Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104103**

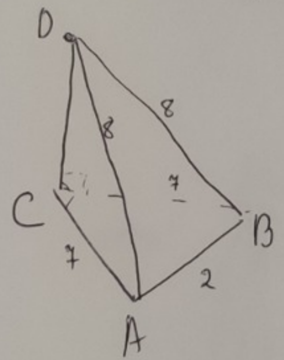
ID профиля: **328512**

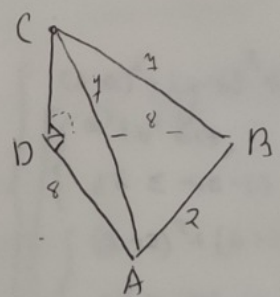
Вариант 20

№2. Чистовик

По условию цилиндр прямой (уточнено у организаторов), это означает, что CD перпендикулярно плоскости основания, т.к. ось цилиндра $\perp$ основанию.

Тогда сущ-вует 2 возможных варианта:





$(DC) \perp (ABC) \Rightarrow ADC$ - прямоуг.

$|DC| = \sqrt{8^2 - 7^2} = \sqrt{64-49} = \sqrt{15}$

Ответ: $|DC| = \sqrt{15}$

такого быть не может (катет больше гипотенузы)

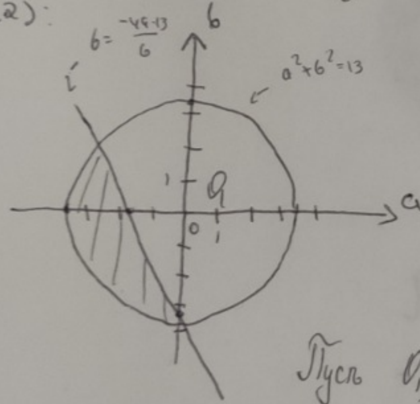
№ 3. Числовик

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13, \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \le 13 \\ -4a-6b \ge 13 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le -4a-6b, \\ -4a-6b < 13 \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

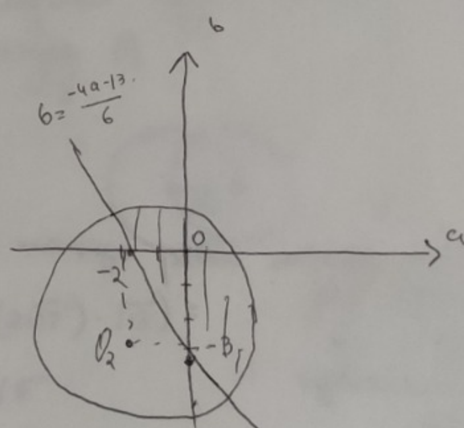
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \le 13, \\ -4a-6b \ge 13, \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+4a+4+b^2+6b+9 \le 13, \\ -4a-6b < 13, \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13, \quad (1) \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \le 13, \\ 6b \le -4a-13, \end{cases} \quad (2) \\ \begin{cases} (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13, \quad (3) \\ 6b > -4a-13. \end{cases} \end{array} \right. \end{cases}$$

(1)-е ур-е определят круг радиуса $\sqrt{13}$, с центром в $(a;b)$. Посмотрим какие значения принимают a и b.

(2):



(3):



3

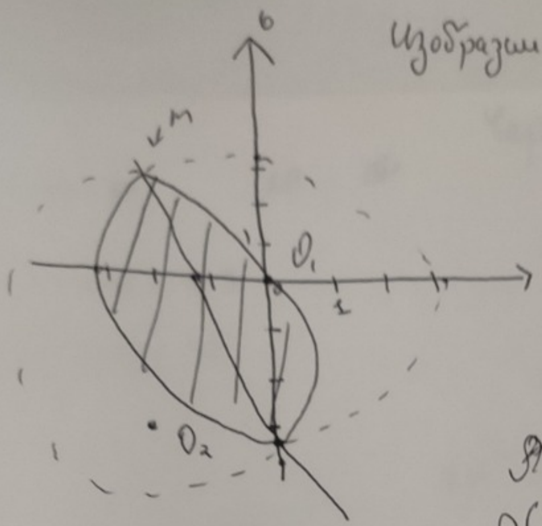
Пусть O_1, O_2 - центры ~~окр~~ кругов, нарисованных выше. Тогда заметим, что прямая O_1O_2 перпендикулярна ~~[illegible]~~ прямой $b=\frac{-4a-13}{6}=$
Действительно: O_1O_2: $b=\underbrace{\frac{3}{2}}a$ $\quad = -\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}$.

