Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104017**

ID профиля: **859107**

Вариант 20

Чистовик

1) Пусть разность арифметической прогрессии равна d, где $d \in \mathbb{N}$ (т.к. прогр-я возр-я; $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$), то составим систему неравенств:

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1+10d+15, \\ (a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1+10d+39, \ |\cdot(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+15a_1d+50d^2-5a_1-10d-15>0, \\ -a_1^2-15a_1d-56d^2+5a_1+10d+39>0. \end{cases}$$

- Сложим неравенства сист-ы:

$$-6d^2+24>0$$
$$d^2<4$$
$$(d-2)(d+2)<0$$
$$d\in(-2;2)$$

- Так как $d\in\mathbb{N}$, то только $d=1$ удовлетворяет условию задачи.
- Подставим значение $d=1$ в систему неравенств и найдём все возможные значения a_1:

$$\begin{cases} a_1^2+15a_1+50-5a_1-10-15>0, \\ \cancel{a_1^2+15a_1+56+5a_1+10+39} \\ a_1^2+15a_1+56-5a_1-10-39<0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0, \\ a_1^2+10a_1+7<0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+5)^2>0, \\ (a_1+5+3\sqrt{2})(a_1+5-3\sqrt{2})<0. \end{cases}$$

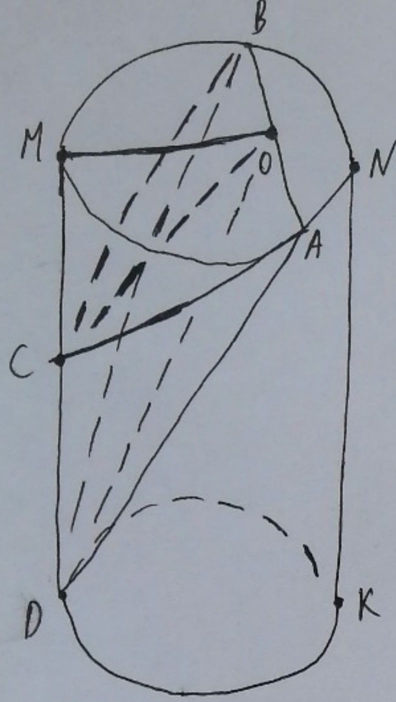
$$\Leftarrow \begin{cases} a_1\neq-5, \\ a_1\in(-5-3\sqrt{2};-5+3\sqrt{2}). \end{cases} \Rightarrow$$ Так как $a_1\in\mathbb{Z}$, то $a_1\in[-9;-5)\cup(-5;-1]$

<u>Ответ</u>: $a_1\in[-9;-5)\cup(-5;-1]$

1

Чистовик

2)



1) Поместим точку D ~~в основании цилиндра~~ на дугу окружности нижнего основания цилиндра.

2) Проведём прямую CD параллельно оси цилиндра и заметим, что, ~~так как AD и DB больше, чем AC и CB радиус~~ радиус ~~окружности~~ цилиндра будет наименьшим, если диаметром окр-и будет являться прямая AB (AB - наименьшая из сторон тетраэдра, именно поэтому ~~именно~~ отрезок AB должен проходить через 2 точки ~~кругов~~ окруж-й цилиндра, но если AB - хорда, то радиус цилиндра будет больше хорды, так что AB - диаметр окр-и цилиндра)

$R = OA = OB = 1$

3) Расположим остальные точки тетраэдра на боковой поверх-ти цилиндра.

4) ~~OD (из~~ Из ΔODA:

$OD = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$ (по т. Пиф-ра)

5) ~~Из ΔMCO (ΔMCO-прямоуг)~~

~~MC=~~ Из ΔBCA (ΔBCA-равноб-й)

$CO = \sqrt{48}$

6) Из ΔMCO (ΔMCO-прямоуг)

$MC = \sqrt{47}$

7) Из треуг. MOD (ΔMOD-прямоуг)

$MD = \sqrt{62}$

8) $CD = MD - MC = \sqrt{62} - \sqrt{47}$

Ответ: ~~$\sqrt{62} - \sqrt{47}$~~ $CD = \sqrt{62} - \sqrt{47}$

2

Чистовик

3) $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13, \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b; 13). \end{cases}$

1) Первое неравенство системы задаёт круг с центром в точке $(a; b)$ и радиусом, равным $\sqrt{13}$.

