Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104333**

ID профиля: **892255**

Вариант 20

Чистовик

Задача № 1.

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=S \\ a_6\cdot a_{11} > S+15 \\ a_8\cdot a_9 < S+39 \end{cases}$$

$a_1 - ?$

$S = a_1 + a_1+d + a_1+2d + a_1+3d + a_1+4d = 5a_1+10d$

$$\begin{cases} (5d+a_1)(a_1+10d) > 5a_1+10d+15 \\ (a_1+7d)(a_1+8d) = 5a_1+10d+39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+15a_1d+50d^2 > 5a_1+10d+15 \\ a_1^2+15a_1d+56d^2 < 5a_1+10d+39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1+15a_1d+56d^2 > 5a_1+10d+15+6d^2 \\ a_1^2+15a_1d+56d^2 < 5a_1+10d+39 \end{cases}$$

$5a_1+10d+15+6d^2 < a_1+15a_1d+56d^2 < 5a_1+10d+39$

$5a_1+10d+15+6d^2 < 5a_1+10d+39$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4 \Rightarrow d \in (-2;2)$

т.к. у нас возр. арифмет. прогрессия, состоящая из целых чисел, значит $d>0$ и $d \in Z \Rightarrow d \in N \Rightarrow d=1;2$

21104333 (U892255 M1298525)

2) $d=2$ Чистовик

$$\begin{cases} a_1^2+30a_1+200 > 5a_1+20+15 \\ a_1^2+30a_1+224 < 5a_1+20+39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+25a_1+165>0 \\ a_1^2+25a_1+165<0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$$

Ответ: $a_1=\varnothing$.

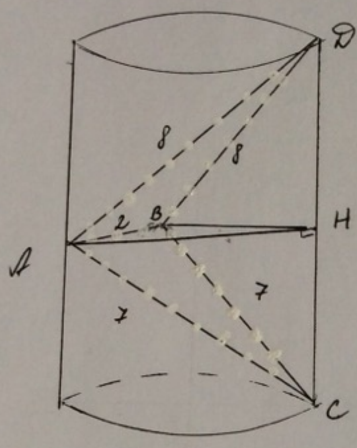
Из первого и второго случая:

Ответ: $a=\{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$.

21104333 (U892255 M1298525)

Чистовик

Задача №2



$\Delta BDC = \Delta ADC$

(DC – общ.; $AD = BD = 8$; $AC = BC = 7$)

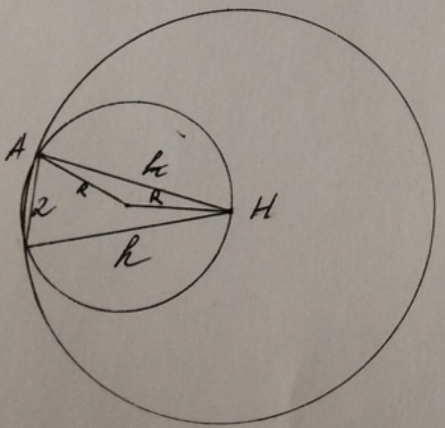
$\Rightarrow BH_1 = AH_2$ (высоты треугольников)

$\frac{DH_1}{H_1C} = \frac{DH_2}{H_2C} \Rightarrow H_1$ и H_2 – в одной точке H

плоскость $ABH \perp DC$; плоскость основания $\perp DC$

$\Rightarrow$ плоскость $AHB \parallel$ плоскости основания $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ радиус цилиндра равен радиусу описан. окружности треугольника ABH



Чем меньше $h = AH$, тем меньше R (радиус цилиндра)

$h + h < AB = 2$

$2h < 2 \Rightarrow h < 1$.

В треугольнике BDC: Чем меньше BH, тем больше DC

$DC < BD + BC = 8 + 7 = 15. \Rightarrow DC < 15.$

Ответ: $CD = 14,(9)$.