$$\frac{3}{2} = -\frac{1}{-\frac{2}{3}}, \qquad -\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}.$$

Это означает, что прямая $b=\frac{-4a-13}{6}$ является рад. осью 2х окр-тей. Заметим также, что $|O_1O_2|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$, поэтому 2-ой круг проходит еще и через $(0;0)$.

см. след. стр.

Чистовик



Изобразим на одном рисунке.

Тогда становится понятно, что мн-во M - это множество всех таких кругов радиуса $\sqrt{13}$ таких, что их центр „удовлетворяют картинке".

Пусть m - прямая $b = \frac{-4a-13}{6}$.

В силу симметрии:

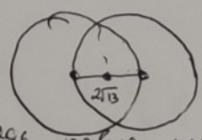
$$\rho(O_2; m) = \rho(O_1; m) = \frac{|O_1O_2|}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$S_{сегм.} = \frac{1}{2}\pi R h$.

~~Площадь фигуры на рисунке:~~

~~$2\cdot\frac{1}{2}\pi\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{13}{2}\pi$~~. Также понятно, что если двигать центр круга радиуса $\sqrt{13}$, то он будет пересекаться сам с собой.

Фактически мы увеличили радиус исходных кругов на $\sqrt{13}$ и получили фигуру M



Тогда искомая площадь равна площади пересечения двух кругов указанных на рисунке. (удвоенная площадь сегмента)

$$S = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\pi\cdot(2\sqrt{13})\cdot\sqrt{13}\right) = \pi\cdot 2\cdot 13 = 26\pi$$

Ответ: 26π.

Черновик

4 $-5+10=5$ 20 (4)

$(-1+5)(-1+10)=4\cdot 9$

$(-1+7)(-1+8)=42$

$\pi R^2 \frac{\alpha}{2\pi} =$

$R^2\frac{\alpha}{2}$

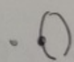
$S_0=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin\frac{\alpha}{2}(R-h)=$

$=R\sin\frac{\alpha}{2}(R-h)$

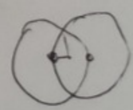
$\frac{\pi}{2\pi}=\frac{R}{2R}$

$R\left(\frac{R\alpha}{2}-\underbrace{\sin\frac{\alpha}{2}(R-h)}\right)$

$R\left(2\pi R\frac{\alpha}{2\pi}-\sin\frac{\alpha}{2}(R-h)\right)=$



$=R\left(\pi R\frac{h}{2R}-\frac{(R-h)\sqrt{R^2-(R-h)^2}}{R}\right)=$



$=\pi Rh-(R-h)\sqrt{2Rh+h^2}$

$h=R$

$R=\frac{h}{2}$ $h=\frac{R}{2}$

$\frac{\pi R^2}{4}$

$\pi h\left(R-\frac{h}{2}\right)$

$\pi R\left(R-\frac{R}{2}\right)=\frac{\pi R^2}{2}$

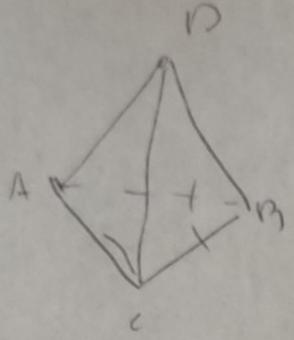
$\frac{\sqrt{3}R}{2}$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2$

$\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$

πR^2

21104103 (U328512 M1301429)