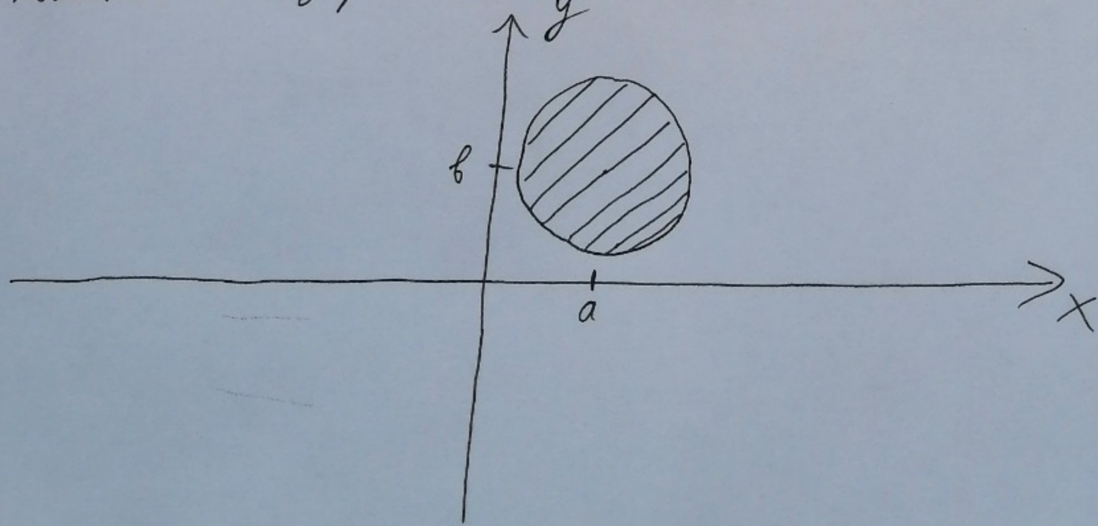
2) Второе неравенство системы задаёт ограничения на числа a и b.

1 случай) $\begin{cases} -4a-6b<13, \\ a^2+b^2<-4a-6b, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+6b>-13, \\ (a+2)^2+(b+3)^2<13. \end{cases}$

2 случай) $\begin{cases} -4a-6b>13, \\ a^2+b^2<13. \end{cases}$

Схематично изобразим области нер-тв:

3



21104017 (U859107 M1304238)

$\min(-4a-6b; 13)$

1) $-4a-6b<13$

$a^2+4a+b^2+6b\le 0$

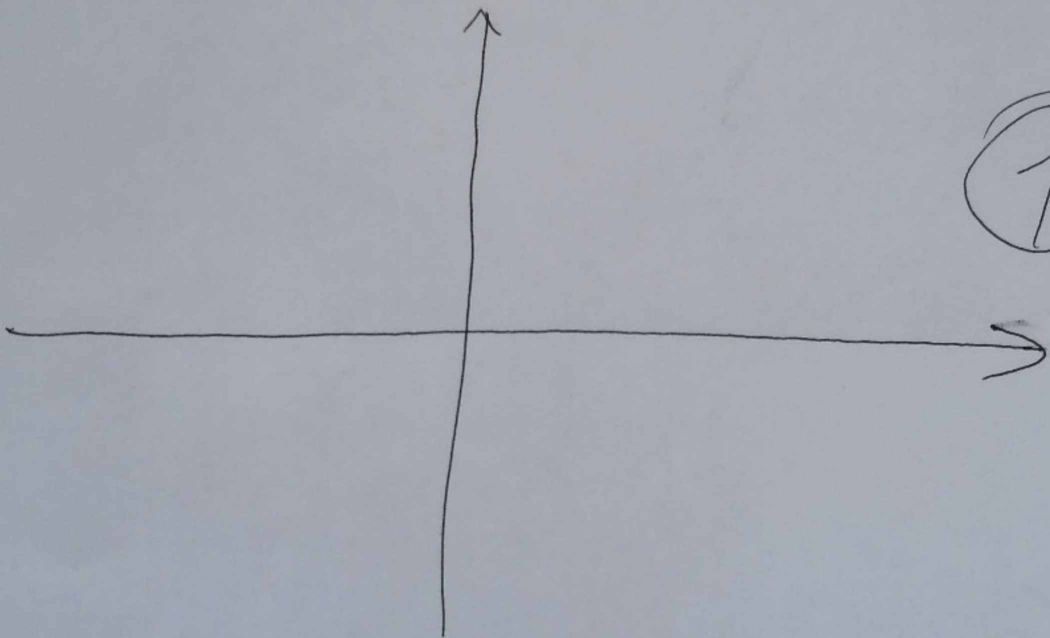
$\begin{cases}(a+2)^2+(b+3)^2\le 13\\ -4a-6b<13\end{cases} \Rightarrow a\in(-2-\sqrt{13}; 2+\sqrt{13})$

