# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103975**

ID профиля: **320215**

Вариант 20

Чистовик №1 Часть 1

№1

$S=\frac{a_1+a_1+4d}{2}\cdot 5=5\cdot(a_1+2d)=5a_1+10\cdot d$

$\begin{cases} a_6a_{11}>S+15, \\ a_8a_9<S+39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a_1+5d)(a_1+10d)>S+15, \\ (a_1+7d)(a_1+8d)<S+39\end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+15d\cdot a_1+50d^2>\overset{S}{5a_1+10d}+15 \\ a_1^2+15da_1+56d^2<\overset{S}{5a_1+10d}+39 \end{cases}$

$a_1^2+15da_1+50d^2-15>S>a_1^2+15d+56d^2-39$

Так как числа целые, то

$(a_1^2+15da_1+50d^2-15)-(a_1^2+15da_1+56d^2-39)\geq 2$

$24-6d^2\geq 2$

$d^2\leq\frac{11}{3}$, $d\in N$ (разность целых а тоже целая, по условию $d>0$)

$d=1$

$\begin{cases} a_1^2+15a_1+50>5a_1+25, \\ a_1^2+15a_1+56<5a_1+49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0, \\ a_1^2+10a_1+7<0 \end{cases}$

$\begin{cases} (a_1+5)^2>0, \Rightarrow a_1\neq -5 \\ a_1+10a_1+7<0 \\ \frac{D}{4}=25-7=18 \end{cases}$

~~$a_1\in(-\infty; -5-3\sqrt{2})\cup(-5+3\sqrt{2}; +\infty)$, $a_1\in Z$~~

~~$a_1\in(-\infty; -10]\cup[0; +\infty)$~~

$a_1\in(-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$, $a_1\in Z$

$a_1\in[-9; -1]$, $a_1\neq -5$

Чистовик №2 Часть 1

$a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $\{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$.

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13, \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13) \end{cases} \qquad S_M - ?$$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le (\sqrt{13})^2, \\ a^2+b^2 \le (\sqrt{13})^2, \\ a^2+b^2 \le -4a-6b \Leftrightarrow a^2+4a+b^2+6b \le 0 \end{cases}$$

$$(a^2+4a+4)+(b^2+6b+9) \le 13$$

$$(a+2)^2+(b+3)^2 \le (\sqrt{13})^2$$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le (\sqrt{13})^2, \\ a^2+b^2 \le (\sqrt{13})^2, \ (2) \\ (a+2)^2+(b+3)^2 \le (\sqrt{13})^2 \ (3) \end{cases}$$

Все $(a, b)$, удовлетворяющие (2) и (3):
(закрашенная область)

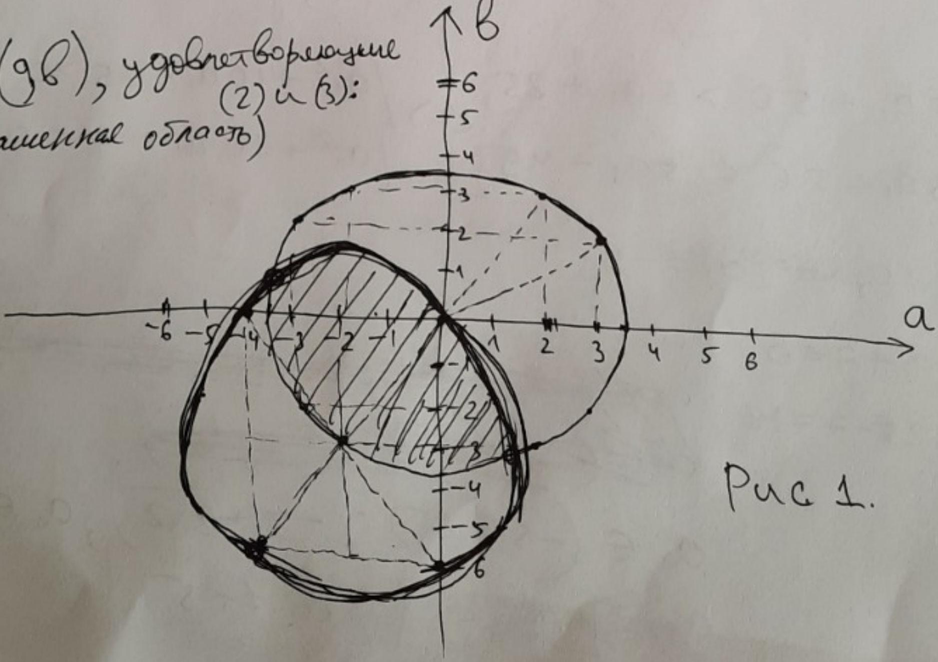



Рис 1.

