Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104032**

ID профиля: **335055**

Вариант 20

Черновик.

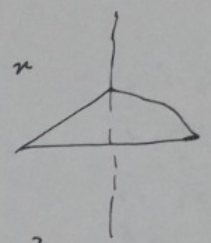
$a_6 \cdot a_{11} > 5 + 15$

$a_8 a_9 < 5 + 39$

$a_i = x + (i-1)d$

$a_1 = x$

$d > 0$



$x^2 + 15x + 50 > 5x + 25$

$x^2 + 15x + 56 < 5x + 49$

$(x+5d)\cdot(x+10d) > 5x + 10d + 15$

$(x+7d)\cdot(x+8d) < 5x + 10d + 39$

$(x+5)^2 > 0$

$x^2 + 15dx + 50d^2 > 5x + 10d + 15$

$x^2 + 15dx + 56d^2 < 5x + 10d + 39$

$d = 1$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

$\cos\gamma = \dfrac{187x^2 + 30x - 225}{195x^2 + 30x - 225}$

$x^2 + 10x + 7 < 0$

$\dfrac{\pm\sqrt{100 - 28} - 10}{2}$

$\dfrac{\pm\sqrt{72} - 10}{2}$

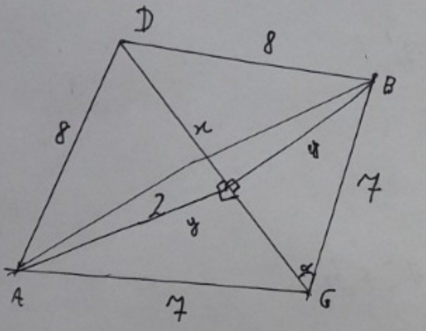
$\pm\sqrt{18} - 5$

$x \neq -5$

$\sqrt{18} \in (4;5)$

$x \in \{-9; -8; -7; ...$

$\dfrac{188x^2 - x^2 + 30x - 225}{196x^2}$



$\cos \frac{47}{49} = \dfrac{(x^2-15)^2}{196x^2} + \dfrac{195x^2 + 30x - 225}{196x^2}\cos\gamma$

$x^2 = 64 + 49 - 2\cdot 8\cdot 7\cdot\cos\alpha$

$x^2 = 113 - 112\cos\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{113 - x^2}{112}$

$64 = x^2 + 49 - 2x\cdot 7\cdot\cos\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{x^2 - 15}{14x}$

$\begin{array}{r} 28 \\ \times 28 \\ \hline 224 \\ +56 \\ \hline 784 \end{array}$

$\dfrac{195x^2 + 30x - 225}{196x^2}$

$\sqrt{1 - \left(\dfrac{113 - x^2}{112}\right)^2}$

$\dfrac{196x^2 - x^2 + 30x - 225}{196x^2}$

$4 = 98 - 98\cos\beta$

$\cos\beta = \frac{47}{49}$

$\dfrac{112^2 - (113 - x^2)^2}{112^2}$

$\dfrac{\sqrt{(x^2-1)\cdot(225-x^2)}}{112}$

$\begin{array}{r} 113 \\ \times 113 \\ \hline 339 \\ +113 \\ 113 \\ \hline 12769 \end{array}$

$4 = \dfrac{(x^2-1)\cdot(225-x^2)}{2x^2} - \dfrac{(x^2-1)\cdot(225-x^2)}{2x^2}\cdot\cos\beta$

$\dfrac{\sqrt{(x^2-1)\cdot(225-x^2)}}{4\ 2x}$

$\cos\beta = \dfrac{-x^4 + 226x^2 - 225 - 8x^2}{(x^2-1)\cdot(225-x^2)}$

Черновик.

