Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104372**

ID профиля: **850268**

Вариант 20

Чистовик

№1.

$S=\frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5 \Rightarrow S=5a_1+10d.$

$$\begin{cases} a_6\cdot a_{11} > S+15 \\ a_8\cdot a_9 < S+39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1+10d+15 \\ (a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1+10d+39. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+10a_1\cdot d+5a_1\cdot d+50d^2 > 5a_1+10d+15 \\ a_1^2+8a_1\cdot d+7a_1\cdot d+56d^2 < 5a_1+10d+39 \end{cases}$$

$\Downarrow$

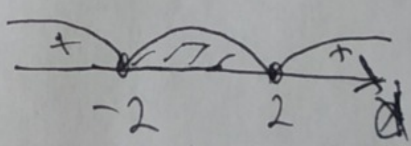
$$\begin{cases} a_1^2+15a_1\cdot d-5a_1 > -50d^2+10d+15 \\ a_1^2+15a_1\cdot d-5a_1 < -56d^2+10d+39 \end{cases} \Rightarrow -50d^2+\cancel{10d}+15 < -56d^2\cancel{+10d}+39$$

$6d^2<24.$

$d^2-4<0$

$(d+2)(d-2)<0.$

Решим методом интервалов:



$d\in(-2;2).$

Т.к последовательность возрастает, $d>0$, след-но $d\in[0;2)$, и последовательность целочисленная, тогда $d=1$:

$$\begin{cases} a_1^2+15a_1-5a_1 > -50+10+15 \\ a_1^2+15a_1-5a_1 < -56+10+39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2+15a_1-5a_1+25>0 \\ a_1^2+15a_1-5a_1+7<0 \end{cases} ; \begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0 \\ a_1^2+10a_1+7<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases}(a_1+5)^2>0 \Rightarrow a\neq -5.\\ a_1^2+10a_1+7<0\end{cases}$$

$a_1^2+10a_1+7=0.$

$D=100-28=72=(6\sqrt{2})^2.$

$a_{1\,1,2}=\dfrac{-10\pm 6\sqrt{2}}{2}=-5\pm 3\sqrt{2};$

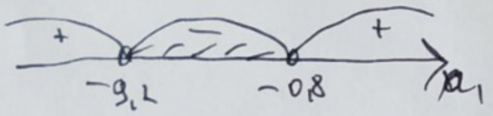
$\sqrt{2}\approx 1{,}4$, тогда:

$a_1\approx -5+3\cdot 1{,}4=-0{,}8.$

$a_2\approx -5-3\cdot 1{,}4=-9{,}2.$

$(a_1+0{,}8)(a_1+9{,}2)<0.$

Решим методом интервалов:



$a_1\in(-9{,}2;-0{,}8).$

Итак, $a_1\in(-9{,}2;-0{,}8)$; $a_1\neq -5$ и $a_1\in\mathbb{Z}$, след-но все возможные значения a_1:

$a_1\in\{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\}.$

Ответ. $a_1\in\{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\}.$

Чистовик

№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13 \ (1) \\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,\ 13)\ (2)\end{cases}$$

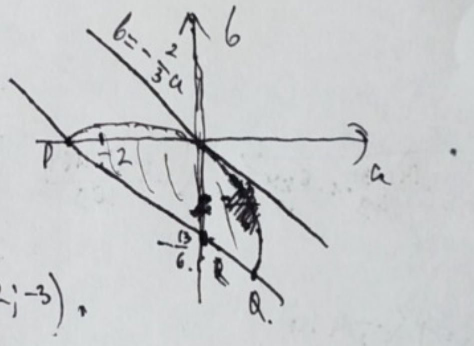
(1) — круг с центром $O(a;b)$ и $r=\sqrt{13}$ Ω_0

Решение.

Т.к $\min(-4a-6b,13)$ в неравенстве (1) $\geq$ суммы квадратов то $\min(-4a-6b,13)\geq 0$ при любых значениях a и b.