4

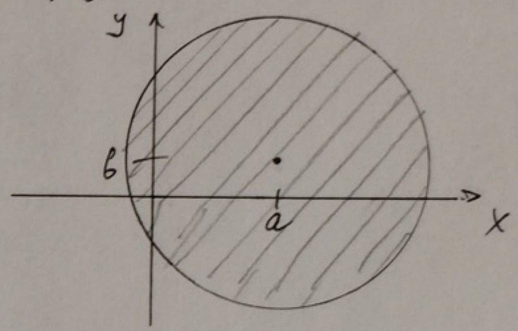
21104333 (U892255 M1298525)

Чистовик

Задача № 3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b; 13) \end{cases}$$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$ – это круг центр, которого находится в точке с координатами $(a; b)$, радиус равен 13



21104333 (U892255 M1298525)

Черновик

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=S$

$a_6\cdot a_{11}>S+15$

$a_8\cdot a_9<S+39$

$a_1-?$

$\frac{a_1+a_n}{n}\cdot n=$

$2\ 4\ 6\ 8\ 10=30$

$\frac{2\cdot 10}{5}\cdot 5\ 4$

$a_1+a_1+d+a_1+2d+a_1+3d+a_1+4d$

$S=5a_1+10d$

$$\begin{cases}(a_1+5d)(a_1+10d)>5a_1+10d+15\\(a_1+7d)(a_1+8d)<5a_1+10d+39\end{cases}$$

$a_1^2+15a_1d+50d^2>5a_1+10d+15$

$a_1^2+15a_1d+56d^2<5a_1+10d+39$

$5a_1+10d+15+6d^2<5a_1+10d+39$

$6d^2<24$

$d^2<4\Rightarrow d\in(-2;2)\Rightarrow d=1;2$

$d=1$

$$\begin{cases}a_1^2+15a_1+50>5a_1+10+15\\a_1^2+15a_1+56<5a_1+10+39\end{cases}$$

49

$$\begin{cases}a_1^2+10a_1+25>0 & (a+5)^2>0\\a_1^2+10a_1+7<0\end{cases}$$

$D=100-28=72=6\sqrt{2}$

$a_{1,2}=\frac{-10\pm6\sqrt{2}}{2}=-5\pm3\sqrt{2}$

1,4 ×3 / 4,2

$-9{,}2<a_1<-0{,}8$

$-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1$

1

21104333 (U892255 M1298525)

$d=2$ Черновик

$\begin{cases} a_1^2+30a_1+200 > 5a_1+20+15 \\ a_1^2+30a_1+224 < 5a_1+\underset{59}{20}+39 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+25a_1+165 > 0 \\ a_1^2+25a_1+165 < 0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

$-9; -8; -7; -6; -5. = -35$

$-4 \cdot 1 = -4 > -35+15 = -20$

$2 < 4$

$-8; -7; -6; -5; -4 = -30$

$-6 > -15$

$-1; 0; 1; 2; 3 = 5$

$4 \cdot 9 = 36 > 20$

$42 < 44$

$0\ 1\ 2\ 3\ 4 = 10$

$5 \cdot 10 > 25$

$56 < 49$ $\varnothing$

$-5; -4; -3; -2; -1 = -15$

$\varnothing$

$0\ 7\ 0$

$\begin{array}{r} 56 \\ \times 4 \\ \hline 224 \end{array}$ $\begin{array}{r} 224 \\ -59 \\ \hline 165 \end{array}$

$\begin{array}{r} 14 \\ \times 3 \\ \hline 42 \end{array}$

$\begin{array}{r} 135 \\ \times 135 \\ \hline 675 \\ 405 \\ 135 \\ \hline 18225 \end{array}$

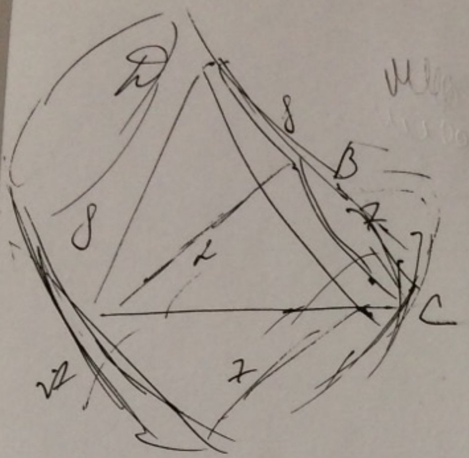
$\begin{array}{r} 13 \\ \times 13 \\ \hline 196 \end{array}$