Чистовик №3 Часть 1

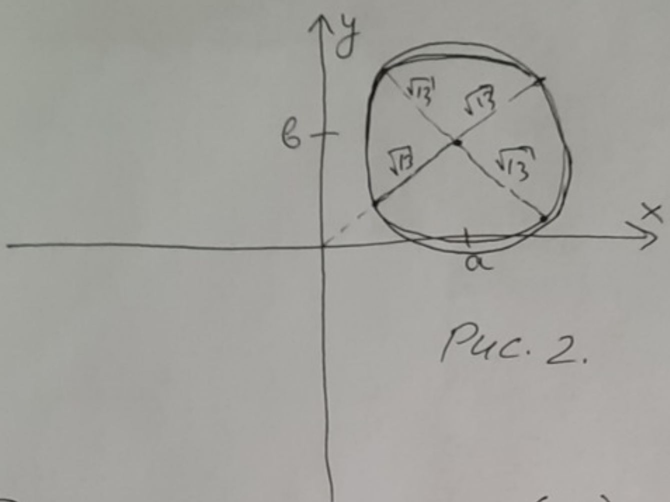
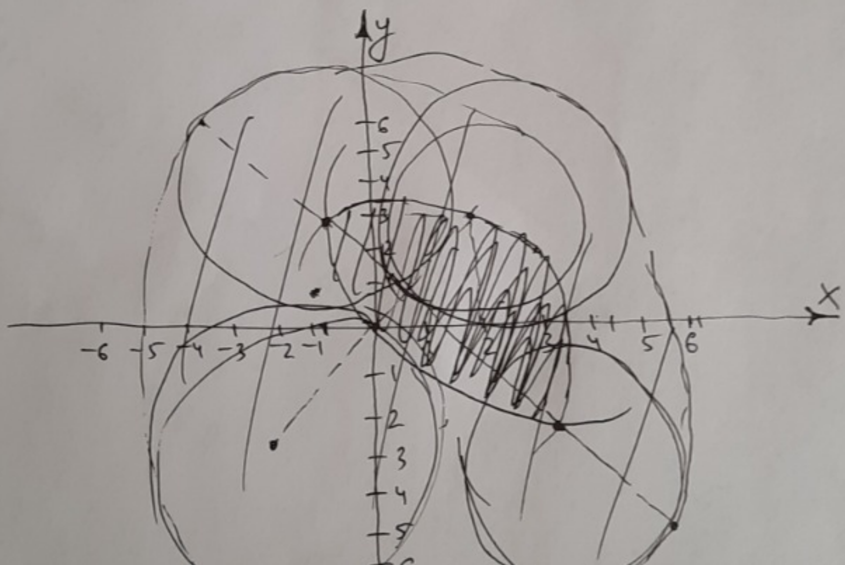



Рис. 2.

Для каждой пары $(a;b)$ из Рис. 1 строим окружность радиусом $\sqrt{13}$ (Рис. 2).