1) Пусть $-4a-6b\le 13$, $\Rightarrow \begin{cases}-4a-6b\le 13\\ -4a-6b\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b\ge -\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}\\ b\le -\frac{2}{3}a\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+b^2\le -4a-6b.$



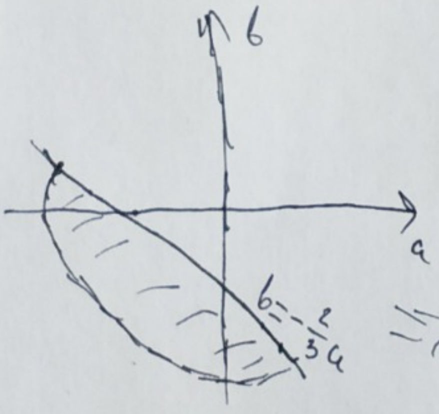
$(a+2)^2+(b+3)^2\le 13$

круг Ω_1 $R_1=\sqrt{13}$; с центром в $O_1(-2;-3)$.

Т.к $R_1=\sqrt{13}$, то $(0;0)\in\Omega_1$, радиус в $(0,0)$ лежит на прямой $b=-\frac{2}{3}a$, след-но $OH\perp b=-\frac{2}{3}a$. Полоса отсечёт сегмент Ω_1.

2) Пусть $13\le -4a-6b \Rightarrow a^2+b^2\le 13$; Круг Ω_2 с центром в $O_2(0;0)$ $R_2=\sqrt{13}$

Т.к $R_2=\sqrt{13}$, то точка $(-2;-3)\in\Omega_2$.

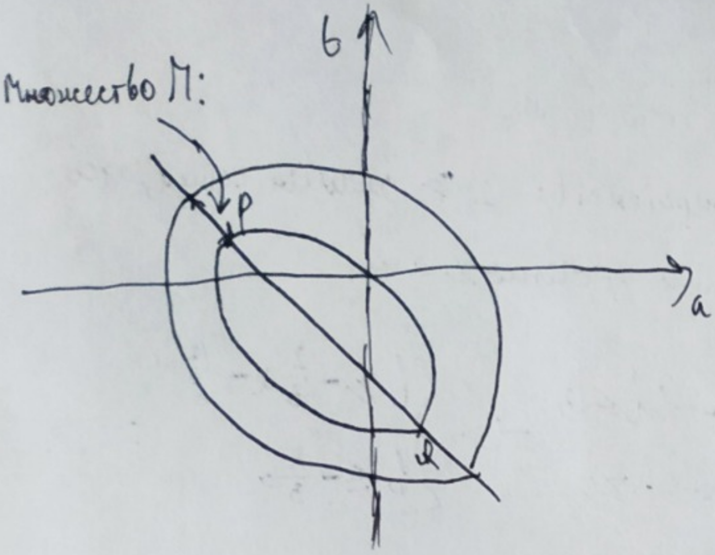


$\Rightarrow$ Множество центров (a,b)

Теперь подставим это значение в ~~$(x-a)^2+(y-b)^2$~~ ≥ 13 неравенство (1) $\Longrightarrow$

От каждой точки заданного множества построим круги радиусом $\sqrt{13}$.

Множество M:



Двигая центр по построенной прямой PQ, получим фигуру: M – эллипс, тогда:

$S_M = \pi \cdot a \cdot b$, где a, b – длины от центра.

Найдём P, Q:

$$\begin{cases} -4a-6b=13 \\ a^2+b^2=13 \end{cases}$$

$$P\left(\frac{-14-6\sqrt{30}}{13};\ \frac{4\sqrt{30}-21}{13}\right).$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{12\sqrt{30}}{13}\right)^2+\left(\frac{8\sqrt{30}}{13}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{144\cdot 30}{169}+\frac{64\cdot 30}{169}} = \sqrt{\frac{30(144+64)}{169}} = \sqrt{\frac{30\cdot 208}{169}} = \sqrt{\frac{3\cdot 2\cdot 5\cdot 2^4\cdot 13}{13\cdot 169}} = \sqrt{\frac{15\cdot 2^5}{13}}.$$

$a = PQ\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{13}$

$b = 2\sqrt{13}$

$S = \pi\cdot a\cdot b = \pi\cdot\sqrt{13}\cdot PQ + 26 = 26\pi\cdot\sqrt{375}$

Ответ. $26\pi\cdot\sqrt{375}$.

Черновик. ①.

№1.

