Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104094**

ID профиля: **281469**

Вариант 20

Шевченко Матвей Игоревич.

Задача №1

$a_1 \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z}$; $d>0$, т.к. прогрессия возрастающая

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_1 + 10d$

• Преобразуем неравенства из условия:

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1+10d+15 \\ (a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1+10d+39 \end{cases}$$

~~Сложим~~ ~~их~~ сложим их

$a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 + 5a_1 + 10d + 39 > a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 + 5a_1 + 10d + 15$

$24 > 6d^2$

$4 > d^2 \Rightarrow d = 1$

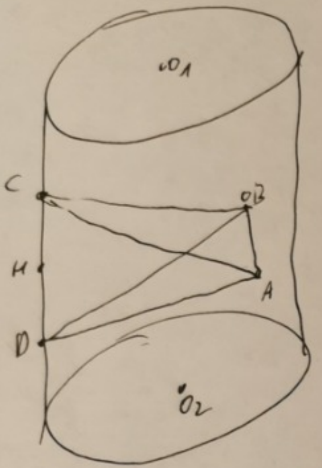
• $d=1$; преобразуем неравенства из ~~условия~~: условия

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \Rightarrow a_1 \in \mathbb{R} \setminus \{-5\} \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \Rightarrow a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2}) \end{cases}$$

Ответ: $a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2}) \setminus \{-5\}$

Шевченко Матвей Игоревич

Задача № 2



• Опустим высоты в $\triangle BCD$ и $\triangle ACD$ на CD: AH_1 и BH_2. Докажем, что $H_1 = H_2$. $\triangle BCD = \triangle ACD$, т.к. $AC = CB$; $BD = DA$; CD общая по трем сторонам, а значит точка падения высоты совпадает, т.е. $H_1 = H_2 = H$

• $BH \perp CD$; $AH \perp CD$; $CD \parallel O_1O_2 \Rightarrow$ $BH, AH \perp O_1O_2$, где O_1O_2 – ось цилиндра.
~~BH=AH, т.к.~~

• $BH, AH \perp O_1O_2 \Rightarrow (BAH) \perp O_1O_2 \Rightarrow (BAH) \parallel$ основанию, а значит сечение ~~значит сечения~~ цилиндра плоскостью (BAH) представляет собой окружность с радиусом равным радиусу цилиндра; $BH = AH$, как проекции одинаковых CB и CA, причем $CB = CA$

• по теореме синусов в $\triangle ABH$:
$\frac{AB}{\sin(\angle BHA)} = 2R$. $AB = 2$; $\sin(\angle BHA) \in (0;1]$. R тем меньше, чем больше $\sin(\angle BHA) \Rightarrow$ если $R_{min} \Rightarrow \sin(\angle BHA) = 1$; $\angle BHA = 90° \Rightarrow$ $R = 1$. $\triangle ABH$ – прямоугольный; $AB = 2$; $BH = AH = \sqrt{2}$

• в $\triangle CDB$: $CH = \sqrt{CB^2 - BH^2} = \sqrt{49 - 2} = \sqrt{47}$
$HD = \sqrt{DB^2 - BH^2} = \sqrt{64 - 2} = \sqrt{62}$

Ответ: $CD = \sqrt{47} + \sqrt{62}$

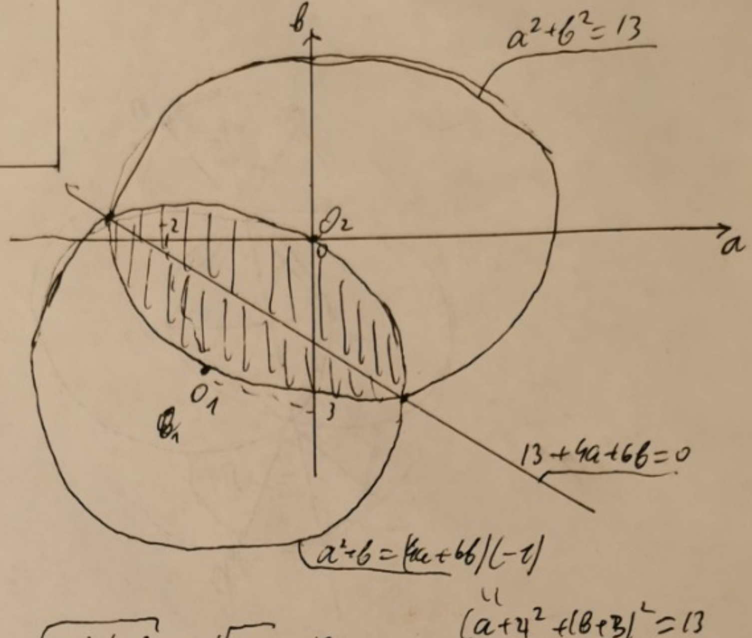
Шевченко Матвей Шеголик.