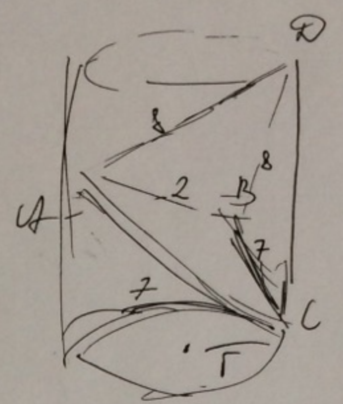
$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 296 \end{array}$

2

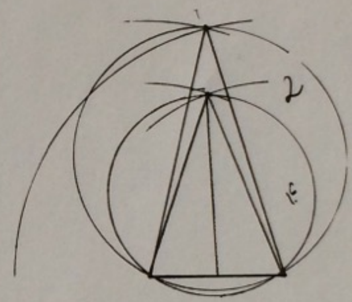
21104333 (U892255 M1298525)

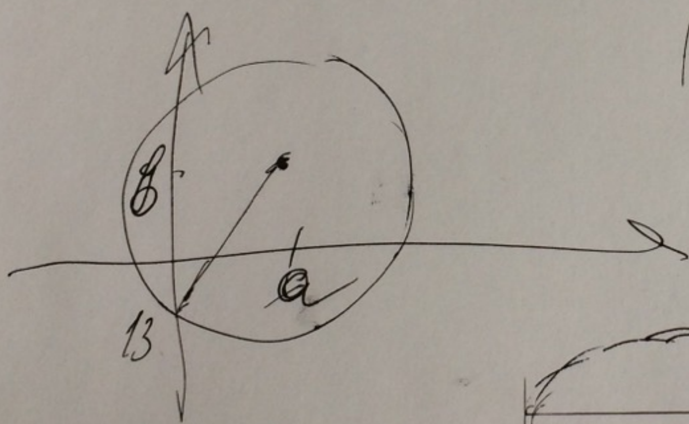
Черновик

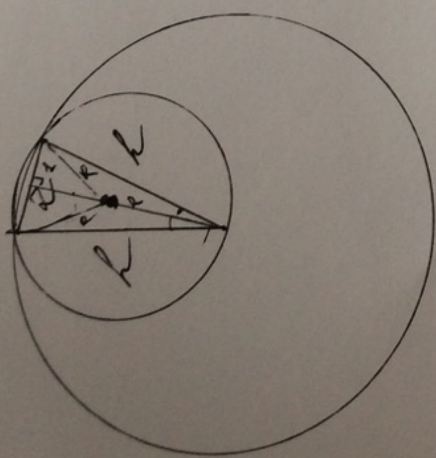


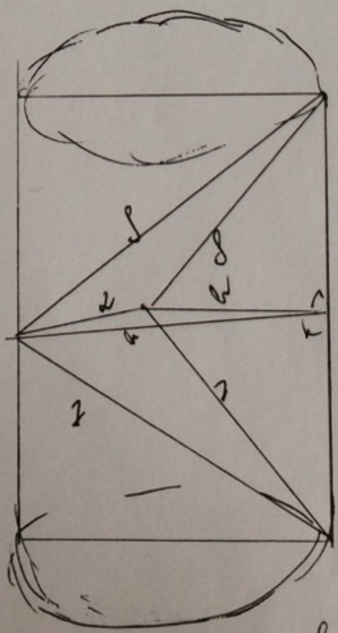


$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a+6b;\ 13)\end{cases}$$

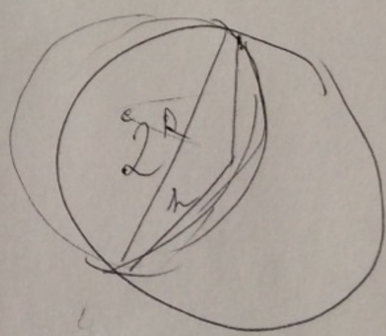








$\cancel{AD} < 15.$



R – min $\Rightarrow h = \min$ 3

$r + h \ge 2.$ $2h \ge 2 \Rightarrow h \ge 1.$

Чистовик

1) $d=1$.

$$\begin{cases} 15a_1+a_1^2+50>5a_1+10+15 \\ a_1^2+15a_1+56>5a_1+10+39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0 \\ a_1^2+10a_1+7<0 \end{cases}$$

Первое можно свернуть в квадрат двучлена, т.е.