$S=\frac{a_1+a_5}{2}\cdot n=2{,}5a_1+2{,}5a_5=$

$=2{,}5a_1+2{,}5a_1+10d=5a_1+10d=5(a_1+2d)$

$S=\frac{(a_1+a_5)n}{2}=\frac{(a_1+a_1+4d)\cdot 5}{2}=\frac{10a_1+20d}{2}=5a_1+10d=$

$=5a_3$

$d=\frac{a_5-a_1}{4}$

$a_1^2+50d^2+15a_1d-5a_1-10d-15>0$

1) $a_6\cdot a_{11}>S+15$.

$(a_1+5d)(a_1+10d)>5a_1+10d+15$.

$a_1^2+10d\cdot a_1+5d\cdot a_1+50d^2-5a_1-10d-15$

$a_1^2+50d^2+15d\cdot a_1-5a_1-10d-15>0$.

2) $(a_1+7d)(a_1+8d)>5a_1+10d+15$.

$a_1^2+8a_1d+7a_1d+56d^2-5a_1-10d-39>0$

$a_1^2+15a_1d+56d^2-5a_1-10d-39>0$.

$\cancel{\begin{cases}a_1^2+50d^2+15d\cdot a_1-5a_1-10d-15>0\\a_1^2+56d^2+15d\cdot a_1-5a_1-10d-39>0\end{cases}}$

$\cancel{\begin{cases}a_1^2+50d^2+15da_1-5a_3-15>0\\a_1^2+56d^2+15d\cdot a_1-5a_3-39>0\end{cases}}$

$\begin{cases}a_1^2+50d^2+15da_1-5a_1-10d-15>0\\a_1^2+56d^2+15da_1-5a_1-10d-39<0,\end{cases}$

$a_1^2+50d^2+15a_1-5a_3-15>0$

$a_1^2+50d^2+15a_1-5a_3-39<0$.

$a^2+5(10d^2+3d\cdot a_1-a_3-3)>0$

$a^2+5(10d^2+3a_1d-a_3-8)+1<0$.

1) разн. >0

3) $\min(x;y)$ – min двух чисел

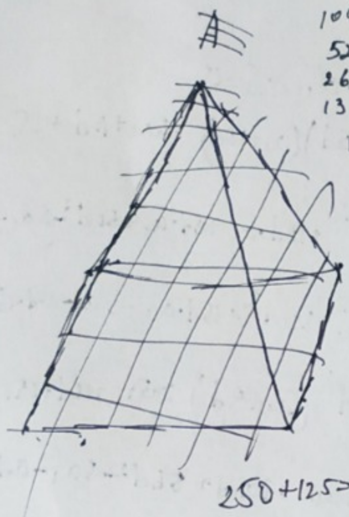
52.

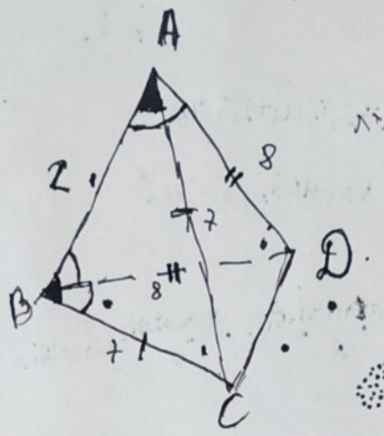
$$\begin{array}{r} 208 \\ \times\ 30 \\ \hline 6240 \end{array}$$

1000

$$\begin{array}{r} 70 \\ \times\ 70 \\ \hline \end{array}$$

208	2
104	2
52	2
26	2
13	13
1	



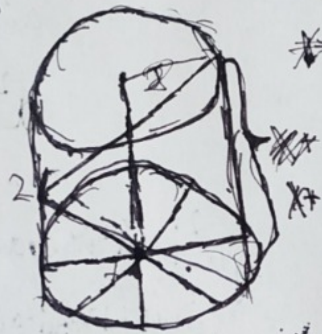


$250+125=375$

$5^3 \cdot 3$.

$x+112\cos\alpha=113$.

~~$x=\sqrt{112(1-\cos\alpha)}$~~



$x^2=113-112\cos\alpha$

$x^2+112\cos\alpha=113$.

$x^2=113-112\cos\alpha$.