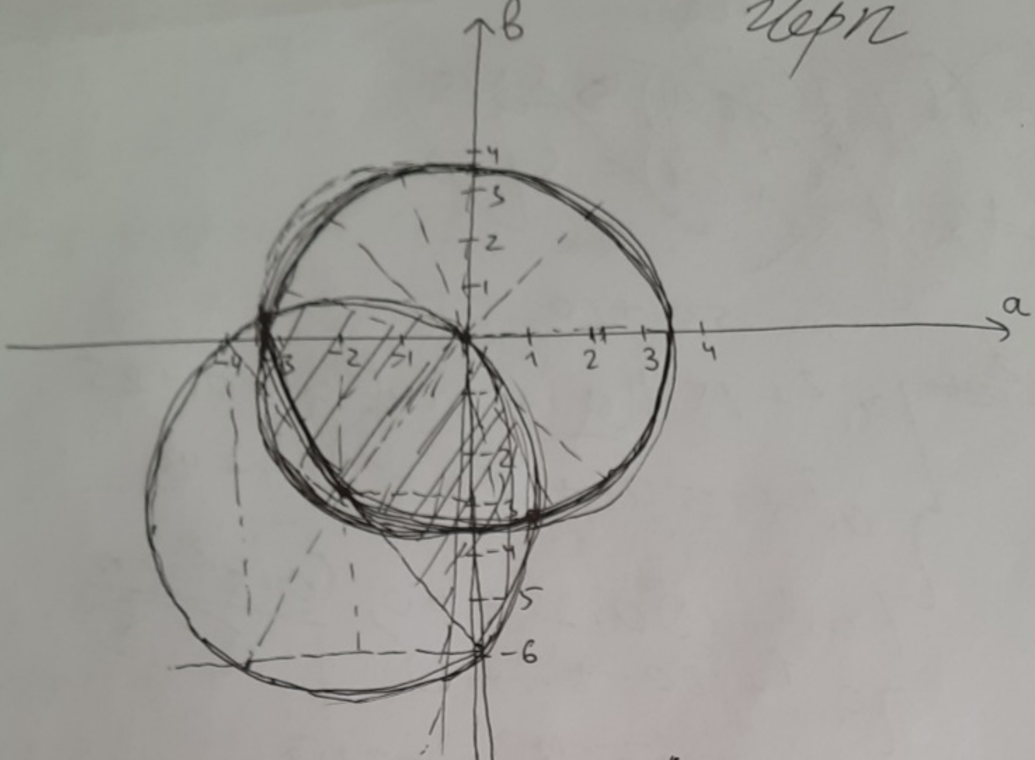


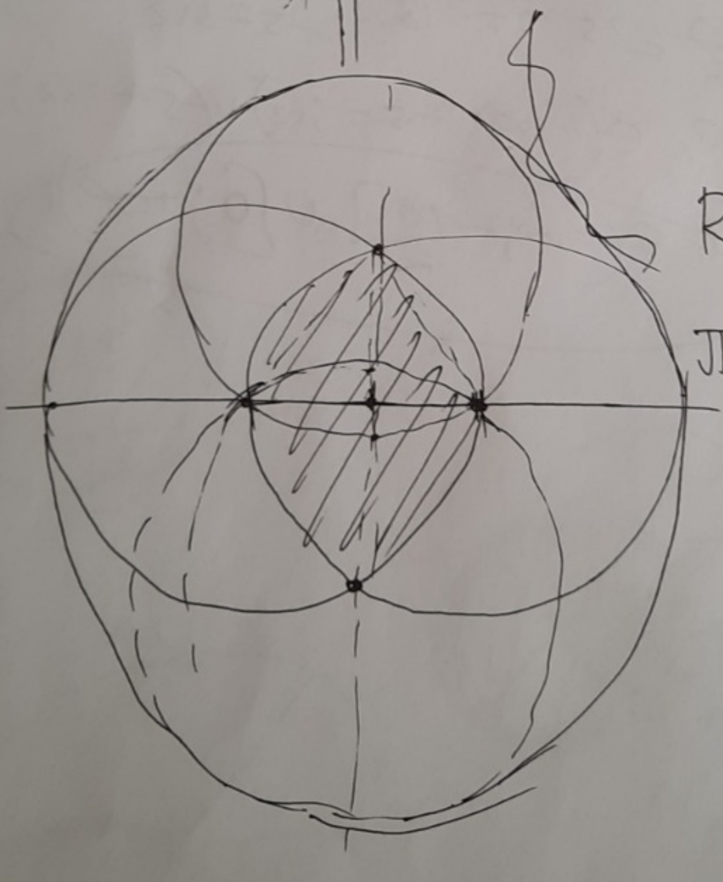

Получим окружность радиусом $\frac{3}{2}\cdot\sqrt{13}$

$$S_M = \pi\cdot\left(\frac{3}{2}\sqrt{13}\right)^2 = \frac{9\cdot 13\pi}{4} = \frac{117\pi}{4}$$

Ответ: $\frac{117\pi}{4}$.