Задача № 3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13) \end{cases}$$

1) $a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \le -4a-6b \\ -4a-6b \le 13 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 13 \\ 13 < -4a-6b \end{cases} \end{array}\right.$$



Обе окружности $R=\sqrt{13}$

Расстояние между центрами: $\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{13}=R$

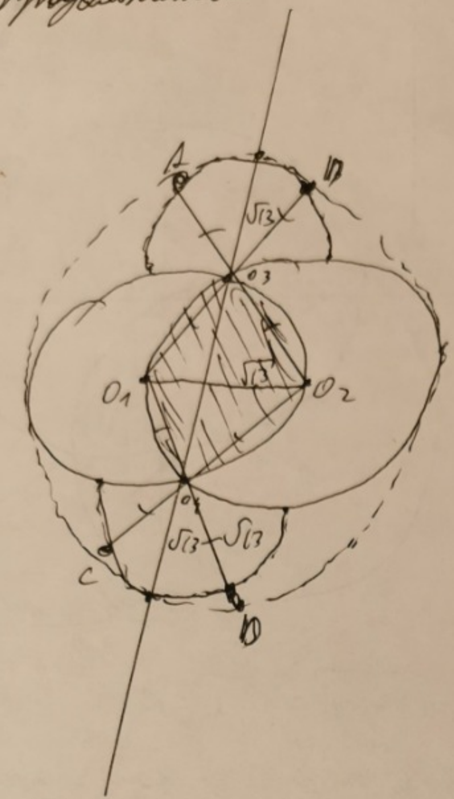
Множество точек $(a;b)$, удовлетворяющих условию $a^2+b^2 \le \min(-4a-6b; 13)$ изображено на ~~рисунке~~ чертеже.

2) $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$, т.е ~~это~~ область в форме круга, с радиусом $\sqrt{13}$ и ~~с центром в~~ с центром в $(a;b)$

прямая $13+4a+6b=0$ проходит через точки пересечения этих двух окружностей (нетрудно проверить)

Шевченко Матвей Гимназия.

Задача №3 продолжение



Изобразим окружность $R=\sqrt{13}$ в крайних точках области: $O_1, O_2; O_3, O_4$

Продлим O_1O_3; O_2O_3; O_1O_4 и O_2O_4 на $\sqrt{13}$

Точки A, B, C, D — лежат на границе области M.

$A\smile BO_3 = C\smile DO_4$

$A\smile B$:

$$S_M = 2\cdot S(\cancel{OO}B\smile D:O_1) - S(O_1O_2O_3O_4) + 2S(\cancel{ABC}A\smile B:O_3)$$

$\cancel{+S(B\smile D:O_1)}$

$$S(B\smile D:O_1) = \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{13})^2 = \frac{52}{3}\pi$$

$$S(O_1O_2O_3O_4) = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{13})^2 = \frac{13\sqrt{3}}{2}$$

$$S(A\smile B:O_3) = \frac{1}{6}\pi(\sqrt{13})^2 = \frac{13}{6}\pi$$

$$S_M = 2\cdot\frac{52}{3}\pi - \frac{13\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{13}{6}\pi = 39\pi - \frac{13\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $S_M = 39\pi - \frac{13}{2}\sqrt{3}$

$D = 25d^2 - 110d + 85$

$D = (-15d-5)^2 - 4(56d^2 - 10d - 34) = d^2 - 110d + 181$

~~$d \in [0;1]$~~ $d = 1$

$(a+1)^2 \geq 0$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 \geq 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$$

$a_1 \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$

$a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2}) \setminus \{-5\}$

Zad 1.

$a_1 \quad a_1+d \quad a_1+2d \quad a_1+3d \quad a_1+4d$

$a, d \in \mathbb{Z}$

$S = 5a_1 + 10d$

$d > 0.$

Zgrubna

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_9 = a_1 + 8d$

$(a_1+5d)(a_1+10d) > S + 15 = 5a_1 + 10d + 15$

$a_1^2 + 50d^2 + 15a_1 d > 5a_1 + 10d + 15$

$4 > 2 \quad 8 > 2$

$5 > 3 \quad 4 > 3$

$\cancel{4-4>1}$

$15 + 9 = 24$

$(a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1 + 10d + 39$

$a > b$

$d > c$

$c < d$

$a + d > b + c$

$a > b$

$c < d$

$a - c > b - d$

$a^2 + 56d^2 + 15a_1 d < 5a_1 + 10d + 39$

$\cancel{a_1^2} + 50d^2 + \cancel{15a_1 d} + 5a_1 + \cancel{10d} + 39 > \cancel{a_1^2} + 56d^2 + \cancel{15a_1 d} + \cancel{5a_1} + \cancel{10d} + 15$

$24 > 6d^2$

$4 > d^2$

$d \in [0 : 2]$

$d = 1.$

$a_1^2 + a_1(15d - 5) + 50d^2 - 10d - 15 > 0$

$\Delta = (15d-5)^2 - 4(50d^2 - 10d - 15) = 25d^2 - 110d + 85$

$=$

$$a_1 = \frac{-15d + 5 \pm \sqrt{25d^2 - 110d + 85}}{2}$$

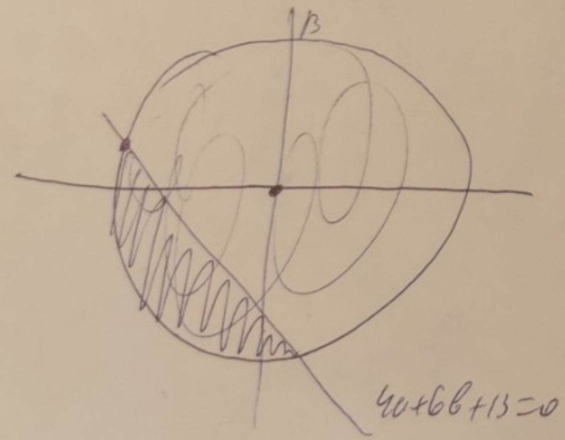
21104094 (U281469 M1304708)