$b\in(-3-\sqrt{13}; 3+\sqrt{13})$

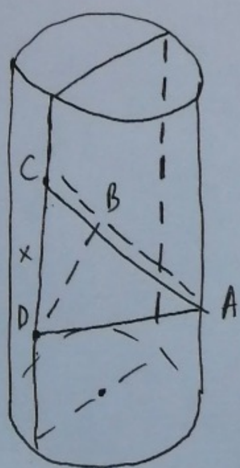
2) $-4a-6b>13$

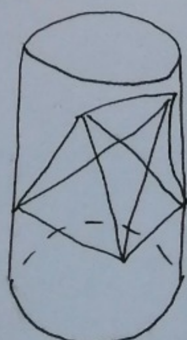
$a^2+b^2\le 13$

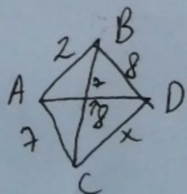
$a; b\in(-\sqrt{13}; \sqrt{13})$

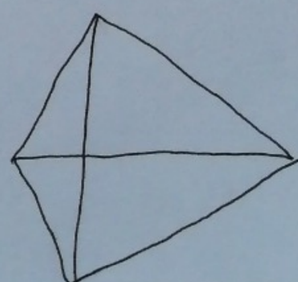


1

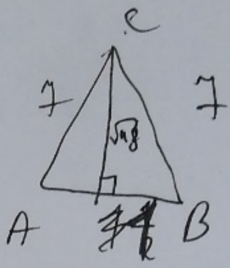


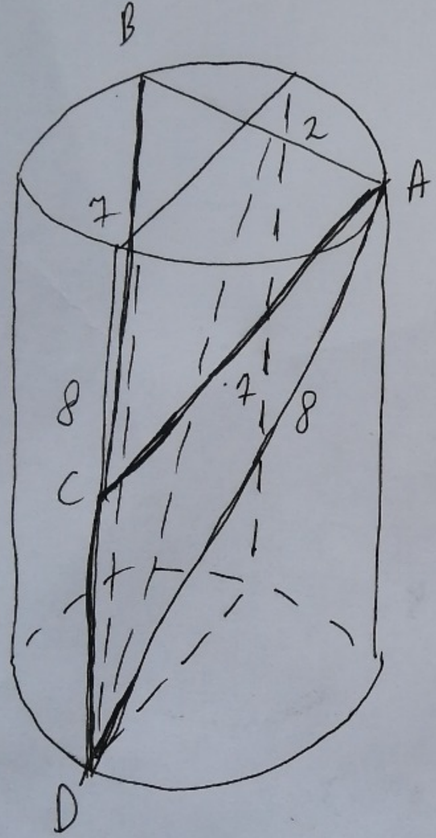


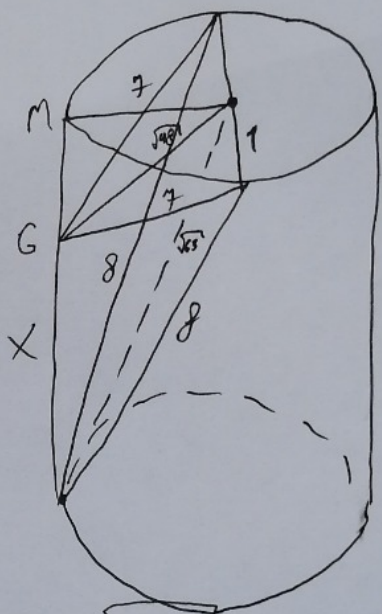




2





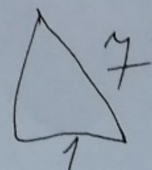


$OD = \sqrt{63}$

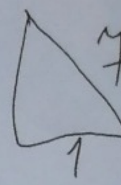
$\boxed{DM = \sqrt{62}}$

$MG = \sqrt{47}$

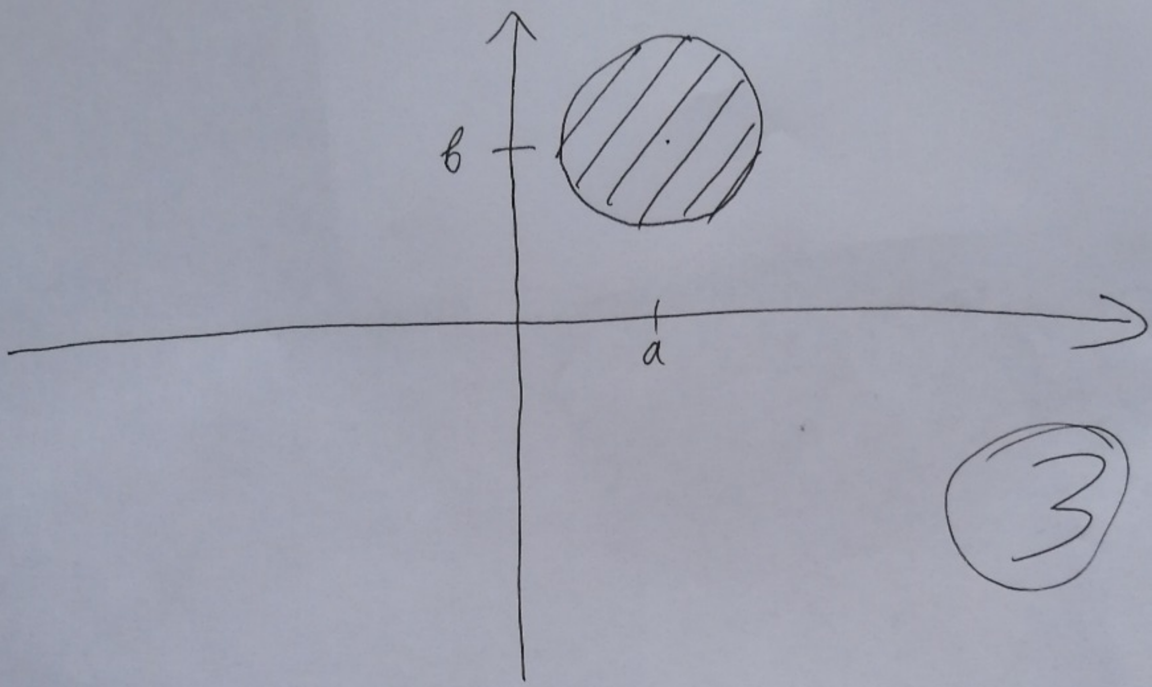
$X = \sqrt{62} - \sqrt{47}$



$x = \sqrt{62}$

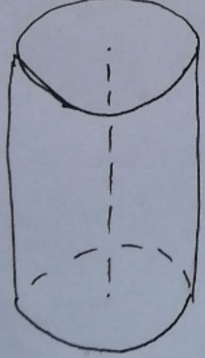


$\min(x; y)$ – минимум из двух чисел x и y.



3

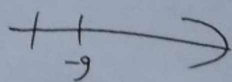
$a^2 + b^2 < \min(-4a - 6b; 13)$



$AB = 2$
$AC = 7$
$CB = 7$
$AD = 8$
$DB = 8$

$-5 + 3\sqrt{2} \vee -1$
$3\sqrt{2} \vee 4$
16

$5 + 3\sqrt{2} \vee 9$
$3\sqrt{2} \vee 4$
16



$S=\frac{a_1+a_1+4d}{2}\cdot 5=(a_1+2d)\cdot 5=5a_1+10d$

$a_6=a_1+5d$
$a_{11}=a_1+10d$

$a_8=a_1+7d$
$a_9=a_1+8d$