$a_1^2+10a_1+25=(a_1+5)^2$. Это выражение всегда больше либо равно „0". Т.к. у нас неравенство строгое, значит $a_1 \neq -5$

Второе решим через дискриминант:

$D=10^2-4\cdot 7=100-28=72=(6\sqrt{2})^2$

$$a_1=\frac{-10\pm 6\sqrt{2}}{2}=-5\pm 3\sqrt{2}$$

$\sqrt{2}\approx 1{,}4 \Rightarrow -5-3\sqrt{2}\approx -5-3\cdot 1{,}4=-5-4{,}2=-9{,}2$

$\Rightarrow -5+3\sqrt{2}\approx -5+3\cdot 1{,}4=-5+4{,}2=-0{,}8$

$a_1^2+10a_1+7<0 \Rightarrow a_1\in(-9{,}2;-0{,}8)$

$a_1\in Z \Rightarrow a_1=\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1\}$

Из первого нер-ва $a_1\neq -5 \Rightarrow a=\{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\}$

Ответ: $a=\{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\}$

2

21104333 (U892255 M1298525)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104333**

ID профиля: **892255**

Вариант 20

Чистовик

Задача №4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=10 \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

$10=2\cdot 5.$ => Каждое из этих трех чисел должно содержать хотя бы одну „2" и одну „5"

Но максимальное число двоек среди этих трех чисел должно быть равно 17, а пятерок – 16

Разобьем на 3 случая:

I
$a=2\cdot 5$
$b=2^{17}\cdot 5^{1\ldots 16}$
$c=2^{1\ldots 17}\cdot 5^{16}$

II
$a=2\cdot 5^{2\ldots 16}$
$b=2^{2\ldots 17}\cdot 5$
$c=2^{17}\cdot 5^{16}$

III
$a=2\cdot 5$
$b=2^{17}\cdot 5^{16}$
$c=2^{1\ldots 16}\cdot 5^{1\ldots 15}$

I случай:

a – 1 вариант
b – 16 вариантов => всего вариантов $=1\cdot 16\cdot 17=272$
c – 17 вариантов

Т.к. нужно учитывать порядок, то:

$272\cdot 6-3=1629$ вариантов

(-3) – т.к. там будет тройка $2\cdot 5$; $2^{17}\cdot 5^{16}$; $2^{17}\cdot 5^{16}$

21104333 (U892255 M1298526)

Чистовик

II случай:

а – 15 вариантов

в – 16 вариантов $\Rightarrow$ всего: $15 \cdot 16 = 240$ вар.

с – 1 вариант

т.к. нужно учитывать порядок, то:

$240 \cdot 6 = 1440$ вар

III случай:

а – 1 вариант

в – 1 вариант $\Rightarrow$ $15 \cdot 16 = 240$ вар.