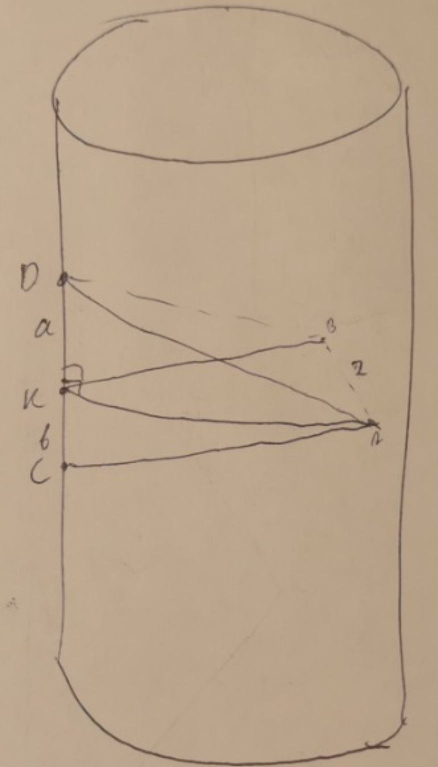
Ответы

$a^2+b^2 \le \min\{-4a-6b;13\}$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le -4a-6b \\ -4a-6b \le 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 13 \\ 13 \le -4a-6b \end{cases}$$





