Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104350**

ID профиля: **900921**

Вариант 20

Олимпиада „Физтех" по математике
Часть 1; Вариант 20; 11 класс.

① S – сумма ар. пр. $a_1; a_2; a_3 \dots a_{15} \in \mathbb{Z}$ так же $a_n = a_1 + (n-1)b$, где b – разность прогр.

$\Rightarrow S = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \frac{a_1 + 14b + a_1}{2} \cdot 15 = (a_1 + 7b) \cdot 15$

• Известно, что: $a_6 a_{11} > S + 15$;
$a_8 a_9 < S + 39$

$\Rightarrow \begin{cases} a_6 a_{11} > S + 15 \\ a_8 a_9 < S + 39 \end{cases}$

$a_6 a_{11} = (a_1 + 5b)(a_1 + 10b) =$
$= (a_8 - 2b)(a_9 + 2b) =$
$= a_8 a_9 + 2b a_8 - 2b a_9 - 4b^2 =$
$= a_8 a_9 - 2b(a_9 - a_8) - 4b^2 =$
$= a_8 a_9 - 2b(a_1 + 8b - a_1 - 7b) - 4b^2 =$
$= a_8 a_9 - 2b \cdot b - 4b^2 =$
$= a_8 a_9 - 6b^2$

$\begin{cases} a_8 a_9 - 6b^2 > S + 15 \\ a_8 a_9 < S + 39 \quad | \times (-1) \end{cases}$

$+\begin{cases} a_8 a_9 - 6b^2 > S + 15 \\ -a_8 a_9 > -S - 39 \end{cases}$

$a_8 a_9 - a_8 a_9 - 6b^2 > S - S + 15 - 39$

$-6b^2 > -24 \quad | : (-6)$

$b^2 < 4$

$b^2 - 4 < 0$ | $b^2 - 4 = 0$
$b = \pm 2$

+ – +
-2 $+2$

$\Rightarrow b \in (-2; +2)$ т.к. прогрессия $a_1; a_2; a_3 \dots a_{15}$ – возрастающая (см. условие), то:

$b > 0 \Rightarrow b \in (0; 2)$, но т.к. $b \in \mathbb{Z}$

то $b = 1 \Rightarrow$

21104350 (U900921 M1299309)

$$\Rightarrow \begin{cases} a_6 a_{11} \geq S + 15 \\ a_8 a_9 \leq S + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 + 5b)(a_1 + 10b) \geq (a_1 + 7b) \cdot 15 + 15 \\ (a_1 + 7b)(a_1 + 8b) \leq 39 + (a_1 + 7b) \cdot 15 \end{cases} \quad (b = 1)$$

$$\begin{cases} (a_1 + 5)(a_1 + 10) \geq 15(a_1 + 7 + 1) \\ (a_1 + 7)(a_1 + 8) \leq 24 + 15(a + 7 + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + \cancel{15a_1} + 50 \geq \cancel{15a_1} + 8 \cdot 15 \\ a_1^2 + \cancel{15a_1} + 56 \leq 24 + \cancel{15a_1} + 8 \cdot 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 \geq 70 \\ a_1^2 \leq 88 \end{cases} \Leftrightarrow 70 < a_1^2 < 88$$

т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ подойдет $a = 9$

т.к. $70 < a_1^2 < 88$ при $a_1 = 9$

$70 < 81 < 88$

верно.

$\Rightarrow a_1 = 9$

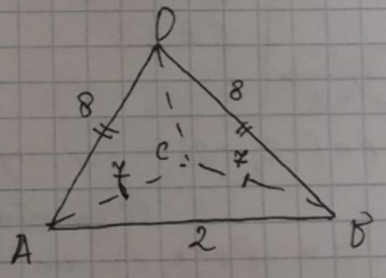
Ответ: 9.

(2) $ABCD$ – тетраэдр

при чём $AB = 2$;

$AC = BC = 7$;

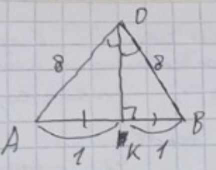
$AD = BD = 8$



Страница 2

1) т.к. $AD = DB = 8$ то $\triangle ADB$ – равно-

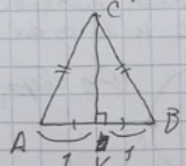
-бедренный, то
DK высота; мед; бисс. в $\triangle ADB$



1) Найдем DK:

$KD = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{63}$ - по т Пифагора в $\triangle ABD$

• аналогично для $\triangle ACB$:



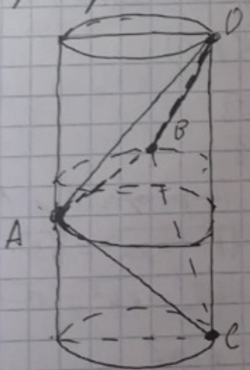
$KC = \sqrt{AC^2 - AK^2} =$

$= \sqrt{49 - 1} = \sqrt{48}$

при этом у DK и CK - точка пересечения: K на стороне AB т.к. оба треуг. равнобедренные и опираются на одну сторону: AB:

2) Предположим как тетраэдр можно вписать в цилиндр. Так, чтобы ~~от~~ точки касания фигур были на боковой пов-ти цилиндра:

Например так:



В данном случае все вершины тетраэдра лежат на боковой стороне цилиндра:

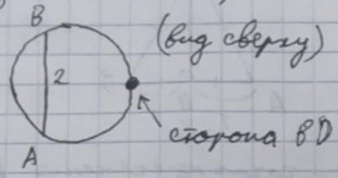
• Так же возможен вариант, что вместо DC на боковой ~~стороне~~ пов-ти лежит AB.
но этот вариант не выгоден т.к. точки A и B будут зафиксированы и уменьшить радиус. цилиндра будет нельзя.

21104350 (U900921 M1299309)

• Отметим еще то что AB в представленном, мной случае будет || основаниям цилиндра.

Т.к. △ABC и △ABD – равнобедренные и если AB не будет || основаниям то AD ≠ DB и AC ≠ CB – что противоречит условиям.

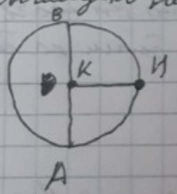
3) Рассмотрим плоскость в которой находится отрезок AB и которая || основаниям:



самый маленький радиус, который мы можем получить =2 (в случае, когда AB – диаметр)

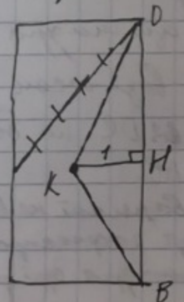
=> тогда R – радиус цилиндра = 1.

Тогда эта плоскость будет выглядеть так:



Проведем из середины AB (из центра окружности – K) отрезок KH ⊥ BD: этот отрезок: KH – радиус => KH = 1

4) Рассмотрим плоскость (KHD):



$KD = \sqrt{63}$

$KC = \sqrt{48}$

=> По Т. Пифагора в △KHD:

$DH = \sqrt{KD^2 - KH^2} = \sqrt{63-1} = \sqrt{62}$

$HB = \sqrt{KB^2 - KH^2} = \sqrt{48-1} = \sqrt{47}$

$\Rightarrow BD = \sqrt{62} + \sqrt{47}$

Ответ: $\sqrt{62} + \sqrt{47}$.

21104350 (U900921 M1299309)

③ M - фигура из точек $(x;y)$ в XOY
, что существуют $(a;b)$ - решения для

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;13)\end{cases}$$

Найти: площадь M

1) Попробуем построить области которые задают неравенства в осях aOb:

• Рассмотрим: $a^2+b^2 \le \underbrace{\min(-4a-6b;13)}_{\text{минимальное из чисел } (-4a-6b) \text{ и } 13.}$

=> 1) если $-4a-6b \ge 13$

$-4a \ge 6b+13 \mid :(-4)$

$a \ge -\frac{3}{2}b - 3{,}25$ $\quad a = -\frac{3}{2}b - 3{,}25$ - узловая линия.

, то уравнение имеет вид: $a^2+b^2 \le 13$ - круг ограниченный окружностью с ц. в точке $(0,0)$ и радиусом $\sqrt{13}$.

2) если $-4a-6b < 13$

$a < -\frac{3}{2}b - 3{,}25$

, то: $a^2+b^2 \le -4a-6b+13-13$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$