$\cancel{392}$. $\times$ 392
49

3528
+ 1568

19208
+ 226
18982

12769

$\times$ 392
32
+ 784
1176
− 12544

− 12769
12544
225

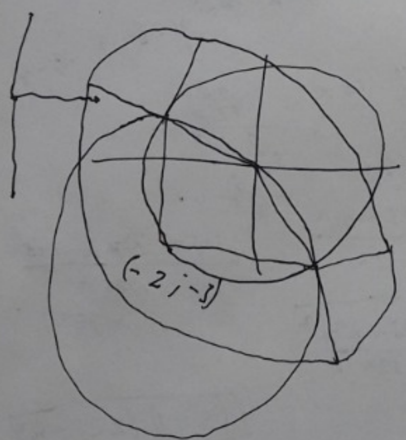
$\times$ 18982
18982
+ 37964
151856
170838
151856
18982
− 360316324
900
36 0317 5424

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 13$

$a^2+b^2 \leq \min(-4a-6b,\ 13)$

$\begin{cases} a^2+b^2 \leq -4a-6b \\ a^2+b^2 \leq 13 \end{cases}$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \leq 13$



$\frac{104}{3}\pi + \frac{13}{3}\pi - \frac{13\sqrt{3}}{2}$

$\frac{78\pi - 13\sqrt{3}}{2}$ 117 39

$\frac{13\cdot(6\pi-\sqrt{3})}{2}$

21104032 (U335055 M1296485)

Чистовик.

Вариант 20, часть 1.

№ 1.

1

Пусть d – шаг арифметической прогрессии. Так как прогрессия возрастающая и состоит из целых чисел, $d \in \mathbb{N}$. Тогда $a_i = a_1 + (i-1)d$. Условие принимает следующий вид:

$$\begin{cases} (a_1+5d)\cdot(a_1+10d) > S+15 \\ (a_1+7d)\cdot(a_1+8d) < S+39 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2+15a_1d+50d^2 > a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_1+3d)+(a_1+4d)+15 \\ a_1^2+15a_1d+56d^2 < 5a_1+10d+39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a_1+10d+15 < a_1^2+15a_1d+50d^2 \\ a_1^2+15a_1d+56d^2 < 5a_1+10d+39 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 6d^2 < 24 \Rightarrow d^2 < 4$. Так как $d \in \mathbb{N}$, $d = 1$. Условие упрощается:

$$\begin{cases} a_1^2+15a_1+50 > 5a_1+25 \\ a_1^2+15a_1+56 < 5a_1+49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \\ a_1^2+10a_1+7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -5 \\ (a_1+5+\sqrt{18})\cdot(a_1+5-\sqrt{18}) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1 \in (-5-\sqrt{18}; -5+\sqrt{18}) \end{cases}.$$

Так как $\sqrt{18} \in (\sqrt{16}; \sqrt{25}) \Leftrightarrow \sqrt{18} \in (4; 5)$, а $a_1 \in \mathbb{Z}$ из условия, ограничения принимают вид $\begin{cases} a_1 \neq -5 \quad a_1 \in \mathbb{Z} \\ a_1 \in [-9; -1] \end{cases} \Leftrightarrow a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$.

Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$.

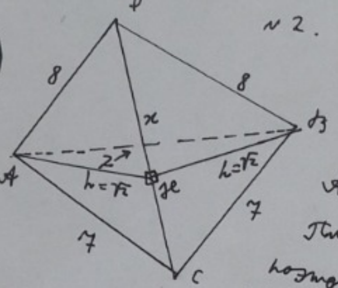
21104032 (U335055 M1296485)

Чистовик.

Вариант 20, часть 1.

2

№ 2.



