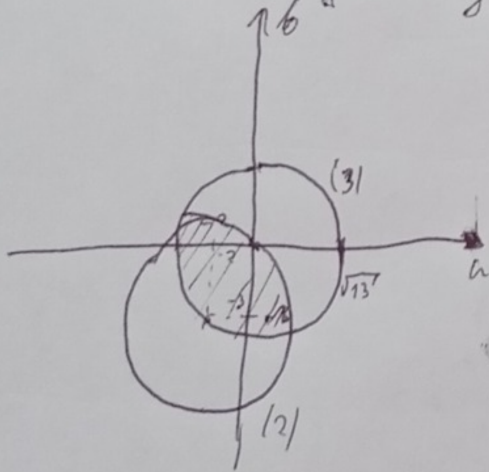
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,13)\end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13 & (1)\\ a^2+b^2\le -4a-6b & (2)\\ a^2+b^2\le 13 & (3)\end{cases}$$

$(2)\Leftrightarrow (a+2)^2+(b+3)^2\le 13$

Заменим задачу на равносильную: для каждого возможного значения $(a;b)$ найдём все подходящие значения $(x;y)$. Тогда найденное множество $(x;y)$ будет совпадать с требуемым. Для начала найдём возможные $(a;b)$

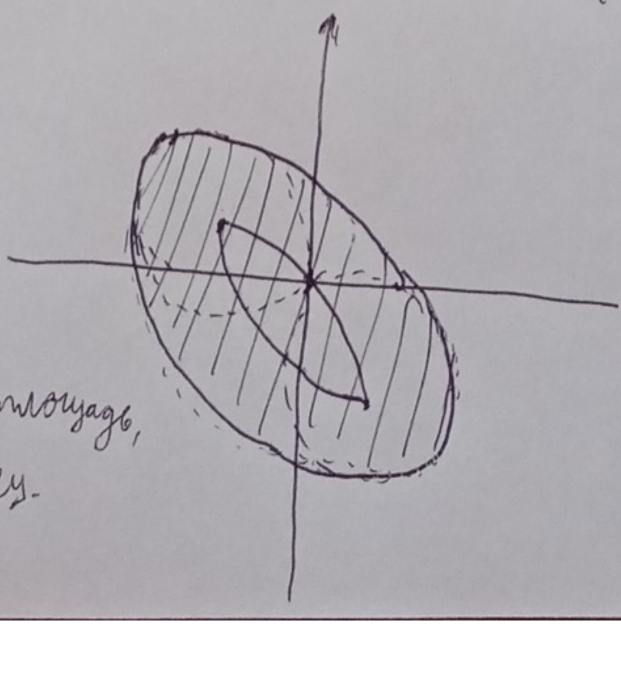


(2), (3) – круги с центрами в $(0;0)$ и $(-2;-3)$ и радиусом $\sqrt{13}$

Искомое множество $(a;b)$ находится на пересечении кругов (2) и (3)

~~Уравнение~~ (1).

Неравенство (1) – это формула круга с центром в $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{13}$. Тогда М имеет такой вид:



Как считать её площадь, я не знаю. Конец.

$\boxed{5}$ /5

21104377 (U347502 M1297933)

ЧИСТОВИК

№2 (продолжение)

№3. Пусть $DK = x > 0$

$\triangle BKD$ - прямоуг. $\angle BKD = 90^\circ$

$\Uparrow$

$\begin{cases} BK \in ABK \\ ABK \perp CD \end{cases}$

Из $\triangle BKD$

$BK = \sqrt{BD^2 - KD^2} = \sqrt{64 - x^2}$

Из $\triangle BCK$

$\triangle BCK$ - аналогично прямоуг.

$CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{x^2 - 15}$

$x \in (0; \sqrt{63})$

Пусть $\alpha = \angle MKB < 90^\circ$

$$\sin\alpha = \frac{MB}{BK} = \frac{1}{\sqrt{64-x^2}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{63-x^2}}{\sqrt{64-x^2}}$$
$(\alpha < 90^\circ)$

$\angle AKM = \angle MKB = \alpha$ (KM - медиана и высота => биссектриса в $\triangle AKB$)

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle AKB} = \frac{2}{2\sin 2\alpha} = \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{64-x^2}{2\sqrt{63-x^2}}$$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{-2x\sqrt{63-x^2} + \frac{2x(64-x^2)}{2\sqrt{63-x^2}}}{2(63-x^2)} = \frac{x(64-x^2-126+2x^2)}{2(63-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x(x^2-62)}{2(63-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

R: $\searrow$ $\nearrow$

R': 0 $-$ $\sqrt{62}$ $+$ $\sqrt{63}$ x

$x = \sqrt{62}$ - точка минимума $R(x)$

Тогда $CD = CK + DK = x + \sqrt{x^2-15} = \sqrt{62} + \sqrt{47}$

Ответ: $\sqrt{62} + \sqrt{47}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104377**

ID профиля: **347502**

Вариант 20

ЧИСТОВИК

№2.

$a = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2\log_{2x-8}(x-4)$

$b = \log_{(x-4)^2}(5x-26) = \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$

$c = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2\log_{5x-26}(2x-8)$

$\begin{cases} 2x-8>0 \\ x-4>0 \\ 5x-26>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{26}{5}$

Заметим, что $abc = 2$

Из условия $\left[\begin{array}{l} a=b, \quad c=a+1 \\ a=c, \quad b=a+1 \\ b=c, \quad a=b+1 \end{array}\right.$

Тогда $\left[\begin{array}{l} a^2(a+1)=2 \\ b^2(b+1)=2 \\ c^2(c+1)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{array}\right.$

(у ур-ния $x^3+x=2$ 1 корень: $x=1$, т.к. $x^3+x^2-2=(x-1)(\underbrace{x^2+2x+2}_{D<0,\ \text{корней нет}})$)

① $a=1$

$2\log_{2x-8}(x-4)=1$

$(x-4)^2 = 2x-8 = 2(x-4)$

$(x-4)(x-6)=0$ $\quad x=4$ не подх.

$x=6$ $\quad$ проверка: $a = 2\log_4 2 = 1$

$b = \frac{1}{2}\log_2 4 = 1$

$c = 2\log_4 4 = 2$, подходит

② $b=1$

$\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)=1$

$5x-26=(x-4)^2$

$x^2 - 13x + 42 = 0$

$(x-6)(x-7)=0$ $\quad x=7$ $\quad$ проверка: $a = 2\log_6 3 \neq 1$

$b = \frac{1}{2}\log_3 9 = 1$, не подх.

$c = 2\log_9 6 \neq 1$

$a \neq b,\ b \neq c,\ a \neq c$

$\log_6 3,\ \log_9 6 \neq \frac{1}{2}$

$\overset{?}{}$

$3 \neq \sqrt{6} \quad 6 \neq \sqrt{9}$

$\log_6 3 \neq \log_9 6 \Leftrightarrow \neq \log_6^2 3 \neq \frac{1}{2}$

③ $c=1$

$2\log_{5x-26}(2x-8)=1$

$(2x-8)^2 = 5x-26$

$4x^2 - 37x + 90 = 0$

$D = 1369 - 1440 < 0$, корней нет

Ответ: 6

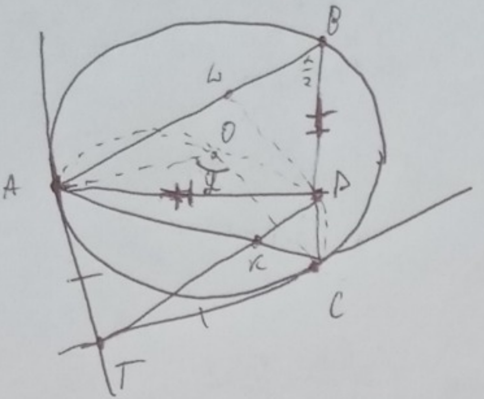
3/5

21104377 (U347502 M1297934)

ЧИСТОВИК

№3.