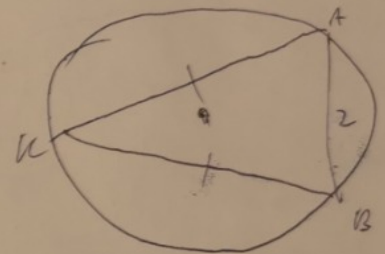
$4a+6b+13 \le 0$

$4a+6b+13=0.$

$a+b=?$

$(a-b)(a+b)=15$

$ABK \parallel$ осн

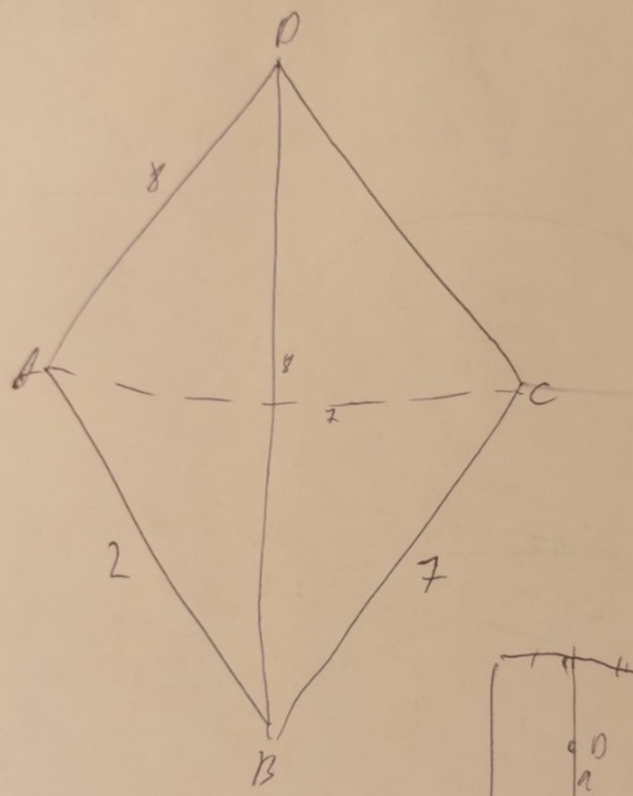


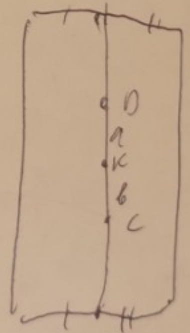
$b^2-a^2=7^2-b^2$

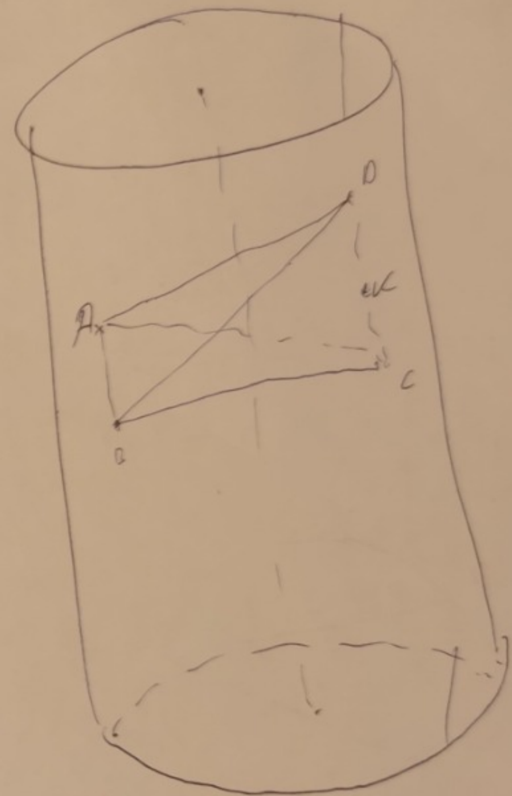
$\cancel{b^2\ a^2=}$

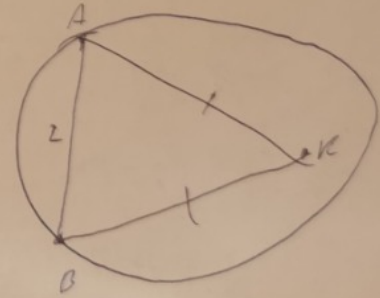
$a^2-b^2=15$

[illegible]





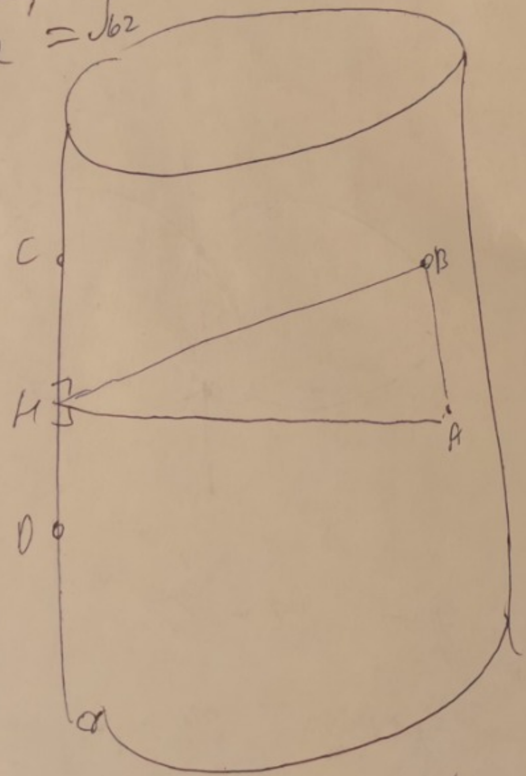




AC=BC

5) $CH = \sqrt{CB^2 - BH^2} = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$

$HD = \sqrt{DB^2 - BH^2} = \sqrt{64-2} = \sqrt{62}$



1) $\triangle CBD = \triangle CAD$

$AC = CB$

$BD = DA$

CD – общ

$H_1 = H_2$

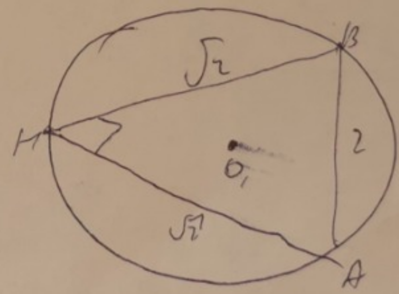
$\frac{CH_1}{H_1D} = \frac{CH_2}{H_2D}$ $H_1 = H_2$

4) $AH, BH \perp CH$ ч.т.д.

$BHA \perp CH$

$\sin(O'A)$

$\frac{AB}{\sin AHB} = 2R$

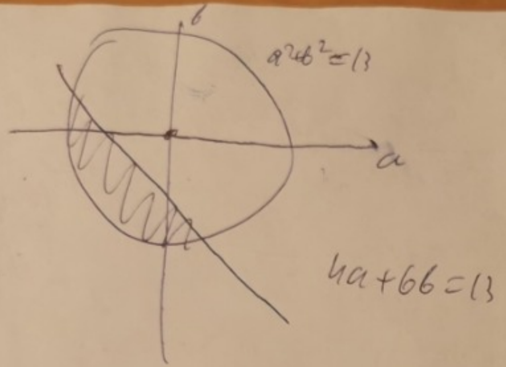


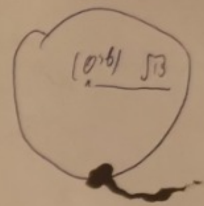
$\sin AHB = 1$ $2R = \frac{2}{\sin ...}$

$AHB = 90^\circ$ $2R = 2$ $R = 1$

21104094 (U281469 M1304708)

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 13 \\ 13 \le -4a-6b \end{cases}$$