$\triangle ADC$ и $\triangle БDC$ равны по третьему признаку $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ если мы опустим в них высоты из вершин A и $Б$ соответственно, они упадут в одну точку H. Плоскость $AБH$ перпендикулярна CD и оси цилиндра, поэтому она высекает на цилиндре окружность с радиусом, соответствующим радиусу цилиндра (пусть он равен R). По теореме синусов для $\triangle AБH$ $2R = \frac{AБ}{\sin\angle БHA} \Rightarrow R = \frac{1}{\sin\angle БHA}$. Наименьший радиус соответствует углу (только этому) $\angle БHA = 90°$ ($\angle БHA \in (0°; 180°)$), когда $\sin\angle БHA = 1$, если этот угол достигается, проверим это. Если $\angle БHA = 90°$, то по теореме Пифагора для $\triangle AHБ$ получаем $AБ^2 = AH^2 + БH^2$. Из равенства $\triangle ADC$ и $\triangle БDC$ $AH = БH = h$, значит, $4 = 2h^2 \Rightarrow h = \sqrt{2}$. ~~Пусть $x = CD$, тогда по теореме синусов для $\triangle ADC$ $\frac{x}{\sin\angle CAD} = \frac{8}{\sin\angle ACD} \Rightarrow \frac{x}{\sin\angle CAD} = \frac{8}{\frac{4\sqrt{2}}{7}}$ (из $\triangle CAH$) $\Rightarrow \sin\angle CAD = \frac{7x}{4\sqrt{2}}$. Площадь $\triangle ACD$ можно выразить двумя способами: $S_{ACD} = \frac{xh}{2} = \frac{AC\cdot AD\cdot\sin\angle CAD}{2}$ $\rightarrow$ $\cos\angle CAD = \pm\sqrt{1-\frac{49x^2}{32}}$ (из основного тригонометрического тождества) $= \pm\sqrt{\frac{32-49x^2}{32}}$. Разберём случаи через теорему косинусов для угла $\angle CAD$ треугольника $\triangle ACD$:~~

~~$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 64+49+2\cdot8\cdot7\cdot\sqrt{\frac{32-49x^2}{32}} \\ x^2 = 64+49-2\cdot8\cdot7\cdot\sqrt{\frac{32-49x^2}{32}} \end{array}\right.$$~~

~~Из ограничения на корень $x^2 \leq \frac{32}{49}$, поэтому первый случай не подходит (правая часть много больше).~~

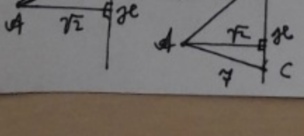
~~$$x^2 = 113 - 112\sqrt{\frac{32-49x^2}{32}} \Leftrightarrow 28\cdot\sqrt{\frac{32-49x^2}{2}} = 113 - x^2 \Leftrightarrow$$~~

~~$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq \frac{32}{49} \\ 392\cdot(32-49x^2) = 12769 - 226x^2 + x^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq \frac{32}{49} \\ x^4 + 18982x^2 + 225 = 0 \end{cases}$$~~

~~Ответ: $CD \in \{\sqrt{62}-\sqrt{47}; \sqrt{62}+\sqrt{47}\}$.~~

~~В тетраэдре не может быть тупого~~

Пусть у нас есть $\triangle AБH$ и прямая, перпендикулярная его плоскости и проходящая через H. Тогда нужно рассмотреть две конфигурации точек C и D:



По теореме ~~косинусов~~ Пифагора можно определить длины $БH$ и CH:

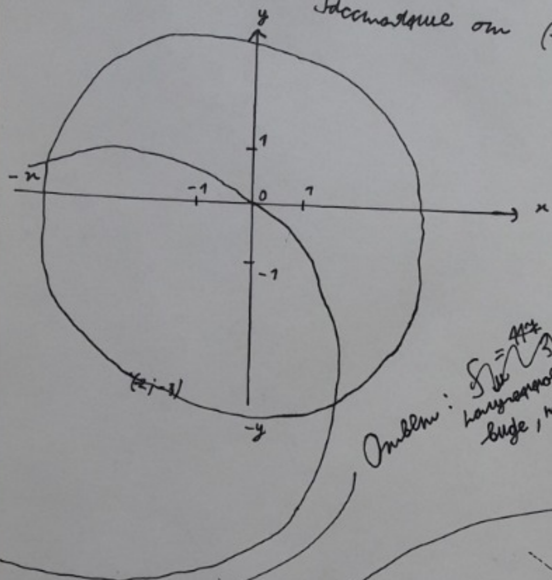
$$\begin{cases} DH^2 + AH^2 = AD^2 \\ CH^2 + AH^2 = AC^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DH = \sqrt{62} \\ CH = \sqrt{47} \end{cases}.$$ Тогда $$\left[\begin{array}{l} CD = \sqrt{62}-\sqrt{47} \\ CD = \sqrt{62}+\sqrt{47}. \end{array}\right.$$ ~~Ответ: $CD \in \{\sqrt{62}-\sqrt{47}$~~

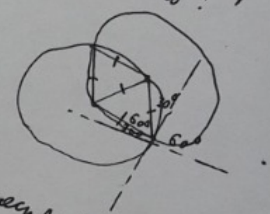
Чистовик.
Вариант 20, часть 1.
N 3.