черн



$R = \frac{3}{2}\sqrt{13}$

$\pi R^2 = \pi \cdot \frac{9}{4} \cdot 13 =$

$= \frac{117\pi}{4}.$

21103975 (U320215 M1301039)

Черн

$$\cancel{\begin{cases}\left(\frac{S}{5}+3d\right)\left(\frac{S}{5}+8d\right)\geq S+15\\ \left(\frac{S}{5}+4d\right)\left(\frac{S}{5}+6d\right)<S+39\end{cases}}$$

$S=5a_1+10$

$$\begin{cases}a_1^2+15a_1+50>5a_1+25\\ a_1^2+15a_1+56<5a_1+49\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+10a_1+25>0, \quad \frac{(a_1+5)^2>0}{a_1\neq -5}\\ a_1^2+10a_1+7<0\end{cases}$$

$\frac{D}{4}=25-7=18 \qquad -5\pm3\sqrt{2}$

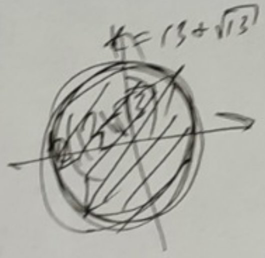
$a_1\in(-\infty;-5-3\sqrt{2})\cup(-5+3\sqrt{2};+\infty), a_1\in\mathbb{Z}$

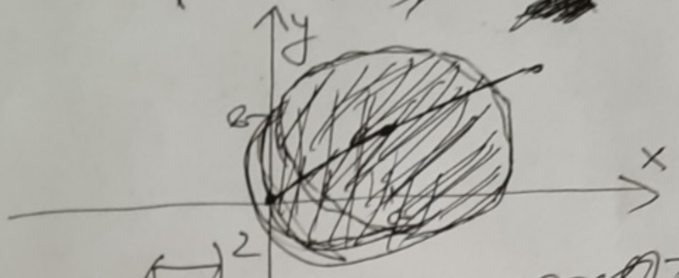
$a_1\in(-\infty;-10]\cup[0;+\infty)$

21703975 (U320215 M1301039)

№3 черн. $S_м$ - ?

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13, \\ a^2+b^2 \le \min(4a-6b, 13)\end{cases}$$




$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le (\sqrt{13})^2, \\ (a+2)^2+(b+3)^2 \le (\sqrt{13})^2, \\ a^2+b^2 \le (\sqrt{13})^2\end{cases}$$