$$\begin{cases}(a_1+5d)(a_1+10d)=5a_1+10d+15,\\ (a_1+7d)(a_1+8d)=5a_1+10d+39\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+15a_1d+50d^2-5a_1-10d-15>0\\ \cancel{a_1^2+15a_1d+56d^2-5a_1-10d-39<0}\\ -a_1^2-15a_1d-56d^2+5a_1+10d+39>0\end{cases}$$

$-6d^2+24>0$

$-6d^2>-24$

$d^2<4$

$d\in[-2;2]$

$1/2$

4

1: $a_1^2+15a_1+50-5a_1-10-15>0$

$a_1^2+10a_1+25>0$

$(a_1+5)^2>0$

$a_1\neq-5$

$a_1^2+15a_1+56-5a_1-10-39<0$

$a_1^2+10a_1+7<0$

$-5-\sqrt{18}$ $\quad -5 \quad$ $-5+\sqrt{18}$

$\frac{D}{4}=25-7=18$
$a_1=-5+\sqrt{18}$
$a_2=-5-\sqrt{18}$

AC=+
7
=8
=8
$\sqrt{9}$
$\sqrt{4}$
16

21104017 (U859107 M1304238)

$-5+3\sqrt{2} \vee 9$

$\cancel{a_1^2+15a_1d+56d^2-5a_1-10d-39<0}$

$\frac{D}{4}=25-7=18$

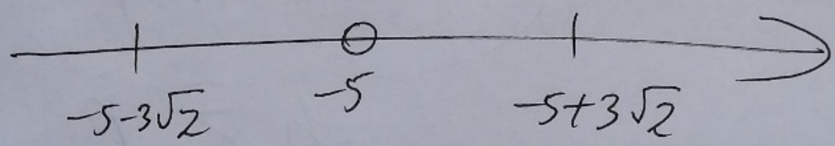
$a_1=\cancel{\ldots}\ -5+3\sqrt{2}$

$a_2=-5-3\sqrt{2}$

$a\neq-5$

$a\in\left(-5-3\sqrt{2};\ -5+3\sqrt{2}\right)$

5



$$\begin{array}{r} \times 1{,}4 \\ 3 \\ \hline 4{,}2 \end{array}$$

$9\ \cancel{\vee}\ 5+3\sqrt{2}$

$4 \vee 3\sqrt{2}$

$16\ \cancel{<}\ 18$

$$\begin{array}{r} \times 1{,}4 \\ 3 \\ \hline 4{,}2 \end{array}$$

$-5+3\sqrt{2} \vee -1$

$3\sqrt{2}\ \cancel{>}\ 4$

$S = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5$ $\quad S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