3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,\ 13)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le -4a-6b\\ a^2+b^2\le 13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ (a+2)^2+(b+3)^2\le 13\\ a^2+b^2\le 13\end{cases}$$

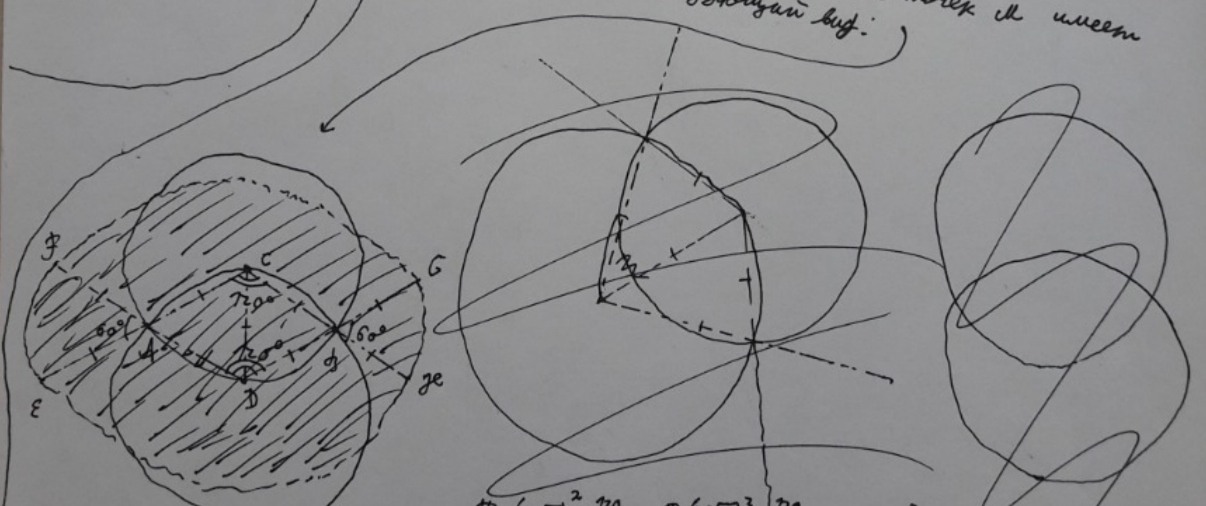
Второе и третье уравнение – это уравнения окружностей с радиусом $\sqrt{13}$.
Значит, нам нужны ровно такие точки $(x;y)$, для которых найдутся такие a и b, что расстояния от $(x;y)$ до $(a;b)$, от $(a;b)$ до $(-2;-3)$ и от $(a;b)$ до $(0;0)$ не больше $\sqrt{13}$. Расстояние от $(-2;-3)$ до $(0;0)$ ровно $\sqrt{13}$, поэтому окружность проходит через центры друг друга и касательные в точках пересечения составляют угол 60°:





Ответ: $S_M = 39\pi - \frac{13\sqrt{3}}{2}$ полученное S_M в упрощённом виде, то есть $\frac{13\cdot(6\pi-\sqrt{3})}{2}$.

Нужное множество точек M имеет следующий вид:



$$\dots = \pi\cdot(2\sqrt{13})^2\cdot\frac{120}{360} + \pi\cdot(2\sqrt{13})^2\cdot\frac{120}{360} + \pi\cdot(\sqrt{13})^2\cdot\frac{60}{360} + \pi\cdot(\sqrt{13})^2\cdot\frac{60}{360} - \frac{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{13})^2}{4}\cdot 2 =$$
$$= 52\pi\cdot\frac{1}{3}\cdot 2 + 13\pi\cdot\frac{1}{6}\cdot 2 - \frac{13\sqrt{3}}{2} = \frac{117\pi}{3} - \frac{13\sqrt{3}}{2} = 39\pi - \frac{13\sqrt{3}}{2}$$ (площадь двух правильных треугольников)