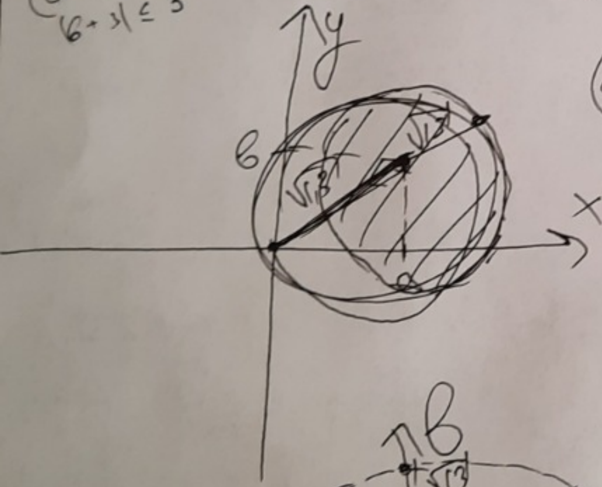
$a^2+b^2 \le 4a-6b$

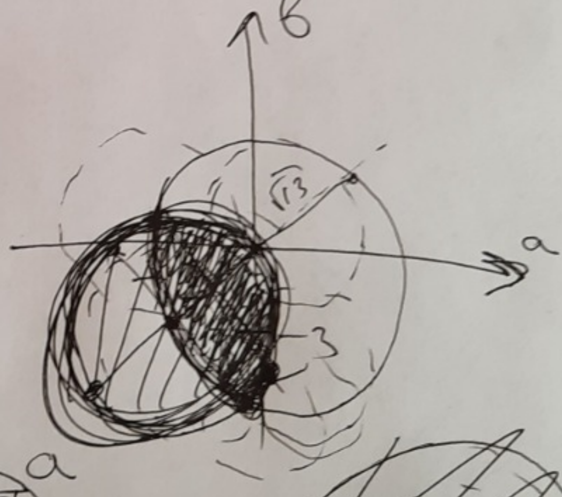
$a^2+4a+4+b^2+6b+9 \le 13$

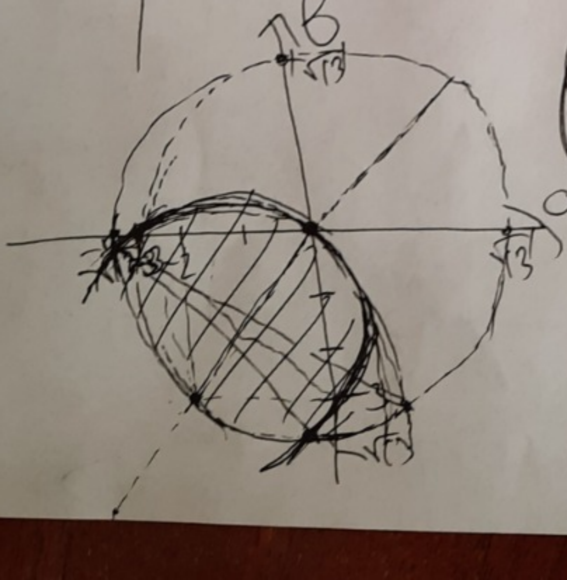
$(a+2)^2+(b+3)^2 \le (\sqrt{13})^2$

$(b+3)^2 \le 9$

$|b+3| \le 3$




Черновик

№1

$$S = \frac{a_1 + a_1 + 4 \cdot d}{2} \cdot 5 = 5(a_1 + 2d) = 5a_1 + 10d$$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > S+15, \\ (a_1+7d)(a_1+8d) < S+39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15d \cdot a_1 + 50d^2 > S+15, \\ a_1^2 + 15d \cdot a_1 + 56d^2 < S+39 \end{cases}$$

$$a_1^2 + 15da_1 + 56d^{2} - 39 \leq S < a_1^2 + 15da_1 + 50d^2 - 15$$

$$\cancel{56d^2 - 39 - (50d^2 - 15) \geq 2}$$

$$50d^2 - 15 - (56d^2 - 39) \geq 2$$

$$24 - 6d^2 \geq 2$$

$$6d^2 \leq 22$$

$$3d^2 \leq 11$$

$$d^2 \leq \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+10) > 5a_1+25, \\ (a_1+7)(a_1+8) < 5a_1+49 \end{cases}$$

$$(a_1+5)^2 > 0$$

$$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$$

1

$$a_1 \in (-\infty; -5-3\sqrt{2}] \cup [-5+3\sqrt{2}; +\infty), a_1 \in \mathbb{Z}$$

$$a_1^2 + 10a_1 + 56 - 49 < 0$$

$$a_1 \in (-\infty; -10] \cup [0; +\infty)$$

$$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$$

$$\frac{D}{4} = 25 - 7 = 18$$

$$= -5 \pm 3\sqrt{2}$$

$$a_1 \geq 3\sqrt{2} - 5$$

21103975 (U320215 M1301039)

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103975**

ID профиля: **320215**

Вариант 20

Чистовик №1    Часть 2

№4

$$\begin{cases} НОД(a, b, c) = 10, \\ НОК(a, b, c) = 2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

Значит $a = 2\cdot 5\cdot a_1$, $b = 2\cdot 5\, b_1$, $c = 2\cdot 5\cdot c_1$.

Тогда $НОК(a_1, b_1, c_1) = 2^{16}\cdot 5^{15}$,*

$НОД(a_1, b_1, c_1) = 1$.

Как минимум одно из чисел $a_1, b_1, c_1$ не содержит 2* и как минимум одно – 5.
Рассмотрим независимо друг от друга двойки и ~~[illegible]~~ пятёрки, составляющие $a_1, b_1, c_1$ (очевидно, никаких других простых множителей кроме 2 и 5 нет).  С двойками:

Без учёта порядка: $2^x$  $2^y$  $2^0$, $x+y=16$.

| x | y | |
|---|---|---|
| 0 | 16 | |
| 1 | 15 | 7 случаев |
| 2 | 14 | |
| ... | ... | |
| 7 | 9 | |
| 8 | 8 | |
| 9 | 7 | 7 случаев |
| 10 | 6 | |
| ... | ... | |
| 15 | 1 | |
| 16 | 0 | |

Таким образом, все случаи: с учётом порядка

~~27~~ случаев с перестановками

$(7\cdot 3 = 21)$

$+$

3 случая, когда только одно из $a_1, b_1, c_1$ содержит двойку

$2^0, 2^0, 2^{16}$

$2^0, 2^{16}, 2^0$

$2^{16}, 2^0, 2^0$

$+$

Чистовик №2 Часть 2

\+ 3 случая

$2^8\ 2^8\ 2^0$

$2^8\ 2^0\ 2^8$

$2^0\ 2^8\ 2^8$

Итого: 27 случаев с двойками.