а)



$S_{APK}=10$

$S_{CPK}=8$

$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}}=\frac{AK}{KC}=\frac{5}{4}$

Пусть $\angle AOC=\alpha$

$\angle ABC=\frac{\angle AOC}{2}=\frac{\alpha}{2}$ как вписанный по отношению к центральному

~~$\angle ATC=180°$~~ Заметим, что $ATCO$ - вписаный, т.к. $\angle TAO+\angle TCO=180°$ углы между касательными и радиусами

Тогда $\angle ATC=180°-\angle AOC=180°-\alpha$ $\quad$ $AT=TC$ как отрезки касательных из т. T к ω

Из р/б $\triangle ATC$ $\angle TAC=\angle TCA=\frac{180°-\angle ATC}{2}=\frac{\alpha}{2}$

Т.к. $AOPC$ - впис, $\angle AOC=\angle APC=\alpha$

$\angle APB=180°-\angle APC=180°-\alpha$

Тогда $\angle BAP=180°-\angle APB-\angle ABP=\frac{\alpha}{2}$ => $\triangle APB$ - равноб.

Ещё $\angle APK=\angle ACT=\frac{\alpha}{2}$ из впис. $APCT$

$APCT$ - впис, т.к. $\angle APC=\angle AOC=\alpha$

$\angle APC+\angle ATC=180°$

$\angle CPT=\angle APT=\frac{\angle APC}{2}=\frac{\alpha}{2}$ => PK - бисс. $\triangle APC$

По св-ву бисс. $\frac{AP}{CP}=\frac{AK}{KC}=\frac{5}{4}$

Но $\frac{AP}{CP}=\frac{BP}{CP}=\frac{S_{ABP}}{S_{APC}}=\frac{5}{4}$

Тогда $S_{ABC}=S_{ABP}+S_{APC}=\frac{9}{4}(S_{APK}+S_{PKC})=\boxed{\frac{81}{2}}$

4/5

21104377 (U347502 M1297934)

ЧИСТОВИК

№3 б)

L - ср-на AB

$tg\frac{\angle}{2} = \frac{PL}{BL} = \frac{1}{2}$

$PL \cdot BL = S_{APB} = S_{ABC} - S_{APC} = \frac{45}{2}$

$PL^2 = \frac{45}{4}$

$PL = \frac{3}{2}\sqrt{5}$

$BL = 3\sqrt{5}$

$BP = \sqrt{PL^2 + BL^2} = \cancel{\frac{3}{2}\sqrt{5}}\ \frac{15}{2}$

$PC = \frac{4}{5} PB = 6$ $\qquad BC = PC + BP = \frac{27}{2}$

~~AC² = BA² + B~~

AC ищется из △ABC хотя бы по т. косинусов

ЧЕРНОВИК

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \underbrace{2\log_{2x-8}(x-4)}_{a}$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \underbrace{\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)}_{b}$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = \underbrace{2\log_{5x-26}(2x-8)}_{c}$

$\begin{cases} 2x-8>0 \\ x-4>0 \\ 5x-26>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ x>\frac{26}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x>\frac{26}{5}$

$37 \cdot 37 = 1369$

$abc=1$

$2a=\frac{1}{2}b \qquad c=\frac{1}{ab}=$ ~~...~~ $a\cdot\frac{1}{2}$

$a=c \qquad b=\frac{1}{ac}=2+4c$

$\log_{2x-8}(\cancel{4x-16})=\log_{5x-26}(2x-8)$

$\frac{1}{2}b=2c \qquad a=\frac{1}{bc}=c+\frac{1}{2}$

$c=\log_{5x-26}(2x-8)=$

$=\log_{5x-26}(x-4)+\log_{5x-26}2=$

$=\frac{1}{b}+\log_{5x-26}2$

$\left[\begin{array}{l} c=b \\ c=b+1 \\ c=b-1 \end{array}\right.$

$(x^2+2x+2)(x-1)=$

$=x^3+2x^2+2x-x^2-2x-2=$

$=x^3+x^2-2$

$2\underbrace{\log_{5x-26}(2x-8)}=\frac{1}{2}\underbrace{\log_{x-4}(5x-26)}_{t}$

~~$t+\log_{5x-26}2$~~

$2\log_{5x-26}(2x-8)=\frac{1}{2\log_{5x-26}(x-4)}$

$abc=2=\left[\begin{array}{l} a^2(a+1) \\ b^2(b+1) \\ c^2(c+1) \end{array}\right.$