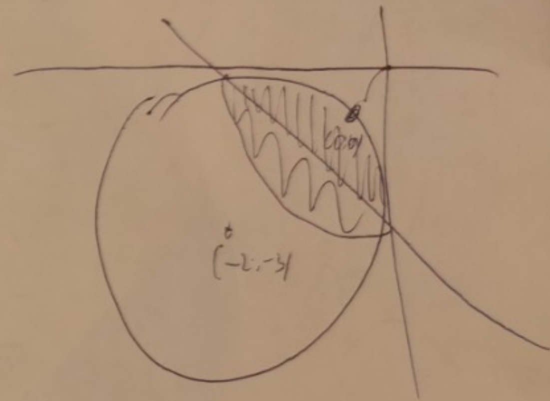


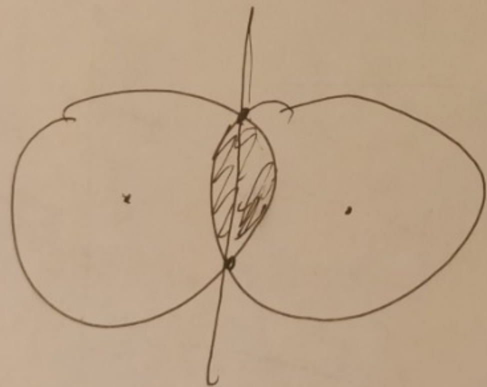


$$\begin{cases} a^2+b^2 \le -4a-6b \\ 0 \le -4a-6b \le 13 \end{cases}$$

$a^2+4a \quad b^2+6b \quad \le 0$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$





Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104094**

ID профиля: **281469**

Вариант 20

Чистовик.

Задача н. 4

$10 = 2 \cdot 5$

$a = 2^{\alpha_1} 5^{\beta_1}$

$b = 2^{\alpha_2} 5^{\beta_2}$

$c = 2^{\alpha_3} 5^{\beta_3}$

по НОК:

$\max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 17$

$\max(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 16$

по НОД

$\min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$

$\min(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 1$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ будем выбирать так.

1) выбрать число, для которого $\alpha_i = 1$ — 3 ~~варианта~~ варианта

2) выбрать число, для которого $\alpha_i = 17$ — 2 варианта

3) оставшееся α_i выберем из диапазона $[2;16]$

Кроме этих $3 \cdot 2 \cdot 15$ вариантов есть еще по 3 варианта, где $\alpha_i = \alpha_{i+1} = 17$ и где $\alpha_i = \alpha_{i+1} = 1$

Итого выбрать $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ можно $3 \cdot 2 \cdot 15 + 3 \cdot 2$ ~~вариантами~~ вариантами

Аналогично для $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ будет $3 \cdot 2 \cdot 14 + 3 \cdot 2$ вариантов.

Итого таких троек будет: $(3 \cdot 2 \cdot 15 + 3 \cdot 2)(3 \cdot 2 \cdot 14 + 3 \cdot 2)$

Ответ: таких троек 8640

Чистовик

Задача №. 4.5

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$ Замена: $2x-8=a$ ОДЗ: $a\neq 1;\ a>0$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)$ $x-4=b$ $b\neq 1;\ b>0$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$ $5x-26=c$ $c\neq 1;\ c>0$

Разберем случаи:

1) $\left.\begin{aligned}\log_{\sqrt{a}} b=k &\Rightarrow a^{\frac{k}{2}}=b\\ \log_{b^2} c=k &\Rightarrow b^{2k}=c\end{aligned}\right\} a^{k^2}=c \Rightarrow c^{\frac{1}{k^2}}=a \Rightarrow \log_{\sqrt{c}} a=\frac{2}{k^2}$

$\log_{\sqrt{c}} a=k+1$

Отсюда $k+1=\frac{2}{k^2} \Rightarrow k=1 \Rightarrow \sqrt{a}=b$

$2x-8=x^2-8x+16 \Rightarrow x \in \{4;\ 6\}$, не подходят, иначе $x-4=0$

2) $\left.\begin{aligned}\log_{\sqrt{a}} b=k &\Rightarrow a^{\frac{k}{2}}=b\\ \log_{\sqrt{c}} a=k &\Rightarrow c^{\frac{k}{2}}=a\end{aligned}\right\} b=c^{\frac{k^2}{4}} \Rightarrow \log_{b^2} c=\frac{2}{k^2}$

$\log_{b^2} c=k+1$

$k+1=\frac{2}{k^2} \Rightarrow k=1 \Rightarrow \sqrt{a}=b \Rightarrow x=6$

3) $\left.\begin{aligned}\log_{\sqrt{c}} a=k &\Rightarrow c^{\frac{k}{2}}=a\\ \log_{b^2} c=k &\Rightarrow b^{2k}=c\end{aligned}\right\} \Rightarrow b^{k^2}=a \Rightarrow \log_{\sqrt{a}} b=\frac{2}{k^2}$

$\log_{\sqrt{a}} b=k+1$

$1+k=\frac{2}{k^2} \Rightarrow k=1 \Rightarrow \sqrt{c}=a \Rightarrow 5x-26=(2x-8)^2$

$D<0$, $x\in\varnothing$

Ответ: $x=6$, и только при нём

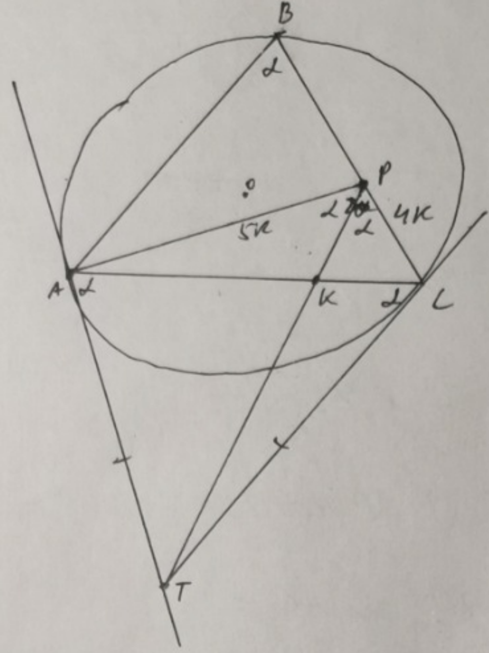
~~[illegible]~~ Чистовик.