$1+112(1-\cos\alpha)$

$x=\sqrt{64+49-112\ldots}$

$x=\sqrt{113-112\cos\alpha}$

$x+112\cos\alpha=113$

$x+112\cos\alpha-112=1$.

$x^2=113-112\cos\alpha$.

$x^2+112\cos\alpha=113$.

$x^2+112\cos\alpha-112=1$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

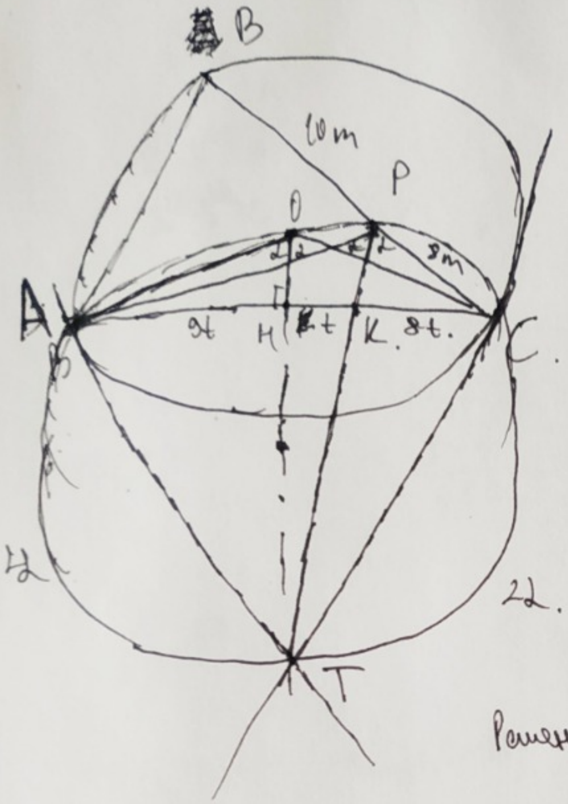
Шифр: **21104372**

ID профиля: **850268**

Вариант 20

НОД(a; b; c)=10
(a·b·c) $=2^{17}\cdot5^{16}$.

Чистовик №6. ①.



Дано:

$S_{APK}=10$; $S_{CPK}=8$;

б) $\angle ABC=\arctg\frac{1}{2}$.

Найти: а) S_{ABC}; б) AC.

Решение.

а)

1) Отношение площадей △AKP и △PKC, с общей высотой, $\Rightarrow \frac{AK}{KC}=\frac{10}{8}$.

Пусть $AK=10a$; $KC=8b$.

2) Т.к O-центр ω, O-лежит на серед. перпендикуляре. Пусть $OH\perp AC$.

3) $AO\perp AT$ и $OC\perp CT$, т.к AT и CT-касательные к ω. $\Rightarrow \angle OAT=\angle OCT=90^\circ \Rightarrow$

AT и CT пересекут окр. в точках образующих диаметр с (·)O.

4) AT и TC-отрезки касательной $\Rightarrow AT=TC$, тогда $T\in$ серед. перпенд. OH.

5) Отсюда вытекает, что $T\in$ окружности опис. около AOC.

6) Т.к $OH\perp AC$ и AOC-равнобедренный $\Rightarrow HA=HC=9t$. $\Rightarrow HK=t$.

7) Пусть $\angle ABC=\alpha$, тогда ∪AC окр ω равна 2α $\Rightarrow \angle AOC=2\alpha$, т.к центрально $\Rightarrow$

$\angle AOH=\angle HOC=\alpha$ и также $\cup AT=\cup TC=2\alpha$, т.к $\angle AOC$-впис. во 2-ю окружность

~~8)~~ Т.к OT-биссектриса (∪OH)

7) Впис углы: $\angle APT$ и $\angle CPT$ опираются на ∪AT и ∪CT $\Rightarrow \angle APT=\angle CPT=\alpha$.

8) $AB\parallel PT$ (соответств углы $\angle ABC=\angle TPC=\alpha$; секущ BC)

9) $\triangle KCP\sim\triangle CAB$ ($\angle C$-общ и $\frac{BC}{PC}=\frac{AC}{KC}=\frac{18t}{8t}=\frac{9}{4}$, т.к $S_{KCP}=8 \Rightarrow \frac{S_{KPC}}{S_{ABC}}=\left(\frac{4}{9}\right)^2 \Rightarrow$

$S_{ABC}=\frac{81\cdot S_{KPC}}{16}=\frac{81\cdot 8}{16}=40{,}5$.