с – $16 \cdot 15$ вариантов

т.к. нужно учитывать порядок, то

$240 \cdot 6 - 3 = 1437$ вар

(-3) т.к. там будет тройка $2 \cdot 5$; $2 \cdot 5$; $2^{17}\,6^{16}$

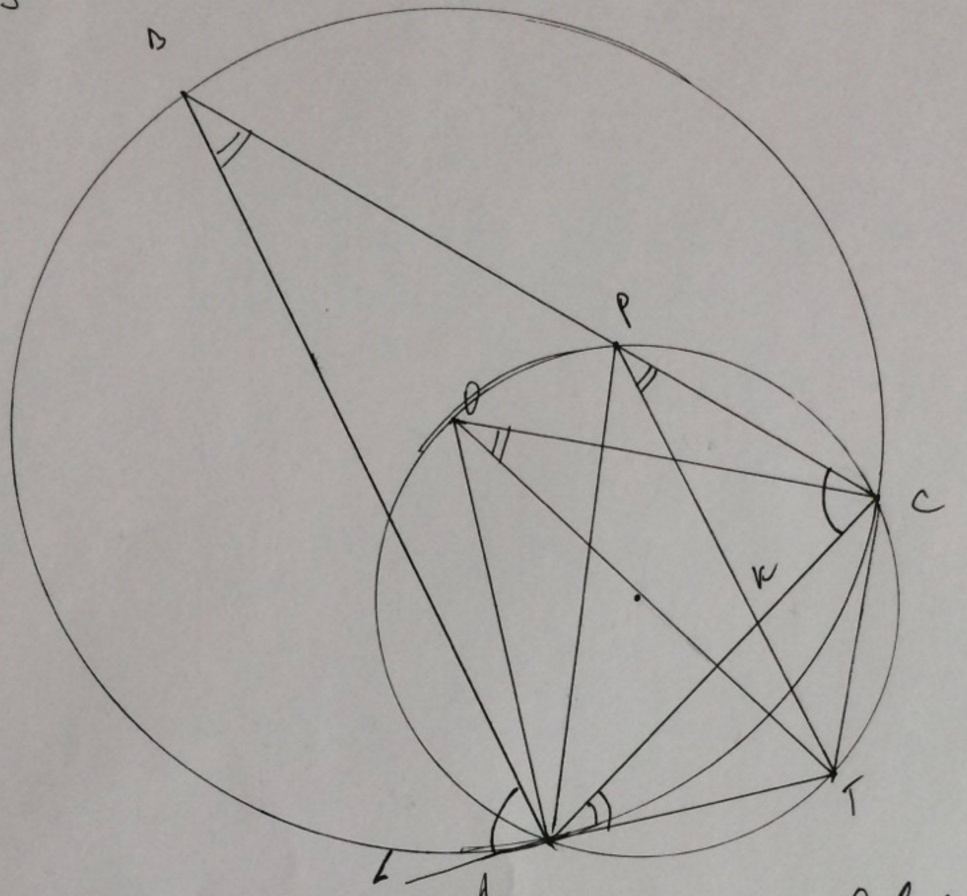
Общее: $1629 + 1440 + 1437 = 4506$

Ответ: 4506 вариантов

21104333 (U892255 M1298526)

Чистовик

Задача №6



T - лежит на той же окр., что и O, A и C, т.к

$\angle OCT = 90^\circ$ и $\angle OAT = 90^\circ$ (AT и CT - кас.) $\Rightarrow \angle OCT + \angle OAT = 180^\circ$

$\Rightarrow$ OCTA - вписанный.

$S_{\triangle APK} = 10$ $S_{\triangle CPK} = 8$.

$\angle LAB = \angle BCA$ (угол между касат. и хордой) $\Big\} \Rightarrow$

$\angle CAT = \angle CPT$ (угол м/ду касат и хордой)

$\Rightarrow \angle PKC = \angle BAC$ (LAT - прямая; $\angle PKC$ - треуг. $\Sigma_{\text{углов}} = 180^\circ$)

$\Rightarrow PK \parallel AB \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$

$\frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle CPK}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = \frac{AK}{KC}$ (высоты равны) $\Rightarrow \frac{CK}{AC} = \frac{4}{9} \Rightarrow$

3

21104333 (U892255 M1298526)

Чистовик

$$\frac{S_{\triangle KPC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{16}{81} = \frac{8}{S_{\triangle ABC}} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{8 \cdot 81}{16} = \frac{81}{2} = 40{,}5$$

$tg\angle ABC = tg\angle KPC = tg\angle COT$ ($\angle O$ и $\angle P$ опир. на $\breve{CT}$)

$$tg\angle COT = \frac{CT}{OP} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 40{,}5$

№ 4 Черновик

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 10 = 2\cdot 5 \\ НОК(a;b;c) = 2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 16 \\ \hline 102 \\ 17 \\ \hline 272 \end{array}$$

$a = 2\cdot 5$ $\quad$ $a = 2\cdot 5$

$b = 2^{17}\cdot 5$ $\quad$ $b = 2^{17}\cdot 5^{1\ldots16}$ $\quad$ 16 вар.