$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13,\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,13)\end{cases}$$

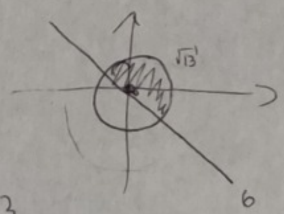
$(x-a)^2+(y-b)^2 \le a^2-b^2 \le 0;$

$(x-a-a)(x-a+a)+(y-b-b)(y-b+b)\le 0$

$(x-2a)x+(y-2b)y \ge 0$

$$\min(-4a-6b,13)=\left[\begin{array}{l}-4a-6b, \quad -4a-6b\le 13\\ 13, \quad -4a-6b>13\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-4a-6b\\ \end{cases}$

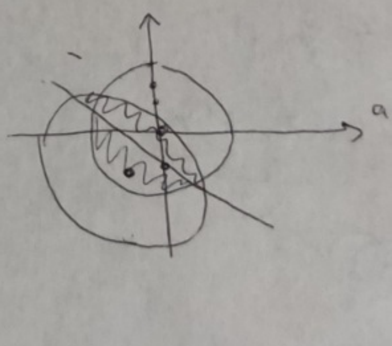


$a^2+b^2 \le -4a-6b;$

$a^2+4a+4+b^2+6b+9 \le 13$

$(a+2)^2+(b+3)^2$

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 13\\ -4a-6b>13\end{cases}$$



$b=\frac{-13-4a}{6}=0$

$-13-4a=0$

$a=-\frac{13}{4}$

$\frac{13}{4} < \sqrt{13}$

$\frac{169}{16} \le 13$

$\frac{13}{16} < 1$

Чистовик

11 класс. Вариант 20. Часть 1.

№1

Пусть a_1 - первый член прогрессии, d - её шаг.

$d>0$ т.к. прогрессия возрастает.

$$S = a_1 + \dots + a_5 = \frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5 = \frac{2a_1+4d}{2}\cdot 5 = 5a_1+10d.$$

По условию:

$$\begin{cases} a_6 a_{11} > S+15, \\ a_8 a_9 < S+39; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1+10d+15, \\ (a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1+10d+39 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+50d^2+15da_1 > 5a_1+10d+15, \\ a_1^2+56d^2+15da_1 < 5a_1+10d+39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+50d^2+15da_1 > 5a_1+10d+15, \\ -a_1^2-56d^2-15da_1 > -5a_1-10d-39; \end{cases} (*)$$

Тогда по т. о сложении неравенств одного смысла из (*) следует:

$-6d^2 > -24 \Leftrightarrow d^2 < 4 \Leftrightarrow d \in (-2;2) \Rightarrow d \in (0;2)$ т.к. $d>0$. (**)

По условию прогрессия состоит из целых чисел, поэтому: $a_1 \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z}$. Т.о. из (**) следует, что $d=1$.

Вернемся к (*):

$$\begin{cases} a_1^2+50+15a_1 > 5a_1+10+15, \\ a_1^2+56+15a_1 < 5a_1+10+39; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0, \\ a_1^2+10a_1+7<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+5)^2>0, \\ (a_1-(-5+3\sqrt{2}))(a_1-(-5-3\sqrt{2}))<0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -5, \ (***) \\ a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2}); \end{cases}$$

Оценим $-5 \pm 3\sqrt{2}$.

$-5-3\sqrt{2} \approx -5-4{,}2 = -6{,}2$

$\Downarrow$

$-5-3\sqrt{2} \leq -6$

$-5+3\sqrt{2} \approx -5+4{,}2 = -0{,}8$

$-5+3\sqrt{2} \geq -1$

Поэтому $a_1 \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1\}$, учтем (***) и запишем ответ.

Ответ: $\{-6; -4; -3; -2; -1\}$.

1

21104103 (U328512 M1301429)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104103**

ID профиля: **328512**

Вариант 20

Чистовик

11 класс Вариант 20. Часть 2.

№ 4.