AEF и BGH – сектора окружностей радиуса $\sqrt{13}$, DFG и CHE – радиуса $2\sqrt{13}$.

$$S_M = S_{\text{сектор } DFG} + S_{\text{сектор } CHE} + S_{\text{сектор } AEF} + S_{\text{сектор } BGH} - S_{ACBD} = \dots$$

21104032 (U335055 M1296485)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104032**

ID профиля: **335055**

Вариант 20

3

Чистовик.

Вариант 20.

Часть 2.

№ 7.

Если НОД $(a, b, c) = 10$, то $a = 10x$, $b = 10y$, $c = 10z$, НОД $(x, y, z) = 1$:

$$\begin{cases} \text{НОД}(x, y, z) = 1 \\ \text{НОК}(x, y, z) = 2^{16} \cdot 5^{15} \end{cases}$$

(НОК тоже нужно делить на 10)

Если одно из чисел $x, y, z \vdots 2^{16}$ или $\vdots 5^{16}$, получается противоречие со вторым условием

НОД $(a; b; c) = 10$
НОК $(a; b; c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$

$a = 10x$ $b = 10y$ $c = 10z$

НОК$(x, y, z) = 2^{16} \cdot 5^{15}$

2^k 5^k

1 $17 \cdot 16$ $\frac{343}{125}$ $k \in \{1, \dots, 16\}$

НОК $(a; b; c) =$ НОК (НОК $(a; b); c) = \frac{\text{НОК}(a; b) \cdot c}{\text{НОД (НОК}(a;b); c)}$

$3 \cdot 17 \cdot 16 = 51 \cdot 16 = 816$

НОК$(x, y, z) = 2^{16} \cdot 5^{15}$

$x = 2^{16} \cdot 5^{15}$

$x = 2^{16} \cdot k$
$y = 5^{15} \cdot c$
$z =$

x, y, z

$2{,}4 \dots 2^{\frac{1}{2-\sqrt[3]{2}}}$

$2^{\frac{1}{2-\frac{4}{3}}}$ $2^{\frac{3}{2}}$

$2x - 8 \dots 2^{\frac{1}{2-\sqrt[3]{2}}}$

$\frac{4}{3}$ $\frac{64}{27} > 2$ $\frac{7}{5}$ $\frac{125}{64}$

$\log_2 (2x-8) \dots \frac{1}{2-\sqrt[3]{2}}$

$2 - \sqrt[3]{2} \dots \log_{2x-8} 2$

$x > 4$
$x \neq 4{,}5$
$x \neq 4$
$x \neq 3$
$x \neq 5$

$x > \frac{26}{5} = 5{,}2$
$x \neq \frac{27}{5} = 5{,}4$

$x \in (5{,}2; 5{,}4) \cup (5{,}4; +\infty)$

$\log_{2x-8} \left(\frac{1}{2}\right) \dots \sqrt[3]{2} - 2$

$2 \cdot (\log_{2x-8} (2x-8) + \log_{2x-8} \left(\frac{1}{2}\right)) \dots \sqrt[3]{2}$