$a_n = a_1 + d(n-1)$ $\quad 2>0$ $\quad -3<0$

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{11} = a_1 + 11d$

$\boxed{S = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5}$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_9 = a_1 + 8d$ $\quad d > 0$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+11d) > \frac{a_1+a_5}{2} \cdot 5 + 15, \\ (a_1+7d)(a_1+11d) < \frac{a_1+a_5}{2} \cdot 5 + 39 \end{cases} \quad a_5 = a_1 + 4d$$

$\frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5$

1) $a_1^2 + 16da_1 + 55d^2 - 5a_1 - 10d - 15 > 0$ $\quad 5a_1 + 10d + 15$

2) $a_1^2 + 18a_1d + 77d^2 - 5a_1 - 10d - 39 < 0$

$-a_1^2 - 18a_1d - 77d^2 + 5a_1 + 10d + 39 > 0$ $\quad 6$

$-2a_1d - 22d^2 + 24 > 0$

$a_1d + 11d^2 - 24 < 0$

$\cancel{d \cdot a_1 < 11d^2}$ $\quad \cancel{d \in N}$

$a_1 d < 24 - 11d^2$

$a_1 < \frac{24 - 11d^2}{d}$ $\quad d \in \mathbb{Z}$

$f(d) = \frac{24-11d^2}{d} = \frac{24}{d} - 11d$ $\quad \frac{a_1 + a_1 + 4d}{2}$

$f'(d) = \frac{-24}{d^2} - 11 = 0$ $\quad a_1 + 2d \cdot 5$

$$\begin{cases} a_1^2+30a_1+200-5a_1-20-15>0 \\ \end{cases}$$

$a_1^2+25a_1+165>0$ ✓

$a_1^2+30a_1+224-5a_1-20-39<0$

$a_1^2+25a_1+165<0$

$D=625-$

$$\begin{array}{r} 224 \\ -\;\;59 \\ \hline 165 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 165 \\ \times\;\;\;4 \\ \hline 660 \end{array}$$

7

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104017**

ID профиля: **859107**

Вариант 20

Чистовик

5) • Обозначим числа ~~$\log_{\sqrt{2x-8}} = a,$~~ $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=a$; $\log_{(x-4)^2}(5x-26) = в$; $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=c$.

• Найдём произведение чисел a, в, c:

$$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)\cdot\log_{(x-4)^2}(5x-26)\cdot\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=\log_{(x-4)^2}(x-4)\cdot\log_{\sqrt{5x-26}}(5x-26)\cdot$$

$$\cdot\log_{\sqrt{2x-8}}(2x-8)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$$

• Таким образом, $a\cdot в\cdot c=2$

• Докажем, что если 2 числа равны 1 а третье равно 2, то только тогда ~~вып~~ выполняется усл-е задачи:

1) Допустим $a=в$, тогда $c=a+1$, получим систему:

$$\begin{cases} a\cdot в\cdot c=2,\\ a=в,\\ c=a+1. \end{cases} \Rightarrow a^2(a+1)=2$$

$$a^3+a^2-2=0$$

1

введём фун-ю: $f(a)=a^3+a^2-2$

$f'(a)=3a^2+2a=a(3a+2)$

Найдём точки экстр-ма:

$a(3a+2)=0$

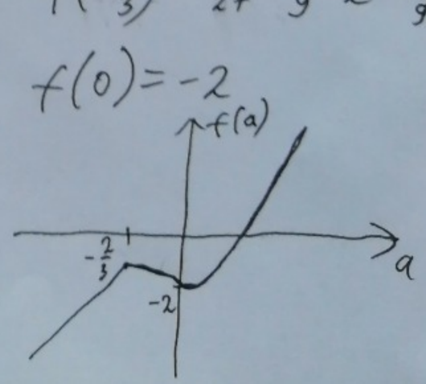
$a=0 \qquad a=-\frac{2}{3}$

$+ \quad - \quad +$ a'

$-\frac{2}{3} \quad 0$

$f\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{27}+\frac{4}{9}-2=-\frac{17}{9}$

$f(0)=-2$



2) Таким образом, уравнение $a^3+a^2-2=0$ имеет лишь 1 корень: $a=1$ – корень, тогда $в=1$, $c=2$.

ч.т.д.

• Найдем все значения x, при которых числа a, в, c равны 1.

а) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1 \Rightarrow \sqrt{2x-8}=x-4$

$x^2-10x+24=0$

$x_1=6$

$x_2=4$

б) $\log_{(x-4)^2}(5x-26)=1 \Rightarrow x^2-8x+16=5x-26$

$x^2-13x+42=0$

$x_1=7$

$x_2=6$

прод.-е смотри на листе 2 →

Чистовик

5) c) $\sqrt{5x-26} = (2x-8) \Longleftarrow \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1$

$5x-26=4x^2-32x+64$

$4x^2-37x+90=0$

$D=1369-1440<0$

корней нет $\Rightarrow$ число c не может быть равно 1, а значит, из условия задачи, следует, что именно число c должно равняться 2, а числа a, в равняться 1.