С пятёрками: (без учёта порядка)

$5^m\ 5^n\ 5^0$, $m+n=15$

| m | n |
|---|---|
| 0 | 15 |
| 1 | 14 |
| ... | ... |
| 7 | 8 |
| 8 | 7 |
| ... | ... |
| 14 | 1 |
| 15 | 0 |

$\left.\begin{matrix}1;14\\ \dots\\ 7;8\end{matrix}\right)$ 7 случаев

$\left.\begin{matrix}8;7\\ \dots\\ 14;1\end{matrix}\right)$ 7 случаев

Все случаи: (с порядком)

7 случаев с перестановками

$(7\cdot 3=21)$

\+

3 случая, когда только одно число содержит пятёрки.

$5^0\ 5^0\ 5^{15}$

$5^0\ 5^{15}\ 5^0$

$5^{15}\ 5^0\ 5^0$

Итого: 24 случая с пятёрками.

По правилу произведения кол-во троек $(a_1, b_1, c_1)$ равно $27\cdot 24=540+108=648$ способов.

Количество троек $(a_1, b_1, c_1)$ соответствует кол-ву троек $(a_2, b_2, c_2)$, т.е. ответ 648.

Ответ: 648.

Чистовик №3 Часть 2

№5

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$, $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$, $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

ОДЗ:

$x>4$

$x\neq 4,5$ $\iff$ $x\in(5,2;5,4)\cup(5,4;+\infty)$

$x\neq 3, x=5$

$5x>26$

$5x\neq 27$

Перемножим числа, произведение равно

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)\cdot\log_{(x-4)^2}(5x-26)\cdot\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=$

$=2\log_{2x-8}(x-4)\cdot\frac{1}{2}\log_{x-4}5x-26\cdot 2\log_{5x-26}2x-8=$

$=2\log_{2x-8}x-4\cdot\log_{x-4}5x-26\cdot\log_{5x-26}2x-8=$

$=2\log_{2x-8}5x-26\cdot\log_{5x-26}2x-8=$

$=2\log_{2x-8}2x-8=2.$

Пусть два числа равны $m$, тогда третье число равно $m+1$.

$m^2(m+1)=2 \Rightarrow m^3+m^2-2=0$

$$\begin{array}{l|l} m^3+m^2-2 & m-1 \\ \underline{-m^3-m^2} & \overline{m^2+2m+2} \\ \quad 2m^2-2 & \\ \quad \underline{-2m^2-2m} & \\ \qquad 2m-2 & \\ \qquad \underline{-2m-2} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$(m-1)(m^2+2m+2)=0$

$m=1$ $\quad\varnothing$

Итак, два числа равны единице, а ещё одно — двойке.

Чистовик № 4 Часть 2

Найдём при каких $x$ числа равны 1.

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2x-8}=x-4, \ (1) \\ (x-4)^2=5x-26, \ (2) \\ \sqrt{5x-26}=2x-8 \ (3) \end{array}\right.$$

(1) $\sqrt{x-4}\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{2}\right)=0$

$x=4$ или $x=6$

$\notin$ ОДЗ $\quad \in$ ОДЗ

(2) $(x-4)^2=5x-26$

$x^2-8x+16=5x-26$

$x^2-13x+42=0$

$x=6$ или $x=7$

$\in$ ОДЗ $\quad \in$ ОДЗ

(3) $\sqrt{5x-26}=2x-8$

$$\begin{cases} 2x-8\geq 0, \text{ — в ОДЗ} \\ 5x-26=4x^2+64-32x \end{cases}$$

$4x^2-37x+90=0$

$D=37^2-4^2\cdot 90=1369-1440<0$

При $x=6$ первое и второе число равны 1, а третье число равно $\log_{\sqrt{30-26}}(12-8)=\log_2 4=2$, т.е. два числа равны, а третье больше их на 1. Ответ: 6.

Черновик

№4

кол-во решений-?

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c)=10, \\ \text{НОК}(a,b,c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

$2^x$ $2^y$ нет

$\begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ 7сл.

8 8 1сл.

$$\begin{cases} \text{НОД}(\text{НОД}(a,b),c)=10 \\ \text{НОК}(\text{НОК}(a,b),c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

7сл $\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$

$7\text{сл}\cdot C_3^2 = 21\text{сл.}$ · 0 0 3сл 8 8 · 3сл.

27 случаев.