$a^3+a^2=2$

~~$\log^3_{2x-8}$~~

$a=\left[1\right.$

1 1 0 −2

1 1 2 2 0

$b^3+b^2=2 \qquad b=1$

$a^3+a^2-2 \mid a-1$

$a^3-a^2 \qquad a^2+2a+2$

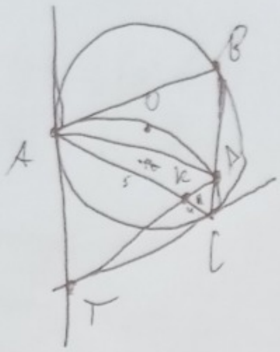
$2a^2-\cancel{2}$

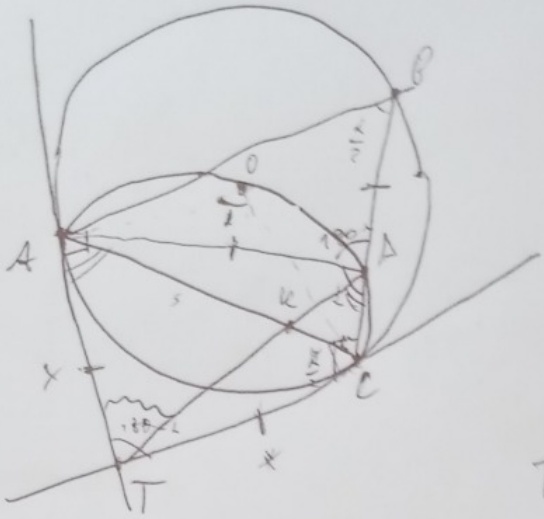
$2a^2-2a$

$2a-2$

21104377 (U347502 M1297934)

ЧЕРНОВИК





TCPA – впис.

$PK \cdot KT = AK \cdot KC$

$\frac{PK}{KC} = \frac{PC}{AT} = \frac{AK}{KT}$

ЧЕРНОВИК

$НОД(a, b, c) = 10 = d$
$НОК(a, b, c) = 2^{17} \cdot 5^{16} = \frac{abc}{d}$

$abc = 2^{18} \cdot 5^{17}$

$\cancel{bc = 2^{17} \cdot 5^{16}}$

$a_1 = \frac{a}{d} \quad b_1 = \frac{b}{d} \quad c_1 = \frac{c}{d}$

$a_1 b_1 c_1 = \frac{abc}{d^3} = \frac{2^{18} \cdot 5^{17}}{10^3} = 2^{15} \cdot 5^{14}$

$\left[\begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array}\right. \quad \vdots 2 \quad \not\vdots 4$

$\left[\begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array}\right. \quad \vdots 5 \quad \not\vdots 5^2$

$\left[\begin{array}{l} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{array}\right. \quad \not\vdots 2 \quad \vdots 5$

$a_1 = a_2 a_5$
$b_1 = b_2 b_5$
$c_1 = c_2 c_5$

$b_2 c_2 = 2^{15}$ ~~16 вар-тов~~ 14 вар-тов ~~Всего: $3 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 17$~~

$b_5 c_5 = 5^{16}$ ~~17 вар-тов~~ 15 вар-тов

$45 \cdot 48$

~~$15 \cdot 3 = 48$~~ 45
~~$12 \cdot 3 = 45$~~ 48

$3 \cdot 14 \cdot 3 \cdot 15 =$
$= 21 \cdot 3 \cdot 30 = 63 \cdot 30 = 2^3$
$= 1890$