· Найдём значение x, при котором число c равно 2:

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=2$

$5x-26=2x-8$

$3x=18$

$x=6$

2

· Именно при $x=6$ числа a и в равны 1, а число c равно 2, что удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $x=6$

ние $a^3+a^2-2=0$ имеет ...
$a=1$ – корень, тогда $в=1$, $c=2$.

$a(3a+2)=0$
$a=0$ $a=-\frac{2}{3}$

Чистовик

4) $\begin{cases} НОД(a;в;c)=10, \\ НОК(a;в;c)=2^{17}\cdot 5^{16}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} НОД(a;в;c)=10, \\ НОК(a;в;c)=2\cdot 10^{16}. \end{cases}$

1) Из условий системы следует, что числа a, в, с делятся только на 2;5 (если считать простые числа), кроме того заметим, что все три числа оканчиваются ~~на нуль~~ только на ноль.

Таким образом, можно сделать вывод, что именно наибольшее из чисел a, в, с является НОК, а наименьшее из чисел a, в, с является НОД. (для вып-я усл-я зад-и)

2) Пусть a-наименьшее из чисел, с-наибольшее из чисел, тогда ~~число в~~ число $a=2^1\cdot 5^1$, а число $c=2^{17}\cdot 5^{16}$, ~~способами~~ то число в можно выбрать $17\cdot 16=272$ различными способами

3) ~~Тройки могут быть представлены не только в виде, указанном в пункте a, но~~

Упорядоченные тройки могут содержать числа не только в порядке, указанном в пункте 2, т.к. числа a, в, с могут содерж-я на любых трёх позициях:

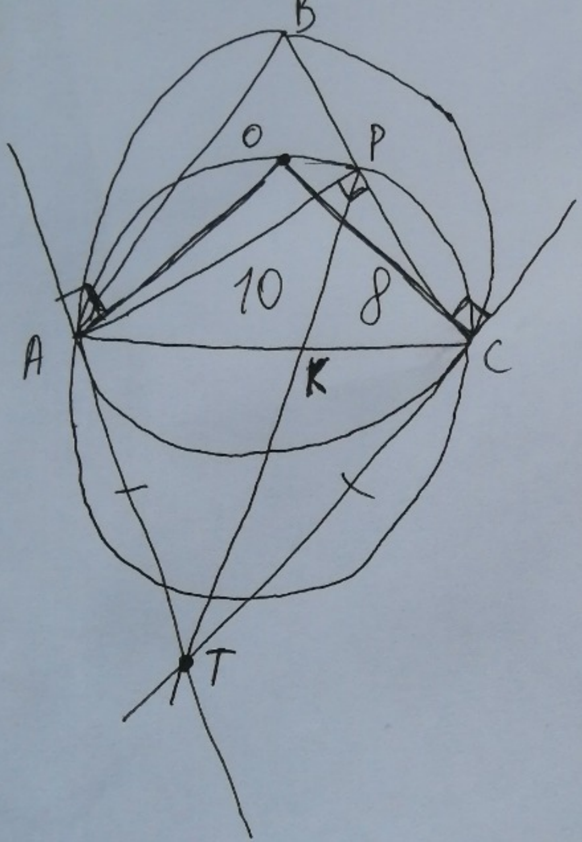
$272\cdot 3=816$

3

Ответ: 816

Чистовик

б)



1) Заметим, что $\triangle AOC$ и $\triangle APC$ вписаны в одну окружность.

$\angle APC = \angle AOC$ (вписаные, опир-ся на дугу AC)

2) $OATC$ - ~~дельтоид~~ прямоуг-к (т.к. $AT = CT$; $\angle OAT = 90°$; $\angle OCT = 90°$)