~~Понятно, что в разложении чисел a, b, c~~

Понятно, что числа a, b, c представимы только в виде $2^i \cdot 5^j$, где $i, j \neq 0$, $i \le 17$ и $j \le 16$ т.к. число $2^{17} \cdot 5^{16}$ делится на каждое из чисел a, b, c. Тогда понятно, что одно из чисел a, b, c должно быть равно $2^{17} \cdot 5^{16}$, т.к. если нет таких, то степень можно понизить и $2^{17} \cdot 5^{16}$ не будет НОКом. Также одно из чисел должно быть равно десяти, иначе 10 не ~~НО~~ наибольший (по аналогичным рассуждениям). Тогда третье число может быть любым вида $2^i \cdot 5^j$, где $i, j \neq 0$, $i \le 17$, $j \le 16$. Таких чисел $17 \cdot 16$. Т.к. ищутся упорядоченные тройки, то надо это число умножить на 3 т.к. мы можем ~~фиксировать~~ менять местами. Т.о. ответ: $17 \cdot 16 \cdot 3 =$

$= 816$.

Ответ: 816

1

Чистовик

№ 6

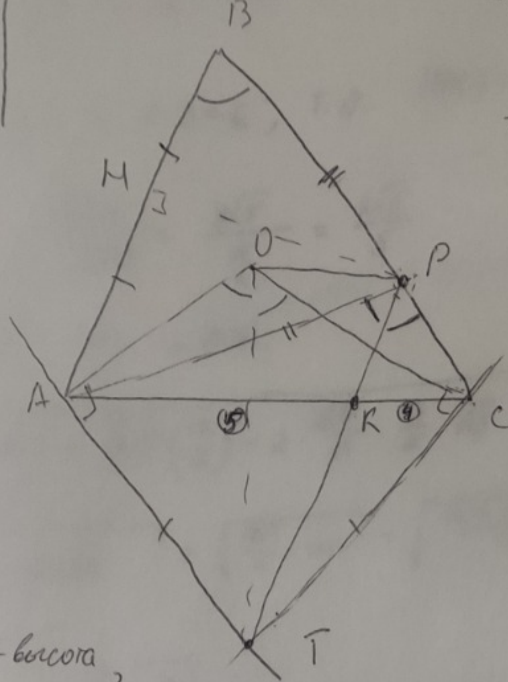
$\widehat{ABC} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

$S_{APK} = 10$

$S_{CPK} = 8$

а) S_{ABC} - ?

б) $|AC|$ - ?



а) AOPC - впис. по условию.

т.к. AT и TC - кас., то $\widehat{OAT} = \widehat{OCT} = 90^\circ \Rightarrow AOCT$ - впис. $\Rightarrow$

$\Rightarrow A, O, P, C, T$ на одной окр-ти.

$\triangle TAC$ - р/б $\Rightarrow \widehat{TAC} = \widehat{ACT} = \underset{\text{по впис.}}{=} \widehat{CPT} \underset{\text{по впис.}}{=} \widehat{APT}$.

Т.О.

$\widehat{APK} = \widehat{KPC}$

$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{|AK| \cdot h}{|KC| \cdot h}$ (h - высота $\triangle APC$) $= \frac{|AK|}{|KC|} = \frac{10}{8}$ (по усл.) $= \frac{5}{4}$. $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$ т.к. O - центр окр-ти. В силу симметрии $\widehat{TPC} = \widehat{TOA} = \widehat{TOC} \Rightarrow \widehat{TPC} = \widehat{ABC} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ TP паралл. AB. $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$ по 2 углам, $k = \frac{|AC|}{|KC|} = \cancel{\frac{5}{9}} \cdot \cancel{\frac{9}{4}} \cdot \frac{9}{4}$.

Тогда

$\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = k^2 = \frac{81}{16} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{81}{16} \cdot 8 = \frac{81}{2} = 40{,}5$.

2

б) Пусть PM - высота, опущенная из P на AB.