$(\log_{5x-26} (2) \cdot \log_{5x-26} (x-4)) \cdot \log_{(x-4)} (2x-8)$

$\log_{2x-8} (x-4)^2$

$\log_{(x-4)^2} (5x-26)$

$2 \log_{2x-8} (x-4) \dots \sqrt[3]{2}$

$2^{-\frac{2}{3}}$

$\log_{2x-8} (x-4) \cdot \log_{5x-26} (2x-8) \dots \sqrt[3]{2}$

$y^2 \cdot (y+1) = 2$
$y^3 + y^2 = 2$
$(y-1) \cdot (y^2 + 2y + 2) = 0$

$\log_{5x-26} (4 \cdot (x-4)^2)$

$(x-4) \cdot (x-6) \dots$

$x^2 - 8x + 16 \dots$

$x^2 - 10x + 24 \dots$

$(x-4)^2 \dots 2x - 8$

$2 \log_{2x-8} \cdot (x-4)$

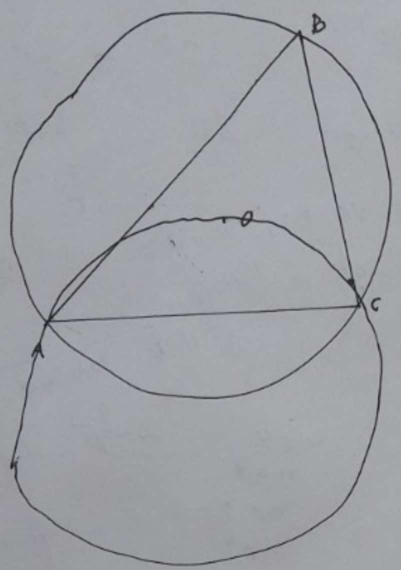
$\frac{\log_{x-4} (5x-26)}{2}$

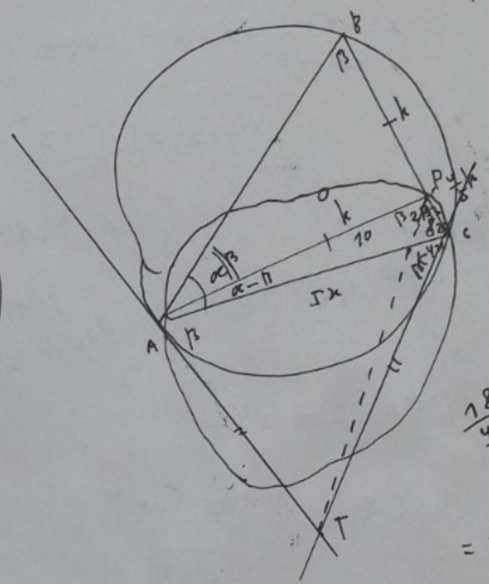
$2 \log_{5x-26} (2x-8)$

$x - 4$
$x^2 - 13x + 42$

21104032 (U335055 M1296486)

/





$\frac{18}{\frac{4}{5}} \cdot \frac{9}{5} =$

$= \frac{81}{20}$

18 $\frac{1}{4}$

$2025 = 25 \cdot 81 =$

$x = \sqrt[3]{\frac{1}{20}}$ $\sqrt[3]{\frac{729}{20}}$

$\sqrt{5}$, 1, 2

$\begin{array}{r} 25 \\ \times 65 \\ \hline 125 \\ +150 \\ \hline 1625 \end{array}$

$4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot x^3 = 9$ $k = \sqrt{65} \cdot 5x$

$\frac{\frac{8}{5}k}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{8x}{\sin\beta}$

$x = \frac{k \sin\beta}{\sqrt{5}}$

$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ +18 \\ \hline \end{array}$

$2\sqrt{1620}\, x^3 \cdot \sqrt{5} = 9$ $2k\cos\beta$

$4\sqrt{405}\, x^3 \cdot \sqrt{5} = 9$

$\cancel{2k\cos\beta}$ ·

$65x^2 = -\frac{35}{25}k^2 + \frac{16}{25}k^2$ $\sin\beta = \frac{\sqrt{5}x}{k}$

$2k \cdot \sqrt{1 - \frac{5x^2}{k^2}} \cdot 8x \cdot \frac{\sqrt{5}x}{k} = \frac{405}{81 \cdot 9}$

$k^2 = 65 \cdot 25 \cdot x^2$ $\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{5x^2}{k^2}}$

$18 = \frac{4}{\sqrt{5}}k \cdot \frac{\sqrt{5}x}{k} \cdot \sqrt{1 - \frac{5x^2}{k^2}}$

$81x^2 = k^2 + \frac{16}{25}k^2 - \frac{8}{5}k^2 \cos 2\beta$

$2\sqrt{k^2 - 5x^2} \cdot \sqrt{5}x^2 = 9$ $9 = 2x \cdot \sqrt{k^2 - 5x^2}$

$\begin{array}{r} 13 \\ \times 25 \\ \hline 65 \\ +26 \\ \hline 325 \end{array}$

$-\frac{8}{5}k^2 + 16x^2$ $1 - 2\sin^2\beta = 1 - \frac{10x^2}{k^2}$

Чистовик.