$\Downarrow$

$\angle AOC = 90°$

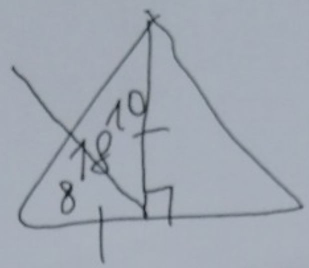
$\Downarrow$

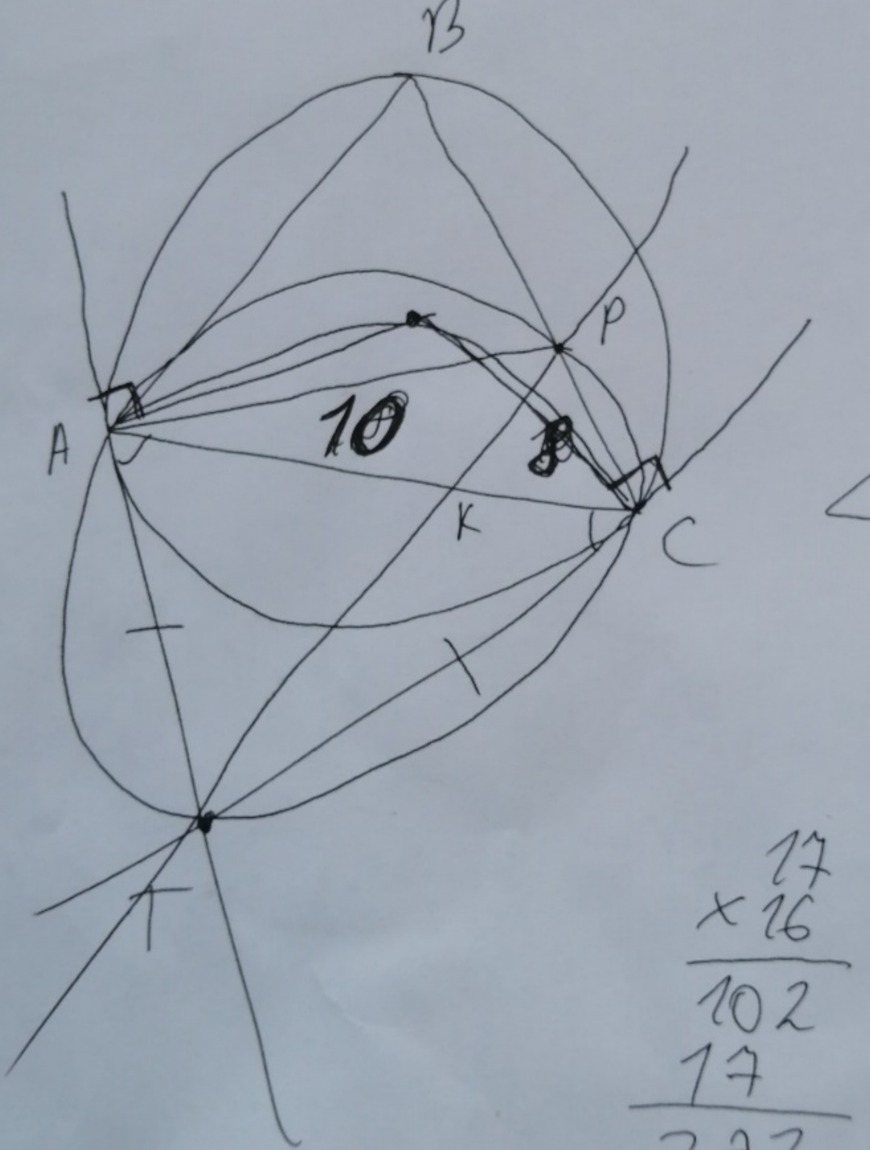
$\angle APC = 90°$

3) т.к. $\angle APC = 90° \Rightarrow AP$ - высота в $\triangle ABC$

4

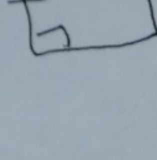
21104017 (U859107 M1304239)





6

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 16 \\ \hline 102 \\ 17 \\ \hline 272 \\ \times\ \ \ 3 \\ \hline 816 \\ \hline \end{array}$$



$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$ $\qquad \log_{(x-4)^2}(5x-26)$ $\qquad \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

1) $x>4$

$x>5{,}2$

$\log_a c \qquad \log_c b \qquad \log_b d$

$\log_a c = \log_c b + 1$

$\log_a c - \log_c b = 1$

$\frac{1}{\log_c a} - \log_c b = 1$

$\log_a c = \log_b a + 1$

$\log_a c - \frac{1}{\log_a b} = 1$

$\log_a c \cdot \log_a b = 2$

$\begin{cases} \log_c b \cdot \log_c a = 0 \\ \log_c b = \log_b d \end{cases} \Rightarrow \log_c b - \log_b a = 0$

4

$\cancel{\log}$

$\frac{1}{\log_b c} - \log_b a = 0$

$1 - \log_b a \cdot \log_b c = 0$

$\begin{cases} \log_b a \cdot \log_b c = 1 \\ \log_c b \cdot \log_c a = 0 \end{cases}$

$\cancel{b=1} \qquad a = 1$

$x=6$

$3x=18$

$5x-26=2x-8$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=2$

$\cancel{\log_{\sqrt{5x-26}} 2x = 8}$

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=10, \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16}=10^{16}\cdot 2=2\cdot 10^{16} \end{cases}$$

• число окан-я на 0 и не имеют б-е дел-й

5

$a; b; c : 10$

$2 \cdot 10^{16} : a; b; c$

$\log_a c + \log_c b + \log_b a =$

$\frac{\lg c}{\lg a} + \frac{\lg b}{\lg c} + \frac{\lg a}{\lg b} =$

$= \frac{\lg^2 c \cdot \lg b + \lg^2 b \cdot \lg a + \lg^2 a \cdot \lg c}{\lg a \cdot \lg b \cdot \lg c} = \cancel{0}$ 3