$\cancel{8} + 3 = \cancel{12}$

1 1 8
1 2 4
1 4 2
1 8 1
~~все~~
8 1 1
2 1 4
4 1 2
2 4 1
4 2 1

$\left[\begin{array}{l} a_2 = 1, \quad b_2 \neq c_2, \; b_2 \cdot c_2 > 1 \\ a_2 = b_1 = 1 \\ a_2 = 1, \quad b_1 \neq c_1 \end{array}\right.$

ЧИСТОВИК

№1 (продолжение)

(2) $a_2 = b_2 = 1$, $c_2 = 2^{15}$

3 случая ~~[illegible]~~ (3 перестановки букв)

(3) $a_2 = 1$ $b_2 = c_2 = \sqrt{2^{15}} = 2^7\sqrt{2}$

0 случаев; $2^7\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$

всего вар-тов для (a_2, b_2, c_2):

$3 + 42 = 45$

Аналогично рассмотрим a_5, b_5, c_5

(1) $a_5 = 1$ $b_5 \neq c_5$ $b_5, c_5 > 1$

$b_5 c_5 = 5^{14}$

$b_5 \neq c_5 \Leftrightarrow b_5 \neq 5^7$

$b_5 \in [5^1; 5^{13}] \setminus \{5^7\}$ — 12 вар-тов

всего $12 \cdot 3 = 36$ вар-тов

(2) $a_5 = b_5 = 1$ $c_5 = 5^{14}$

3 варианта

(3) $a_5 = 1$ $b_5 = c_5 = 5^7$

3 вар-та

всего $(a_5; b_5; c_5)$ –

$36 + 3 + 3 = 42$ вар-тов

Итого для (a, b, c) = для $(a_1, b_1, c_1) = 42 \cdot 45 = 1890$

ЧИСТОВИК

№1.

$$\begin{cases} НОД(a, b, c) = 5 \cdot 2 = d \\ НОК(a, b, c) = 2^{17} \cdot 5^{16} = \frac{abc}{d} \end{cases}$$

Тогда $abc = 2^{18} \cdot 5^{17}$

Пусть $a_1 = \frac{a}{d}$, $b_1 = \frac{b}{d}$, $c_1 = \frac{c}{d}$ Тогда $НОД(a_1, b_1, c_1) = 1$

$\Uparrow$ $НОД(a, b, c) = 10 = d$

$a_1 b_1 c_1 = \frac{abc}{d^3} = \cancel{\ldots}\ 2^{15} \cdot 5^{14}$

Пусть $\begin{cases} a_1 = a_2 a_5 \\ b_1 = b_2 b_5 \\ c_1 = c_2 c_5 \end{cases}$, причём a_2, b_2, c_2 – степени 2-ки, а a_5, b_5, c_5 – степени 5-ки.

Тогда $\begin{cases} НОД(a_1, b_1, c_1) = 1 \\ a_1 b_1 c_1 = 2^{15} \cdot 5^{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a_2 = 1 \\ b_2 = 1 \\ c_2 = 1 \end{array}\right. \\ a_2 b_2 c_2 = 2^{15} \\ \left[\begin{array}{l} a_5 = 1 \\ b_5 = 1 \\ c_5 = 1 \end{array}\right. \\ a_5 b_5 c_5 = 5^{14} \end{cases}$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} НОД(a, b, c) = d \\ abc = 2^{15} \cdot 5^{14} \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} НОД(a, b, c) = d \\ НОК(a, b, c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \end{cases}$$

Рассмотрим a_2, b_2, c_2: три случая их взаимного расположения

1) $a_2 = 1$; $b_2 \neq c_2$; $b_2, c_2 > 1$

$b_2 c_2 = 2^{15}$ $\quad b_2 \neq c_2 \Rightarrow b_2 \neq \sqrt{2^{16}} = 2^7\sqrt{2}$

Вариантов выбора: $b_2 \in [2^1; 2^{14}]$

$c_2 \in [2^1; 2^{14}]$, $c_2 = \frac{2^{15}}{b_2}$ $\qquad$ 14 вариантов

Аналогично $b_2 = 1$ и $c_2 = 1$.

Тогда всего $14 \cdot 3 = 42$

(с учётом перестановки букв)