Задача № 6

$S_{APK}=10$

$S_{CPK}=8$

$S_{APC}=S_{APK}+S_{CPK}=18$



Решение: а)

в окр AOC:

$\angle AOC=\angle APC$ как вписанные

в окр ABC:

$\angle AOC=2\angle ABC$, как вписанный и центральный $\Rightarrow \angle APC=2\angle ABC$

$AT=CT$ как отрезки касательных, $\Rightarrow \angle ACT=\angle CAT \Rightarrow$ в равнобедренном $\triangle ACT$

~~$\Rightarrow 180^\circ=\angle ATC+2C$~~

$\angle ACT=\angle ABC$ как вписанный и угол между касательной и хордой.

• $180^\circ=\angle ATC+2\angle CAT=\angle ATC+2\angle ABC=\angle ATC+\angle APC$

$\Rightarrow$ ◻ $APCT$ — вписанный. Тогда PT — биссектриса $\angle APC$

$\dfrac{AP}{PC}=\dfrac{S_{APK}}{S_{PKC}}=\dfrac{10}{8}=\dfrac{5}{4} \Rightarrow$ $AP=5k$, $PC=4k$. $\angle APB=180-2\alpha$, $\angle ABC=\alpha$

$\angle BAP=\alpha \Rightarrow BP=AP=5k$.

$\dfrac{S_{ABP}}{S_{APC}}=\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{5}{4} \Rightarrow S_{ABP}=\dfrac{5}{4}\cdot 18=22{,}5$

$S_{ABC}=S_{ABP}+S_{APC}=40{,}5$ Ответ: $S_{ABC}=40{,}5$

~~[illegible]~~ Чистовик

Задача № 6

$\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5}$ $\quad \sin 2\alpha = \frac{4}{5}$

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \alpha$

$$S_{ABP} = 22{,}5 = \frac{5k \cdot 5k \cdot \sin(180 - 2\alpha)}{2} = \frac{25k^2 \cdot \frac{4}{5}}{2} = 10k^2 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

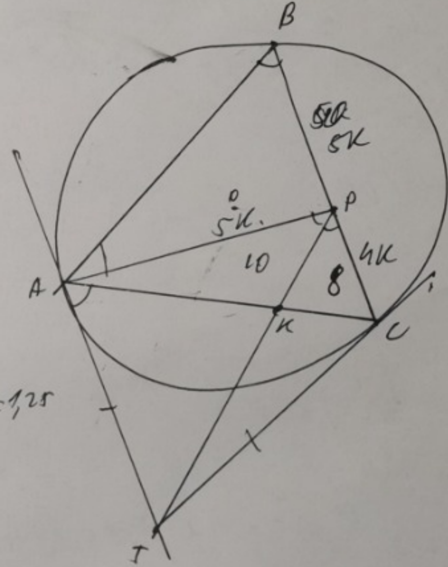
$$\cos(2\alpha) = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

по теореме косинусов в $\triangle APC$:

$$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2 \cdot \cos(2\alpha) \cdot AP \cdot PC = 25k^2 + 16k^2 - 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot 20k =$$

$$= 41k^2 - 24k = 56{,}25 \Rightarrow AC = \frac{15}{2}$$

Ответ: $AC = \frac{15}{2} = 7{,}5$



$S_{APC} = 18$

$\angle APC = \angle AOC = 2\angle ABC$

$\angle CAT = \angle ACT = \angle ABC$

~~$\angle ATC = \angle ABC$~~

~~$\angle ATC + 2\angle ABC$~~ $= 180$

~~$ATC = 180 - 2\ TAC = 180 -$~~

$\angle ATC + \angle ADC = 180^\circ$

$\Rightarrow$ APKT – вписанный в

TO W

$\frac{AP}{PC} = \frac{S_{APK}}{S_{PCK}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25$