Чистовик (2)

№4.

$НОД=10=2^1\cdot5^1$

$НОК=2^{17}\cdot5^{16}$.

Зададим 2 условия для a,b,c:

1) a, b и c не могут содержать одновременно и 2 и 5, т.к тогда НОД будет не 10, а 2 или 5.

2) a, b и c не содержат делителей отличных от $2^a\cdot5^b$, т.к тогда НОД и НОК будут содержать что-то лишнее.

I вид, который нам подходит:

$$\begin{matrix}2^{d_1}\\2^{d_2}\\5^{d_3}\end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix}2^{d_1}\\5^{d_2}\\5^{d_3}\end{matrix} \quad \text{чтобы НОК был } 2^{17}\cdot5^{16}$$

$d_1=17$

$d_2\in(0;17)$

$d_3=16$.

И т.к нам нужна тройка, возьмём $3!=6$ подстановок, получим:

$6\cdot16+6\cdot15+1=186$

II вид:

$$\begin{matrix}2^{d_1}=2^{d_2}=2^{17}\\5^{d_3}=5^{16}\end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix}2^{d_1}=2^{17}\\5^{d_1}=5^{d_4}=5^{16}\end{matrix}$$

Таких видов по 1 штуке и по 3 перестановки: 3.

$3+3=6$

3вид.

2^{d_1}

$2^{d_1}\cdot 5^{d_3}$

5^{d_4}

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} d_4=16 \\ d_3\in[0;16] \end{cases} \\ \begin{cases} d_3=16 \\ d_3\in[0;16] \end{cases}\end{array}\right. \text{ — 1 выбор}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} d_1=17 \\ d_2\in[0;17] \end{cases} \\ \begin{cases} d_2=17 \\ d_1\in[0;17] \end{cases}\end{array}\right. \text{ — 2 выбор.}$$

Мы делали вывод из двух состояний системы т.к они симметричны, то ~~всего~~ всего случаев 4; a;b и c — различны, значит, их подстановок в знак — $3!=6$.

Т.е.

$3вид = 17+16\cdot 4\cdot 6 = ~~6836~~\ 6528.$

Ответ. $6528+186+6=6720.$

21104372 (U850268 M1296240)

Черновик ①

№4.

$НОД(a;b;c)=10$

$НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot5^{16}$.

$x;y;z$.

$x\cdot a$, при этом $x⋮10$.

$y\cdot b$, при этом $y⋮10$.

$z\cdot c$, при этом $z⋮10$.

$2^{17}\cdot5^{16}⋮a$

$2^{17}\cdot5^{16}⋮b$

$2^{17}\cdot5^{16}⋮c$

$$\begin{array}{r} 17\\ \times16\\ \hline 102\\ +17\\ \hline 272\\ \times24\\ \hline 1088\\ +544\\ \hline 6528 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6528\\ +192\\ \hline 6720 \end{array}$$

№5.

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$; $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$; $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$2\log_{2x-8}(x-4)$; $\dfrac{\log_{x-4}(5x-26)}{2}$; $2\log_{5x-26}(2x-8)$

$2\log_{2(x-4)}(x-4)$.

$+\begin{cases}2x-8=x-4\\ x^2-13x+42=0\\ 5x-26=2x-8\end{cases}$

$x^2-6x+8=3x-12$.

$x^2-9x+20=0$.

$D=81-80=1$

$x_{1,2}=\dfrac{9\pm1}{2}$.

$x_1=5$

$x_2=4$.

[redacted] $x^2-8x+16=5x-26$.

[redacted] $x^2-13x+42=0$.

$D=169-168=1$

$x_{1,2}=\dfrac{13\pm1}{2}$

$5x-26=2x-8$

$3x=18$

$x=6$.

2.