Докажем, что $\triangle APB$ - р/б $\Rightarrow$ M - сер. AB.

$\widehat{ABC} + \widehat{BAP} = \widehat{APC} \Rightarrow \widehat{BAP} = 2\widehat{ABC} - \widehat{ABC} = \widehat{ABC}$.

$S_{\triangle APB} = \frac{81}{2} - 18 = 22{,}5 = |PM| \cdot |BM|$;

$\frac{|PM|}{|BM|} = \operatorname{tg}\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2|PM| = |BM|$

Т.О.:

$22{,}5 = 2|PM|^2 \Rightarrow |PM| = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $|BM| = 3\sqrt{5}$, $|AB| = 6\sqrt{5}$.

21104103 (U328512 M1301430)

Чистовик

$$|BP| = \sqrt{|PM|^2 + |BM|^2} = \sqrt{\frac{45}{4} + 45} = \sqrt{45 \cdot \frac{5}{4}} = \frac{15}{2} = |AP|.$$

$$\frac{|AP|}{|PC|} = \frac{|AK|}{|KC|} = \frac{5}{4} \text{ т.к. } PK \text{ - биссектр.}$$

$$|PC| = \frac{4}{5}|AP| = 2 \cdot 3 = 6; \text{ т.о. } |BC| = 7,5 + 6 = 13,5.$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{|BM|}{|BP|} = \frac{3\sqrt{5}}{\frac{15}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

по т. косинусов из $\triangle ABC$:

$$|AC| = \sqrt{36 \cdot 5 + \left(\frac{27}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{27}{2} \cdot 6\sqrt{5}} =$$

$$= \sqrt{180 + \frac{27^2}{4} - 12 \cdot 27} = \sqrt{\frac{27^2}{4} - 144} = \sqrt{\frac{27^2 - 144 \cdot 4}{4}} = \frac{\sqrt{27^2 - 24^2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3 \cdot 51}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{17}.$$

Ответ: а) $40,5$;

б) $\frac{3}{2}\sqrt{17}$.

3

Чистовик

№ 5.

В силу монотонности графика логарифма, если и сущ-вует такой x, то он единственен.

Подбором $x = 6$:

1: $\log_2 2 = 1$

2: $\log_4 4 = 1$

3: $\log_2 4 = 2$, т.е. требуемое выполняется.

Ответ: $\{6\}$.

4

Черновик

$$\begin{cases} D(a;b;c)=10 \\ \cancel{НОК}(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

a

~~225~~

4; 8; 12

~~12·3·36~~

~~4·8·12~~

1·2·3

3

5 10 15

$\frac{5\cdot 10\cdot 15}{5^3}=1\cdot 2\cdot 3$

5, 30

k

ak, bk, ck

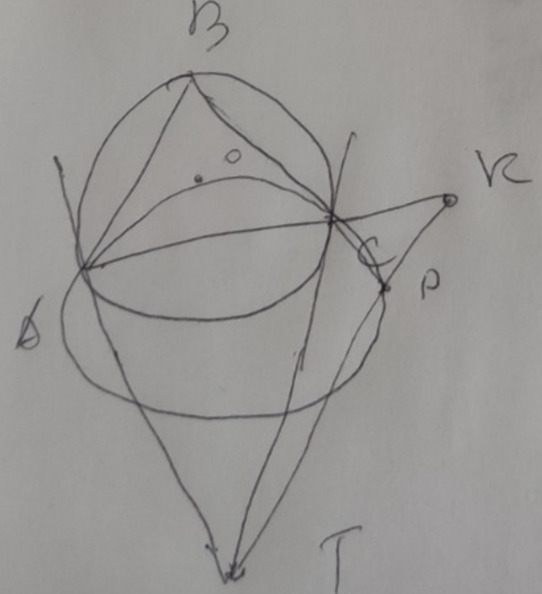
$(a+b+c)k$

4 8

$4\cdot 16=64$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$, $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$, $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=\log_{(x-4)^2}(5x-26)$



21104103 (U328512 M1301430)