DT – диаметр

$\frac{18}{x} = \frac{?}{5}$

21,5

Черновик

$1=2$ |

$2\log_{2a} a = \frac{1}{2}\log_a b = 2\log_b 2a - 1$

$\frac{4\log a}{\log 2a} = \frac{\log b}{\log a} = \frac{4\log(2a)}{\log b} - 2$

$a=2$

$b=4$

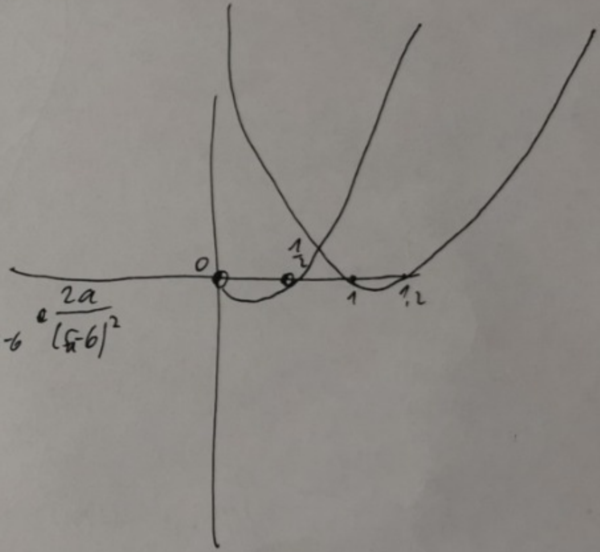
$4(\log a)^2 = \log b \log 2a$

$x-4=a$

$2x-8=2a$

$5x-26=5(a+4)-26=5a-6$

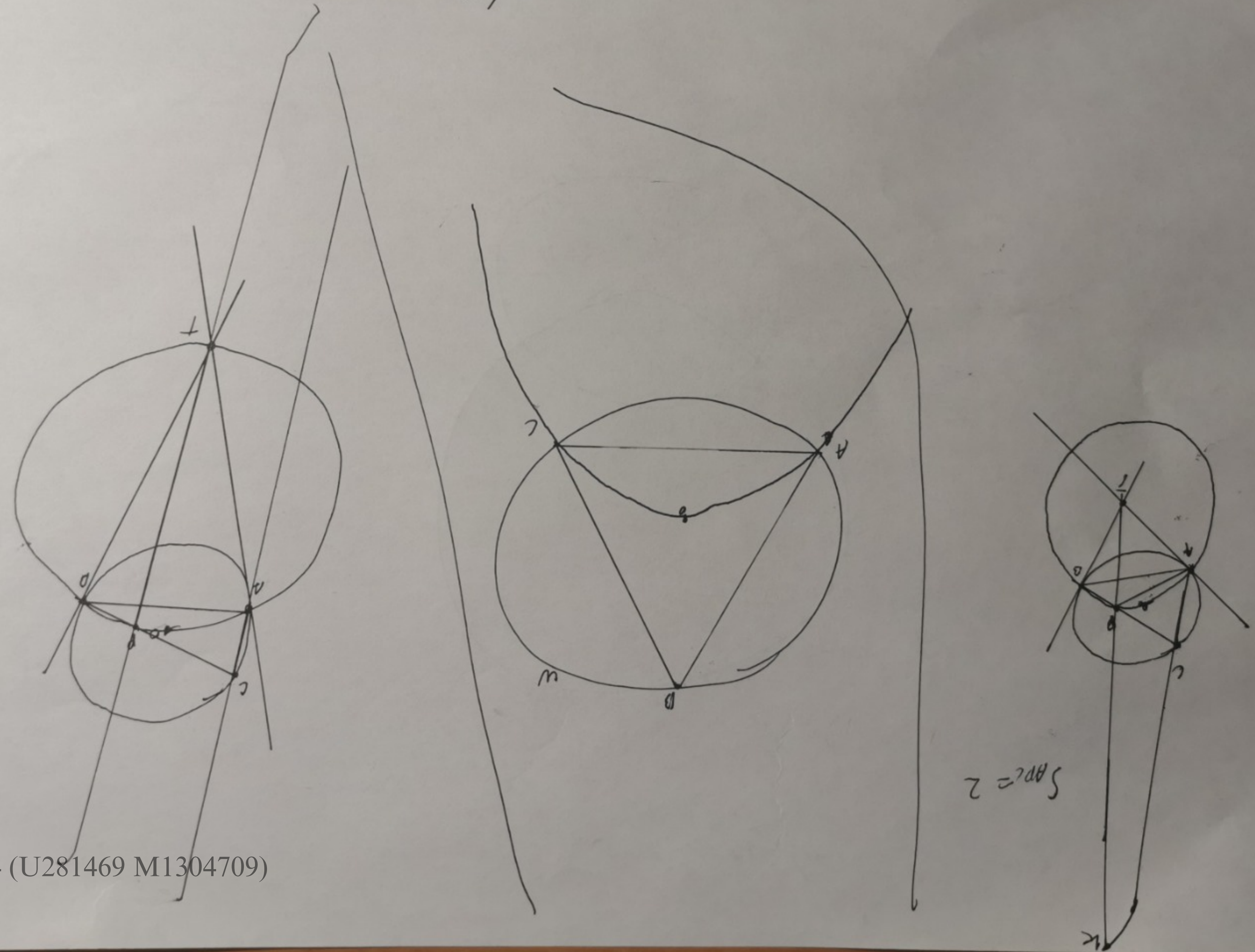
$2\log_{2a} a \quad \frac{1}{2}\log_a (5a-6) \quad 2\log_{5a-6} 2a$