$c = 2\cdot 5^{16}$ $\quad$ $c = 2^{1\ldots17}\cdot 5^{16}$ $\quad$ 17 вар

$$16\cdot 17 - 1 = 271$$

---

1 $\quad$ 2 $\quad$ 3

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$ $\quad$ $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$ $\quad$ $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$1=2$

$\log_{\sqrt{2x-8}}\cancel{(x-4)} = \frac{1}{\quad}$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \frac{1}{\log_{(x-4)}\sqrt{2x-8}}$

$\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26) = \frac{1}{\log_{(x-4)}\sqrt{2x-8}}$

$\frac{1}{2}t = \frac{1}{t}$ $\quad$ $\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)\cdot\log_{(x-4)}\sqrt{2x-8} =$

$= 1$

$\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 32$

2 $\quad$ 3 $\quad$ 5.

1

21104333 (U892255 M1298526)

Черновик

$\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)\cdot\log_{(x-4)}\sqrt{2x-8} = \log_{(x-4)}(x-4)$

1

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) - \log_{(x-4)^2}(5x-26) = 0.$

$\frac{1}{\log_{(x-4)}\sqrt{2x-8}} - \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26) = 0.$

$1 - \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)\cdot\log_{(x-4)}\sqrt{2x-8} = 0.$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 1 + \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$

$\frac{1}{\log_{(2x-8)}\sqrt{5x-26}} = 1 + 2\log_{(2x-8)}(x-4)$

$1 = \log_{(2x-8)}\sqrt{5x-26} + 2\log_{(2x-8)}(x-4)\cdot\log_{(2x-8)}\sqrt{5x-26}$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 1 + \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$2\log_{(5x-26)}(2x-8) = 1 + \frac{1}{2\log_{(5x-26)}(x-4)}$

$= 1 + \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

$\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26) = 2\log_{(5x-26)}(2x-8) - 1.$

2

21104333 (U892255 M1298526)

Черновик

$\log_{(5x-26)}(2x-8) = 1 + \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$

$\log_{(5x-26)}(2x-8) = 1 + \dfrac{1}{\log_{(x-4)}\sqrt{2x-8}}$

$\log_{(x-4)}\sqrt{2x-8} = \dfrac{1}{\log_{(5x-26)}(2x-8) - 1}$

$\dfrac{(2\log_{(5x-26)}(2x-8) - 1)}{\log_{(5x-26)}(2x-8) - 1.} = 1.$

$2\log_{(5x-26)}(2x-8) - 1 = \log_{(5x-26)}(2x-8) - 1.$

$\log_{(5x-26)}(2x-8) = 0.$

$2x-8 = 1 \Rightarrow 2x = 9 \Rightarrow x = 4{,}5.$

$2=3 \quad \log_{(x-4)^2}(5x-26) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2\log_{(5x-26)}(2x-8)$

$\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26) = 2\log_{(5x-26)}(2x-8)$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 1 + \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$2\log_{(2x-8)}(x-4) = 1 + \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

$\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26) = 2\log_{(2x-8)}(x-4) - 1.$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 1 + \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$\dfrac{2\log_{(2x-8)}(x-4)}{2\log_{(2x-8)}(x-4) - 1} = 1 + 2\log_{(5x-26)}(2x-8) \Rightarrow 2\log_{(5x-26)}(2x-8) = 2\log_{(2x-8)}(x-4) - 1.$

$2\log_{(2x-8)}(x-4) - 1 = 2\log_{(2x-8)}(x-4) - 1.$ ③

21104333 (U892255 M1298526)

Черновик

$1=3$ $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$2\log_{(2x-8)}(x-4) = 2\log_{(5x-26)}(2x-8)$

$\log_{(2x-8)}(x-4) = \log_{(5x-26)}(2x-8)$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = 1 + \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$

$\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26) = 1 + 2\log_{(2x-8)}(x-4)$

$\log_{(2x-8)}(x-4) = \dfrac{\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26) - 1}{2}$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = 1 + \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26) = 1 + 2\log_{(5x-26)}(2x-8)$

$\log_{(5x-26)}(2x-8) = \dfrac{\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)}{2} - 1$

$1=2$ $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$2\log_{2x-8}(x-4) = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 1 + \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$

$2\log_{5x-26}(2x-8) = 1 + 2\log_{(2x-8)}(x-4)$

$2\log_{(2x-8)}(x-4) = 2\log_{(5x-26)}(2x-8) - 1.$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 1 + \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$2\log_{(5x-26)}(2x-8) = 1 + \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