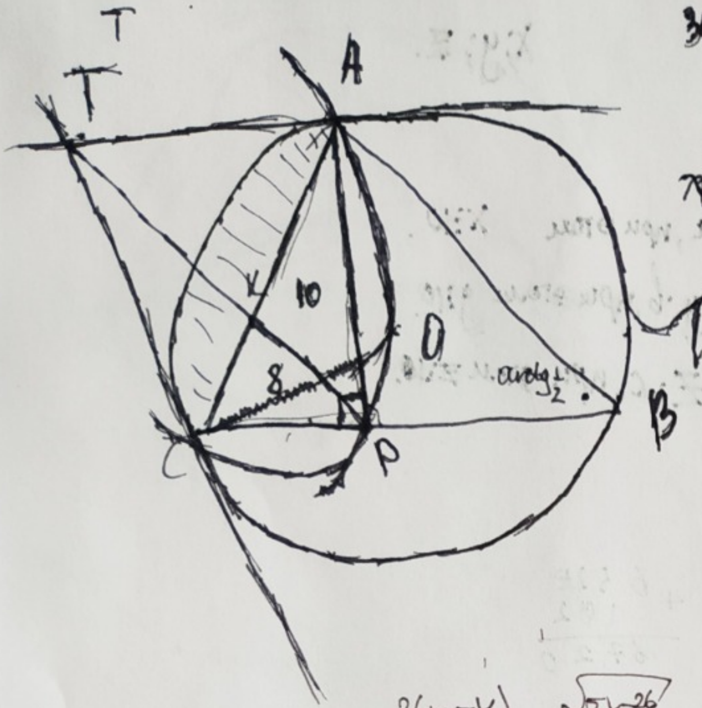
$\log 4(x-4)^2$.

$x_1=7$.

$x_2=6$.

$\log_{4t^2}t$ $\quad \dfrac{\log_{4t}t}{2}$ ~ $\log_{4t}t$..

21104372 (U850268 M1296240)



$\cos x = 2\sin x.$

36

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2}.$

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$

$\frac{2\sin x \cdot \cos x}{\cos x} = \frac{1}{2}.$

$\sin x = \frac{1}{4}.$

36 и 1
6 и 6.
2 и 18
3 и 12.
4 и 9

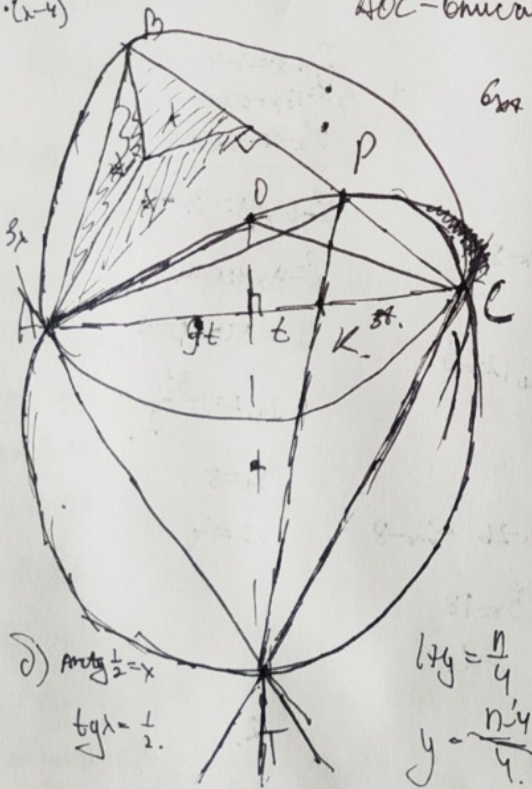
$2(x-4)$ $\sqrt{0x-26}$

$(2(x-4))^{\frac{1}{2}}.$

$\sqrt{2}\cdot(x-4)$

пусть APC-вписан в окр $(O; r)$.

AOC-вписан в окр $(O; r)$



$\frac{AC}{\sin APC} = 2r.$

$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}.$

$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}.$

$\operatorname{tg} x = 1.$

$1+\beta = \operatorname{arctg} 1$

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2}.$

$\frac{AC}{\sin B} = 2r.$

$2\sin x = \cos x.$

$\frac{x}{\sin(\operatorname{arctg}\frac{1}{2})} = 2r.$

б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = x$

$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}.$

$1 + y = \frac{\pi}{4}$

$y = \frac{\pi}{4}$

$\sin(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}) = \frac{x}{2r}.$

$x = 2r\cdot\sin(\operatorname{arctg}\frac{1}{2})$

$x + y = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$

21104372 (U850268 M1296240)