$\lg a \cdot \lg b \cdot \lg c = \lg \sqrt{2x-8} \cdot \lg \sqrt{5x-26} \cdot \lg x-4$

$\log_{\sqrt{2x-8}} (x-4) \cdot \log_{(x-4)^2} (5x-26) \cdot \log_{\sqrt{5x-26}} (2x-8) =$

$= \log_{(x-4)^2} x-4 \cdot \log_{\sqrt{5x-26}} (5x-26) \cdot \log_{\sqrt{2x-8}} (2x-8) =$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$

$a \cdot b \cdot c = 2$

$a = b$

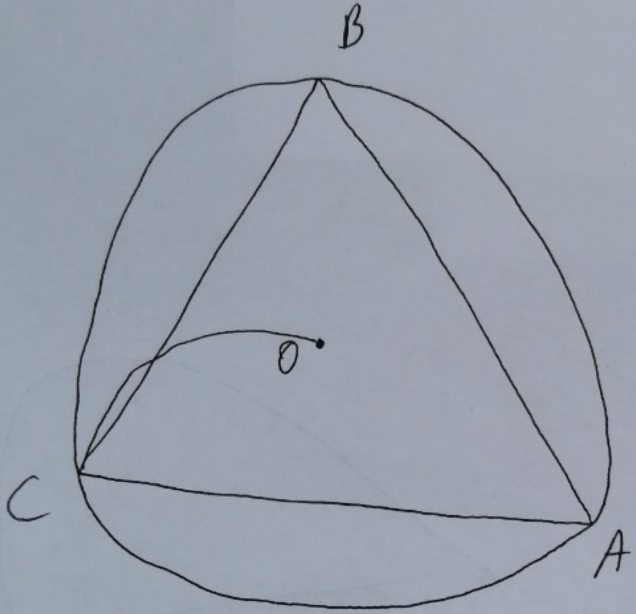
$c =$

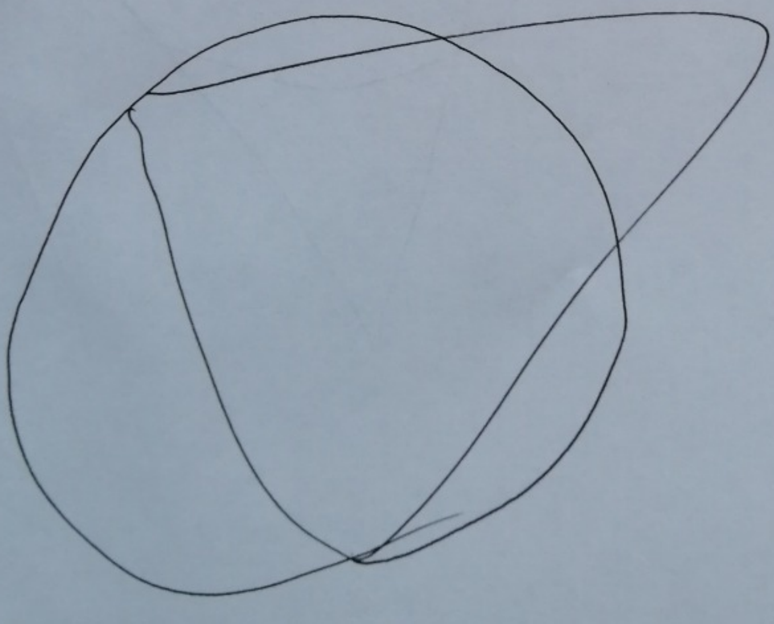
$\begin{cases} a \cdot b \cdot c = 2 \\ a = b \\ a + 1 = c \end{cases}$

$a^2 (a+1) = 2$

$a^3 + a^2 - 2 = 0$

21104017 (U859107 M1304239)





2

21104017 (U859107 M1304239)

НОД $(a;b;c)=10$

$a;b;c \vdots 2, 5$

НОК $(a;b;c)=10^{16}\cdot 2$

$a;b;c \vdots 10$

три числа дел-я на 10 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ все числа ок-я на 10

много $\vdots$ $a;b;c$

$a=10$

$c=10^{16}\cdot 2$

$b \in [10; 2\cdot 10^{16}]$

b $\cancel{a=2\cdot 5}$ $a=2^1\cdot 5^1$

$c=2^{17}\cdot 5^{16}$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 16 \\ \hline 102 \\ 17\ \ \\ \hline 272 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 272 \\ \times\ \ \ 3 \\ \hline 816 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 16 \\ \hline 102 \\ 17\ \ \\ \hline 272 \end{array}$$

1

21104017 (U859107 M1304239)