$2\cdot 5\cdot a_1$ $2\cdot 5\cdot b_1$ $2\cdot 5\cdot c_1$

[redacted]

НОКам $=2^{16}\cdot 5^{15}$

1 15

6 10

7 8

~~8 8~~

$2^x$ $2^y$ нет $x+y=16$ 16 реш

$5^m$ $5^n$ нет $m+y=15$ 15 реш

$$\underbrace{7\text{сл}\cdot C_3^2 = 21 + \begin{matrix} 0\ 0\ \text{есть} \\ \cdot\ -\ \cdot \\ \cdot\ -\ \cdot \end{matrix}\Big\}\ 3\text{сл}}_{23\text{ сл.}}$$

~~1 14~~

~~7 8~~

№ 6 черн.

черн.

№ 5

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$ $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$ $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$x, y, z$

$a, a, a+1$

~~I сл (x, y, z)~~

$$\cancel{\begin{cases}\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26) \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 1 + \log\end{cases}}$$

$\log_{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x-4}}(x-4)$ $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$2x-8>0$ $\cancel{x>4}$

$2x-8\neq 1$ $\cancel{x\neq 4,5}$

$x-4>0$ $\cancel{x>4}$

$x\neq 3, x\neq 5$ $\cancel{x\neq 3, x\neq 5}$

$5x>26$ $x>5,2$

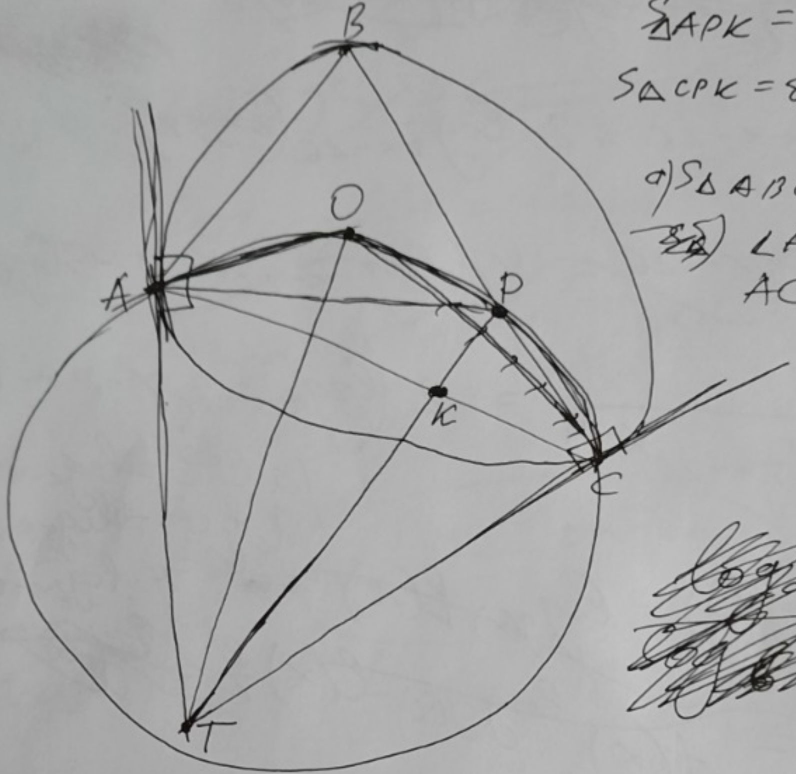
$5x\neq 27$ $x\neq 5,4$

ОДЗ: $x\in(5,2;\ 5,4)\cup(5,4;+\infty)$

$$\frac{1}{\log_{x-4}(\sqrt{2}\cdot\sqrt{x-4})} = \frac{1}{\frac{1}{2}+\log_{x-4}\sqrt{2}} = \frac{2}{1+\log_{x-4}2}$$

$\frac{1}{2}\log_{x-4}5x-26$ $2\log_{5x-26}(2x-8)$

№6 черн.




$S_{\triangle APK} = 10$

$S_{\triangle CPK} = 8$

а) $S_{\triangle ABC}$ — ?

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

$AC$ — ?

$$\begin{cases} ab^2c = \log_{x-4}(5x-26), \\ abc^2 = 4\log_{5x-26}(2x-8), \\ a^2bc = 4\log_{2x-8}(x-4). \end{cases}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\log_{2x-8}(5x-26)}{4\log_{5x-26}(x-4)} = 1$$

$$\log_{2x-8}(5x-26) = 4\log_{5x-26}(x-4)$$

Черн.