Вариант 20, часть 2.

№~~4~~ 5.

1

Из ограничений на $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$ получаем, что $\begin{cases} x>4 \\ \sqrt{2x-8}\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ x\neq 4{,}5, \end{cases}$

из ограничений на $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$ получаем $\begin{cases} x\neq 4 \\ x\neq 3 \\ x\neq 5 \ ((x-4)^2\neq 1) \\ x>5{,}2 \end{cases} \Leftrightarrow x>5{,}2,$

из ограничений на $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$ получаем $\begin{cases} x>5{,}2 \\ x\neq 5{,}4 \\ x>4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>5{,}2 \\ x\neq 5{,}4 \end{cases}$. Значит, область допустимых значений x – это $(5{,}2;5{,}4)\cup(5{,}4;+\infty)$. Поэтому можно упростить логарифмы: $2\log_{2x-8}(x-4)$, $\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$ и $2\log_{5x-26}(2x-8)$ соответственно. $2\log_{2x-8}(x-4)\cdot\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)\cdot 2\log_{5x-26}(2x-8) = 2\log_{2x-8}(x-4)\cdot\log_{(x-4)}(2x-8) = 2$. Если обозначить равные ~~логарифмы~~ числа за y, то третье ~~логарифм~~ число будет равно $y+1$: $y^2\cdot(y+1)=2 \Leftrightarrow y^3+y^2-2=0 \Leftrightarrow (y-1)\cdot(y^2+2y+2)=0 \Leftrightarrow (y-1)\cdot((y+1)^2+1)=0 \Leftrightarrow y=1$. Значит, ~~хотя бы~~ одно из двух первых ~~логарифмов~~ чисел равно 1 (иначе не найдутся два ~~логарифма~~ числа, равные 1):

1) $\begin{cases} 2\log_{2x-8}(x-4)=1 \\ x\in(5{,}2;5{,}4)\cup(5{,}4;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2=2x-8 \\ x\in(5{,}2;5{,}4)\cup(5{,}4;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-10x+24=0 \\ x\in(5{,}2;5{,}4)\cup(5{,}4;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)\cdot(x-6)=0 \\ x\in(5{,}2;5{,}4)\cup(5{,}4;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x=6$. Легко видеть, что тогда $\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)=1$ и $2\log_{5x-26}(2x-8)=2$

2) $\begin{cases} \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)=1 \\ x\in(5{,}2;5{,}4)\cup(5{,}4;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-26=(x-4)^2 \\ x\in(5{,}2;5{,}4)\cup(5{,}4;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)\cdot(x-7)=0 \\ x\in(5{,}2;5{,}4)\cup(5{,}4;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=7 \end{array}\right.$ $x=6$ проверено, а при $x=7$ $2\log_{2x-8}(x-4) = 2\log_6 3 = \log_6 9 \in (\log_6 6;\log_6 36)$, то есть $\log_6 9\in(1;2)$, поэтому $x=7$ не подходит (число должно было быть равно 1 или 2).

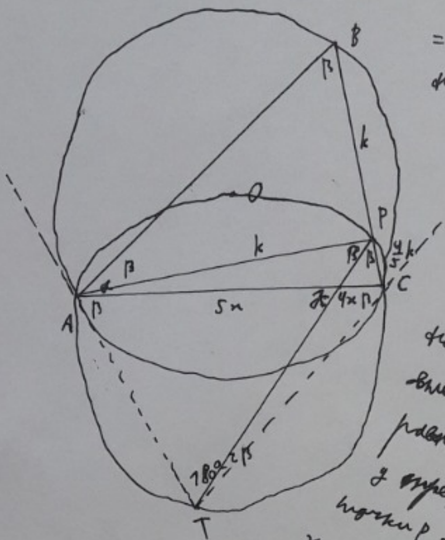
Ответ: $x=6$.

Чистовик.