$2\log_{(5x-26)}(2x-8) - 1 = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

$2\log_{(5x-26)}(x-4) + 2\log_{(5x-26)}2 = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

$2t + 2\log_{(5x-26)}2 = \frac{1}{2t}$

$4t^2 + 4t\log_{(5x-26)}2 = 1$

4

21104333 (U892255 M1298526)

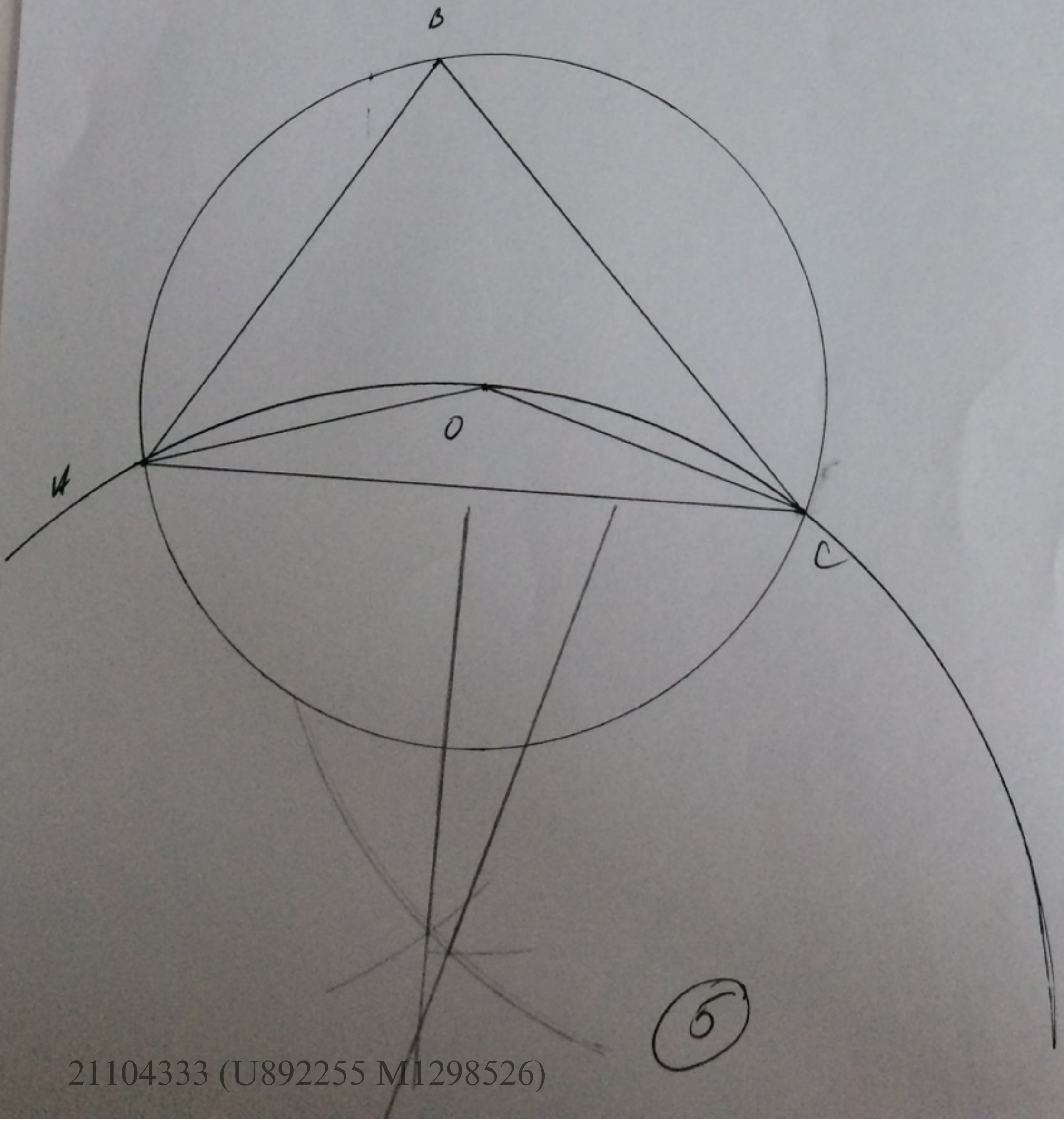
Черновик

$4t^2 + 4t \cdot \log_{(5x-26)} 2 - 1 = 0.$