круг огранич. - окр. ц. в точке $(-3;-2)$ и радиусом $\sqrt{13}$

• 2-е нер-во: $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$

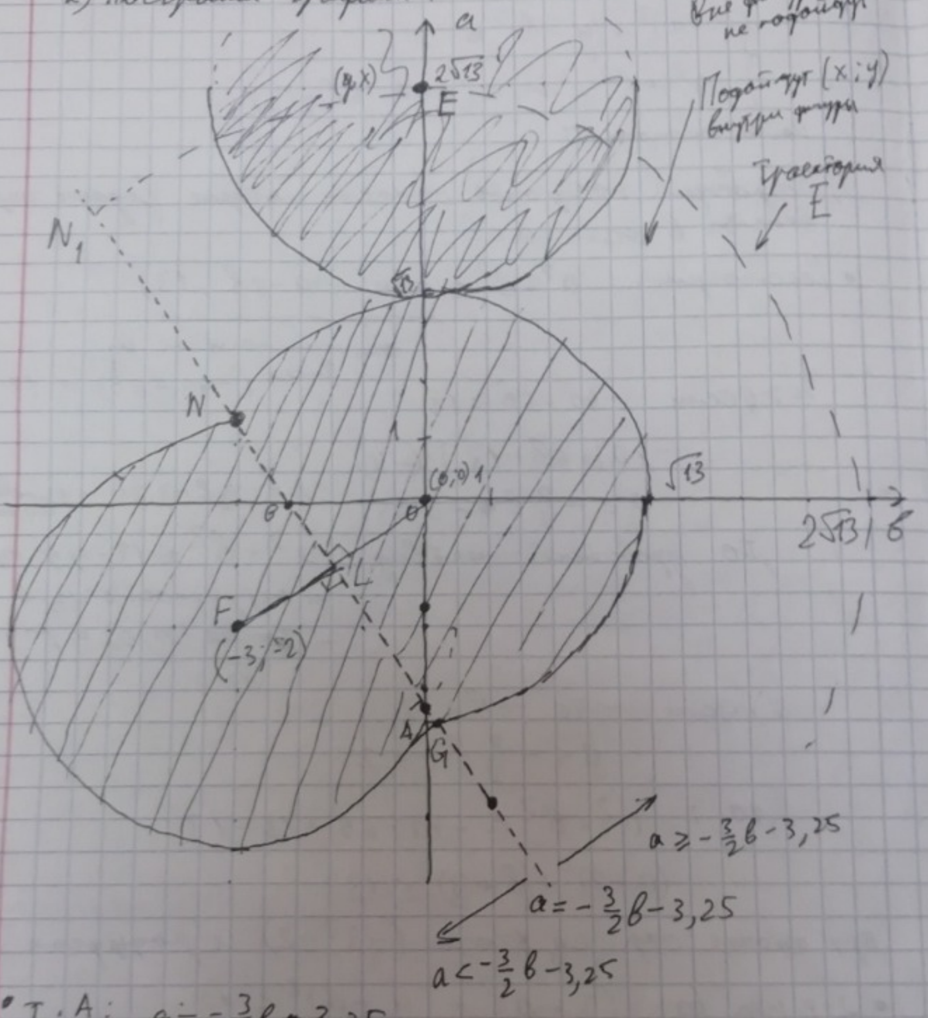
$(a-x)^2+(b-y)^2 \le 13$

- круг. ограниченный окружн. с ц. $(y;x)$ и

21104350 (U900921 M1299309)

и радиусом { $\sqrt{13}$

2) Построим графики:



• т. A: $a = -\frac{3}{2}b - 3,25$

$b = 0 \Rightarrow a = -3,25 \Rightarrow A(0; -3,25)$

• B: $0 = -\frac{3}{2}b - 3,25$

$-\frac{3,25 \cdot 2}{3} = b \Rightarrow b = -\frac{6,5}{3}$

$\Rightarrow B\left(-\frac{6,5}{3}; 0\right)$;

• $FL = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{4}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

• $3 < \sqrt{13} < 4$; $\sqrt{13} > 3,25$

$13 \cdot 16 > 13^2$

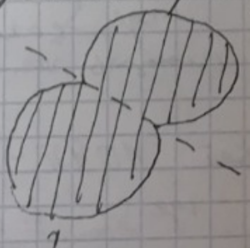
3) Чтобы у системы было решение $(a, -b)$ необходимо, чтоби точка E перемещалось по траектории:

1) Пока $a \geq -\frac{3}{2}b - 3,25$ то E движется по окр. с радиусом $2\sqrt{13}$ вокруг точки $(0,0)$:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 52 \\ a \geq -\frac{3}{2}b - 3,25 \end{cases}$$

После аналогичным образом вокруг точки $(-3; 2)$ т.к. окружности из 2-го нерав-ва симметричны относительно. $a = -\frac{3}{2}b - 3,25$

Получается примерно такая фигура:

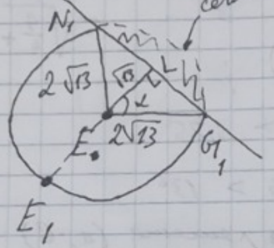


1

Траектория E (граница.