Вариант 20, часть 2.

2

№ 6.



а) $\angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta$ как центральный угол внутри ω, $\angle APC = \angle AOC = 2\beta$ как опирающийся на ту же дугу нижней окружности. Углы между касательными и хордами $\angle CAT$ и $\angle ACT$ равны $\angle ABC = \beta$, поэтому $\angle CTA = 180^\circ - 2\beta$ (дополняет до 180°). $\angle APC + \angle CTA = 180^\circ \Rightarrow$ четырёхугольник APCT вписанный, то есть T лежит на описанной окружности $\triangle AOC$. Тогда вписанные углы $\angle ACT$ и $\angle APT$, $\angle CAT$ и $\angle CPT$ равны β. $S_{APЖ} = 10$ и $S_{CPЖ} = 8$, при этом у треугольников есть общая высота (опущенная из точки P на AC), поэтому $\frac{AЖ}{ЖC} = \frac{10}{8} \Rightarrow$ можно выбрать x так, чтобы $AЖ = 5x$ и $ЖC = 4x$. Внешний угол $\angle APC$ равен сумме углов $\angle PAB$ и $\angle ABP$, поэтому $\angle PAB = 2\beta - \beta = \beta = \angle ABP \Rightarrow \triangle APB$ равнобедренный, $AP = BP = k$. Из свойства биссектрисы (для биссектрисы PЖ $\triangle APC$) получаем, что $\frac{AP}{PC} = \frac{AЖ}{ЖC} \Rightarrow PC = \frac{4}{5}AP = \frac{4k}{5}$. У $\triangle ABC$ и $\triangle APC$ есть общая высота (опущенная из A на BC), поэтому $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle APC}} = \frac{BC}{PC} = \frac{\frac{9k}{5}}{\frac{4k}{5}} = \frac{9}{4}$. $S_{\triangle APC} = S_{\triangle APЖ} + S_{\triangle CPЖ} = 10 + 8 = 18 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{9}{4} \cdot 18 = \frac{81}{2} = 40{,}5$.

б) Если $\alpha = \angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, при этом $\angle ABC \in (0^\circ; 90^\circ)$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ($\sqrt{5}$, 1, 2, $\sqrt{5} = \sqrt{2^2+1^2}$). По теореме синусов для $\triangle ABC$ $\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin\beta = \frac{9x \cdot \sin\alpha}{\frac{9}{5}k} = \frac{\sqrt{5}x}{k}$. По теореме косинусов для $\angle APC$ в $\triangle APC$ $81x^2 = k^2 + \frac{16}{25}k^2 - 2k \cdot \frac{4}{5}k \cdot \cos 2\beta = \frac{41k^2}{25} - \frac{8k^2}{5} \cdot (1 - 2\sin^2\beta) = \frac{41k^2}{25} - \frac{8k^2}{5} \cdot \left(1 - \frac{10x^2}{k^2}\right) = \frac{k^2}{25} + 16x^2 \Leftrightarrow k^2 = 65x^2 \cdot 25$. $\triangle APB$ равнобедренный, поэтому $AB = 2k\cos\beta$. $\sin\beta = \frac{\sqrt{5}x}{k} = \frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{65} \cdot 5x} = \frac{1}{5\sqrt{13}}$, при этом $\beta \in (0^\circ; 90^\circ)$, поэтому $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{1}{25 \cdot 13}} = \sqrt{\frac{324}{325}} = \frac{18}{5\sqrt{13}}$. $40{,}5 = S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin\beta}{2} = \frac{9x \cdot 2k\cos\beta \cdot \sin\beta}{2} = 9kx \cdot \frac{18}{25 \cdot 13} = 9x^2 \cdot \sqrt{65} \cdot 5 \cdot \frac{18}{25 \cdot 13} = \frac{162}{65} \cdot \sqrt{65} \cdot x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{\sqrt{65}}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt[4]{65}}{2} \Rightarrow AC = \frac{9\sqrt[4]{65}}{2}$.

Ответ: а) 40,5; б) $\frac{9\sqrt[4]{65}}{2}$.

21104032 (U335055 M1296486)