$D = 16\log^2_{(5x-26)} 2 + 16 = \left(4\sqrt{\log^2_{(5x-26)} 2 + 1}\right)^2.$

$2\log_{(5x-26)} 2 = \frac{\log_{(x-4)}(5x-26)}{2} - \frac{2}{\log_{(x-4)}(5x-26)} = \frac{\log_{(x-4)}(5x-26) - 4}{2\log_{(x-4)}(5x-26)}$

$= \frac{\log_{(x-4)} \frac{5x-26}{(x-4)^4}}{\log_{(x-4)}(5x-26)^2}$



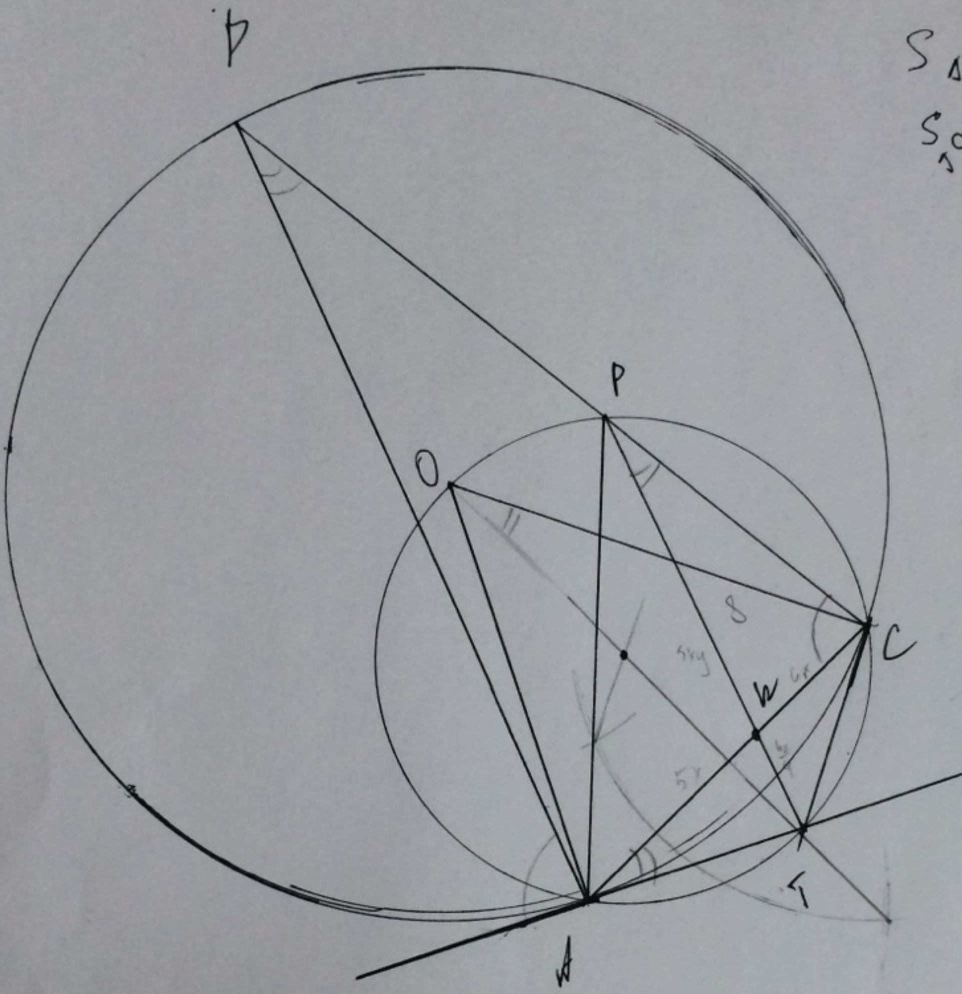
5

21104333 (U892255 M1298526)

Черновик

$S_{\triangle APK} = 10$

$S_{\triangle CPK} = 8$



6