21104350 (U900921 M1299309)

Рассм. 1-у окружность:



$E_1L = \sqrt{13} + \sqrt{13} + FL =$

$= \sqrt{13} + \sqrt{13} + \frac{\sqrt{13}}{2} =$

$= 2,5\sqrt{13}$

$\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle N_1EG_1 = 2\alpha = 120^\circ$

$\angle N_1EG_1 = 120^\circ$

$\Rightarrow \frac{S_{фигуры}}{2} = \frac{2}{3}\pi(2\sqrt{13})^2$ — т.к. фигура M состоит из 2 таких частей

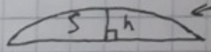
$\Rightarrow S_{фигуры} = \frac{4 \times \pi \times 4 \times 13}{3} =$

$= \frac{208}{3}\pi$ — площадь фигуры M

Ответ: $\frac{208}{3}\pi$

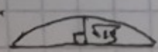
$\frac{S_ф}{2} = \pi(2\sqrt{13})^2 - S_{сегм}$

$S_ф = \cancel{2} \cdot 104\pi - 2S_{сегм}$ — где $S_{сегм}$ — площадь сегмента:



$c\,h = \frac{2\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}$

Ответ: $104\pi - 2S_{сегм.}$, где $S_{сегм}$ = площади сегмента $c\,h = \sqrt{13}$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104350**

ID профиля: **900921**

Вариант 20

Олимпиада „Физтех" математика
Вариант 20 11 класс
2-я часть.

(4) $(a;b;c)$ - кол-во таких троек которые:

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 2\cdot5 \\ НОК(a;b;c) = 2^{17}\cdot5^{16} \end{cases}$$

1) Т.к. $НОК(a;b;c) = 2^{17}\cdot5^{16}$, то любое из чисел: $a;b;c$ можно представить в виде $2^p\cdot5^q$ иначе число $2^{17}\cdot5^{16}$ не разделится нацело.

Тогда давайте представим: $a=2^i\cdot5^j$;
$b=2^k\cdot5^n$;
$c=2^f\cdot5^g$

Тогда: $НОД(a;b;c)=2^{min(i;k;f)}\cdot5^{min(j;n;g)}$;
$НОК(a;b;c)=2^{max(i;k;f)}\cdot5^{max(j;n;g)}$

где $min(a;b\ldots)$ - минимальное из чисел $a;b\ldots$
$max(a;b\ldots)$ - ~~ма~~ максимальное из чисел $a;b\ldots$

$$1 \Rightarrow \begin{cases} min(i;k;f) = min(j;n;g) = 1 \\ max(i;k;f) = 17 \\ max(i;k;f) = 16 \end{cases}$$

Посчитаем кол-во вариантов в каждой тройке:

- тройка $(i;k;f)$ - известно, что минимальное: 1;
максимальное: 17;
оставшаяся может принимать 16 значений

всего может быть 3! перестановок $(i;k;f)$ и на каждую: $1\cdot1\cdot16$ вариантов:

Страница 1

всего: $16 \times 3!$ вариантов для 1-й тройки $(i; k; f)$

• Для тройки $(j; n; g)$
тоже $3!$ перестановок и на каждую уже:
$1 \times 1 \times 15$ вариантов.
$\Rightarrow$ всего $15 \times 3!$ вариантов.

На каждый вариант из тройки $(i; k; f)$ будет любой вариант из 2-й тройки $(j; n; g)$

$\Rightarrow$ N - всего вариантов:

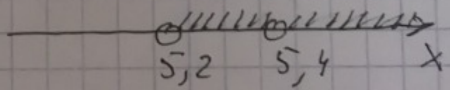
$N = 15 \times 3! \times 16 \times 3! = 8640$ вариантов

Ответ: 8640.

② Числа: $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$; $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$; $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

Найти x при котором два равны а одно отличается на $+1$.

1) Ограничение:
$$\begin{cases} 2x-8>0 \\ \sqrt{2x-8} \neq 1 \\ x-4>0 \\ (x-4)^2 \neq 1 \\ 5x-26>0 \\ 5x-26 \neq 1 \end{cases} \iff x \in (5{,}2; 5{,}4) \cup (5{,}4; +\infty)$$



2) Пусть $2x-8=a$; $x-4=b$; $5x-26=c$

Тоц

…ница 2

21104350 (U900921 M1299310)

Тогда числа равны: $\log_{a^{\frac{1}{2}}} b = 2\log_a b = s$

$\log_{b^2} c = \frac{1}{2}\log_b c = y$

$\log_{c^{\frac{1}{2}}} a = 2\log_c a = z$

• $s = \log_a b \cdot 2 = 2\frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{2}{\log_c a \log_b c} =$

$= \frac{2}{2\log_c a \frac{1}{2}\log_b c} = \frac{2}{yz}$

• $y = \frac{1}{2}\log_b c = \frac{1}{2}\cdot\frac{\log_a c}{\log_a b} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\log_a b \log_c a} =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{2\log_a b \cdot \log_c a \cdot 2} = \frac{2}{sz}$

• $z = 2\log_c a = 2\frac{\log_b a}{\log_b c} = 2\frac{1}{\frac{1}{2}\log_b c \cdot 2\log_a b} =$

$= \frac{2}{s\cancel{z}y}$

- Такое возможно только когда все >0 и ~~обоих~~ два числа $= 1$, а третье 2.