~~$\frac{1}{4}\log_{x-4} 2 = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$~~

~~$\log(ab) = \log_a + \log_b$~~

$\frac{1}{2}\log_{x-4} 5x-26 = 2\log_{5x-26}(2x-8)$

~~$\log_{x-4} 5x-26 = 4(\log_{5x-26} x-4 + \log_{5x-26} 2)$~~

$\frac{1}{2\log_{5x-26} x-4} = 2(\log_{5x-26} x-4 + \log_{5x-26} 2)$

$\begin{cases} a b^2 c = \log_{x-4}(5x-26), \\ a \cdot b c^2 = 4\log_{5x-26}(2x-8) \\ a^2 bc = 4 \cdot \log_{2x-8}(x-4) \end{cases}$

$\log_{f(x)} h(x) = \log_{g(x)} l(x)$

~~$h(x) = f(x)^{\log_{g(x)} l(x)}$~~

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$x-4 = \sqrt{2x-8}^{\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)}$

~~$x-4 = (2x-8)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_{2x-8}(5x-26)}}$~~

a b c

~~$xy = \log$~~

$\begin{cases} ab = \log_{2x-8}(5x-26), \\ bc = \log_{x-4}(2x-8), \\ ca = 4\log_{5x-26}(x-4) \end{cases}$

Черн.

$\log_{\sqrt{2x-8}} x-4 = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\log_{f(x)} h(x) = \log_{g(x)} l(x)$

$\log_{f(x)} h(x) \cdot \log_{e(x)}(g(x))$

$2\log_{\underset{a}{2x-8}} \overset{x-4}{b}$ $\quad$ $\frac{1}{2}\log_{\underset{b}{x-4}} \overset{c}{5x-26}$ $\quad$ $2\log_{\underset{c}{5x-26}} \overset{a}{2x-8}$

$2\log_a b$ $\quad$ $\frac{1}{2}\log_b c$ $\quad$ $2\log_c a$

$\frac{1}{2}\log_b c + 1 = 2\log_c a$

$\frac{1}{2}\log_b bc = 2\log_c a$

$\log_b bc = 4\log_c a$

$\log_c \frac{a}{c} - 1$

$\frac{1}{\frac{1}{2}\log_c b}$

$\frac{1}{\log_c b} = 4\log_c a - 2$

$\log_c b \cdot 4 \cdot \log_c \frac{a}{\sqrt{c}} = 1$

$2\cdot\log_{2x-8} 2x-8 = abc = 2$

Черн.

$$\begin{cases} abc = 2, \\ ab = \log_{2x-8}(5x-26), \\ bc = \log_{x-4}(2x-8) \\ ca = 4\log_{5x-26}(x-4) \end{cases}$$

$x^2(x+1) = 2$

$x^3 + x^2 - 2 = 0$

$$\cancel{\begin{array}{l|l} x^3+x^2-2 & x-1 \\ -\;x^3-x^2 & x^2+2x+2 \\ \quad 2x^2-2 & \\ -\;2x^2-2x & \\ \quad 2x-2 & \\ -\;2x-2 & \\ \quad 0 & \end{array}}$$

$(x-1)(x^2+2x+2) = 0$

$x = 1$

~~[illegible]~~

$\cancel{\log_{\sqrt{2x-6}}(x-4) = 1}$

$\cancel{x-4 = \sqrt{2x-6}}$

$$\left[\begin{array}{l} x-4 = \sqrt{2x-8} \Leftrightarrow \sqrt{x-4}\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{2}\right) = 0 \\ \qquad x_1 = 4 \quad x_2 = 6 \\ (x-4)^2 = 5x-26, \\ \sqrt{5x-26} = 2x-8 \end{array}\right.$$

$x^2 - 13x + 42 = 0$ $\quad x_3 = 6,\ x_4 = 7$

$D = 169 - 4\cdot 42 = 1$

$x_{1,2} = \frac{13\pm 1}{2} = $ [illegible]

$$\begin{array}{r} \times\ 37 \\ 37 \\ \hline 259 \\ +\,111\ \ \\ \hline 1369 \end{array}$$

$5x - 26 = 4x^2 - 32x + 64$

$4x^2 - 37x + 90 = 0$ $\quad D = 37^2 - 16\cdot 90$

$1440$

$\cancel{x^2 - \frac{37}{4}x + 22{,}5 = 0}$

$D = 1369 - 1440 \Rightarrow \varnothing$

$37^2 - 12^2\cdot 10 =$

$= (37 + 12\sqrt{10})(37 - 12\sqrt{10})$

$37 < 12\sqrt{10}$