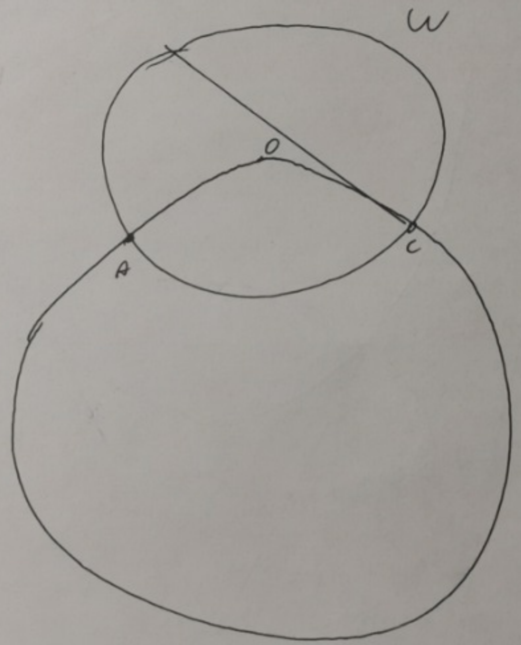


$1=2$: $4\log_{2a} a = \log_a(5a-6) = 4\log_{5a-6} 2a - 2 = 4\log_{5a-6} \frac{2a}{(5a-6)^2}$

21104094 (U281469 M1304709)

Чертеж





Черновик

К-1

$t = x-4$; $2x-8 = 2t$; $5x-26 = 5(t+4)-26 = 5t-6$ $\quad 2\log_{2t} t \quad \frac{1}{2}\log_t 5t-6 \quad 2\log_{5t-6} 2t$

I $\quad$ II $\quad$ III

$1=2=3-1$

$4\log_{2t} t = \log_t 5t-6 = 4\log_{5t-6} 2t$

$2x-8 = a$

$x-4 = b$

$5x-26 = c$

$1/ \log_{\sqrt{a}} b = k \qquad a^{\frac{k}{2}} = b \qquad 2^{2k} = c$

$\log_{b^2} c = k$

$\log_{\sqrt{c}} a = k+1 = \frac{2}{k^2} \qquad a^{k^2} = c \Rightarrow \cancel{a = c}\ c = ^{\frac{1}{k^2}} = a$

$\frac{2}{k^2} = k+1$

$\sqrt{2x-8} = x-4$ $\qquad k = 1$

$x = \left\langle \begin{matrix} 4 \text{ по ОДЗ. не подх.} \\ 6 \end{matrix} \right.$

$k^3 + k^2 - 2 = 0$

$k^2(k+2)+$

$4 \log_{\sqrt{a}} b = k \qquad a^{\frac{k}{2}} = b \qquad \sqrt{a} = b$

$\log_{\sqrt{c}} a = k \qquad c^{\frac{k}{2}} = a \qquad c = b^{\frac{4}{k^2}} \qquad \sqrt{c} = a$

$\log_{b^2} c = \frac{2}{k^2} \qquad c^{\frac{k^2}{4}} = b \qquad b^4 = c$

$(k-1)(k^2+2k+2)$

$\frac{2}{k^2} = k+1 \quad k = 1 \qquad x = 6$

21104094 (U281469 M1304709) $\quad$ Горнолин

3) $\log_{\sqrt{a}} b = \frac{2}{k^2}$

$b^{2k} = c$

$\log_a b$

$a \neq 1$

$a > 0$

$b > 0.$

$\log_{b^2} c = k$

$c^{\frac{k}{2}} = a$

$\log_{\sqrt{c}} a = k.$

$b^{k^2} = a$

$a^{\frac{1}{k^2}} = b$

$k = 1.$

Ургодили

21104094 (U281469 M1304709)

№4

НОД $(a,b,c)=10$. НОК $(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16}$.

$a=2^{\alpha_1}5^{\alpha_2}$

$b=2^{\alpha_3}5^{\alpha_4}$

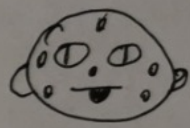
$c=2^{\alpha_5}5^{\alpha_6}$

~~$\alpha_1/\alpha_2=1$~~ ~~$\alpha_2/\alpha_1=1$~~

$\alpha_5/\alpha_6=1.$

$\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5=17$

$\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6=16.$



i-неч.

$\alpha_i+\alpha_{i+2}=16$

$\alpha_{i+1}+\alpha_{i+3}=15.$

$\alpha_1/\alpha_3/\alpha_5=1$

$\alpha_2\ \alpha_4\ \alpha_6=1.$

$3\cdot 3(14\cdot 15)=$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11. 12. 13. 14. 15.

$\alpha=1$ $\alpha\geq 1$ $\alpha\in[1,16]$

$(3\cdot 2\cdot 15+3+3)(3\cdot 2\cdot 14+3+3)$

$\alpha=1$, $\alpha=1$, $\alpha=17$

$\alpha=17$, $\alpha=17$, $\alpha=1$

21104094 (U281469 M1304709)

№5.

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(2(x-4))^{\frac{1}{2}}}(x-4) = 2\log_{\cancel{[illegible]}\,2(x-4)}(x-4)$

$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 16.$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$x-4=a$

$5x-26=b$

11 17

1 17

1 2 3

$2\log_{2a}a$ $\quad \frac{1}{2}\log_a b$ $\quad 2\log_b 2a$

$2=3$

$1=2$

$2\log_{2a}a = \frac{1}{2}\log_a b =$

$1=3$

$2\log_{2a}a = 2\log_b 2a$

$\log_{2a}a = \log_b 2a$

Чурилин