$\Rightarrow$ 1 вариант: Пусть $s = 2$, а $y = z = 1$

Тогда

Страница 3

$$\begin{cases} 2\log_a b = 2 \\ \frac{1}{2}\log_b c = 1 \\ 2\log_c a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b = 1 \\ \log_b c = 2 \\ \log_c a = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ b^2 = c \\ a^2 = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-8 = x-4 \\ (x-4)^2 = 5x-26 \\ (2x-8)^2 = 5x-26 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ 0 = 20-26 \\ 0 = 20-26 \end{cases}$$ неверно!

2 вариант: $s = y = 1$; $z = 2$

$$\begin{cases} 2\log_a b = 1 \\ \frac{1}{2}\log_b c = 1 \\ 2\log_c a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b^2 \\ b^2 = c \\ c = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-8) = (x-4)^2 \\ (x-4)^2 = 5x-26 \\ 2x-8 = 5x-26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = 2^2 \\ 2^2 = 30-26 \\ x = 6 \end{cases}$$ ~~неверно~~ верно $\Rightarrow x = 6$ (подходит под ограничение)

3 вариант: $s = z = 1$ или $y = 2$

$$\begin{cases} 2\log_a b = 1 \\ \frac{1}{2}\log_b c = 2 \\ 2\log_c a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b^2 \\ b^4 = c \\ c = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-8 = (x-4)^2 \\ (x-4)^4 = 5x-26 \\ 5x-26 = (2x-8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

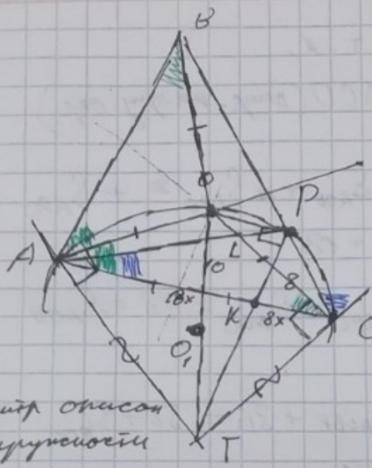
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6;\ x = 4 \\ (x-4)^4 = 5x-26 \\ 5x-26 = (2x-8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} x = 6 \\ 2^4 = 4 \end{cases}}$$ неверно

$$\Rightarrow x = 6$$

<u>Ответ: 6.</u>

См. 3 на следующей странице.

③



Дано
$\triangle ABC$ – остроуг.
O – центр опис. окр ω
окружность вокруг:
$AOC \cap BC = P$
$\angle OCT = \angle OAT = 90°$
$TP \cap AC = K$
$S_{APK} = 10$
$S_{CPK} = 8$
а) Найти S_{ABC}
б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$
Найти AC.

а) • O – центр описан ~~ного~~ окружности
$=> AO = OC = OB$

• т.к. $S_{APK} / S_{PKC} = 10/8 =>$
$=> AK/KC = 10/8$

2) Так же четырехугольник APCT – имеет 2 прямых противолеж угла => вокруг него описана окружность с ц. O_1
=> по св.-ву пересек. хорд $PK/KT = CK/AK = 8/10$;
$\angle OAT = \angle OCT = 90° => OT$ – диаметр окр. с ц O_1

3) $\triangle AOC$ – равнобед $=> \angle OAC = \angle OCA$
то т.к. $\angle OAT = \angle OCT = 90°$, то
$\angle CAT = \angle ACT$
$=> \angle AT = \angle CT => AT = TC$

~~=> TO_1 биссект. мед, высота~~

Страница 5

$\angle ACO = \angle OAB$ т.к.

$\angle BAO = \angle ACO$ (опир. на одну окр)

4) $S_{\triangle ABC} = S_{AOBP} + S_{AOB} + S_{LPC} + S_{APC}$

$= S_{AOBP} + S_{AOB} + 18$

5) $OP \parallel AC \Rightarrow S_{APC} = S_{AOC} = 18 = S_{AOB}$

$\Rightarrow S_{ABC} = S_{AOBP} + 36 = 36 + S_{BOC}$

$S_{BOC} = 12$

$\Rightarrow S_{AOC} = 48$

<u>Ответ: а) 48</u>