Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103866**

ID профиля: **857012**

Вариант 20

Чистовик I

№1

I Возрост. ар. прогр. $a_1; a_2; a_3; a_4 \ldots$ $(a_i \in \mathbb{Z})$

$\Downarrow$

b - разн. $b > 0$

$S_5 = 5$

$\begin{cases} a_6 \cdot a_{11} > 5 + 15 \\ a_8 a_9 < 5 + 39 \end{cases}$

II $a_6 = a_1 + 5b$ $a_{11} = a_1 + 10b$ $\Rightarrow a_6 \cdot a_{11} = a_1^2 + 15a_1 b + 50b^2$

$a_8 = a_1 + 7b$ $a_9 = a_1 + 8b$ $\Rightarrow a_8 a_9 = a_1^2 + 15a_1 b + 56b^2$

$S_5 = a_1 + a_2 \ldots a_5 = 5a_1 + 10b$

III $\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 b + 50b^2 > 5a_1 + 10b + 15 \\ a_1^2 + 15a_1 b + 56b^2 < 5a_1 + 10b + 39 \end{cases}$ | ~~[illegible]~~

$\begin{cases} -a_1^2 - 15a_1 b - 50b^2 < -5a_1 - 10b - 15 \\ a_1^2 + 15a_1 b + 56b^2 < 5a_1 + 10b + 39 \end{cases}$ | сложим и выйдем из системы

$6b^2 < 24$

$b^2 < 4$ и $b > 0$ по усл.

$\Downarrow$

$b \in (0; 2)$ По усл. ~~[illegible]~~ все члены ар. прогр. целые тогда и $b \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} b \in (0; 2) \\ b \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \boxed{b = 1}$

IV легко видеть, что $a_1^2 + 15a_1 + 50 < a_1^2 + 15a_1 + 56$

тогда

$5a_1 + 10 + 15 < a_1^2 + 15a_1 + 50 < a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 10 + 39$

$0 < a_1^2 + 10a_1 + 25 < a_1^2 + 10a_1 + 31 < 24$

тогда $\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$ $a_1 \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 5)^2 > 0 \\ (a_1 + 5 + 3\sqrt{2})(a_1 + 5 - 3\sqrt{2}) < 0 \end{cases}$

$-10 < -5 - 3\sqrt{2} < -9$

$-5 < -3\sqrt{2} < -4$

$25 > 18 > 16$

$-1 < -5 + 3\sqrt{2} < 0$

$4 < 3\sqrt{2} < 5$

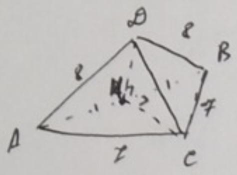
$16 < 18 < 25$

тогда $\begin{cases} a_1 \neq 5 \\ a_1 \in [-9; -1] \\ a_1 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

№2

Чистовик II

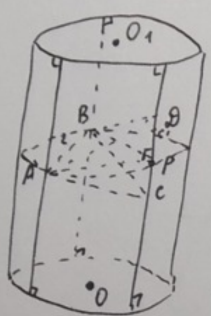


Дано: ABCD тетраэдр вписан в цилиндр (OO_1; R)

$AB=2$; $AD=8=DB$; $AC=7=CB$

$DC \parallel OO_1$; R - миним. возможный.

$CD=?$



I 1) Д.п. Пусть H - сер. AB то $DH \perp AB$, $CH \perp AB$ т.к. $\triangle ADB$ и $\triangle ACB$ равнобед.

2) Поскольку $DH \perp AB$ и $CH \perp AB$ то $AB \perp (HDC)$ (Если $C \notin HD$; но ADCB - тетр. след $C \in HD$)

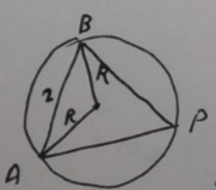
Т.к. $AB \perp (HDC)$ то $DC \perp AB$

II 3) Д.п. P т.ч. $AP \perp DC$; $P \in DC$

Т.к. $\triangle ADC = \triangle BDC$ по 3-м стор. то $BP \perp DC$ и $BP = AP$

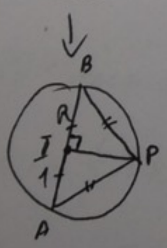
4) Из того, что $BP \perp DC$ и $AP \perp DC$ => что $(ABP) \perp DC$ т.е. $(ABP) \perp OO_1$

Значит; сеч. цилиндра плоск. (ABP); $\perp OO_1$ => этим сеч. явл. окр. с рад $= R$.



5) значит AB - это хорда $AB=2$ => $R \geq AB/2$

Тогда мин. $R=1$, если AB - диам. данного сеч.

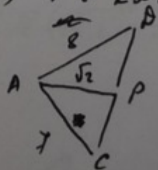


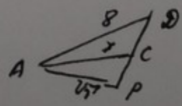
III 6) $AP = PB$ => PI (где I цен. сеч.) $\perp AB$ тогда $PI = R = 1$

и $AP = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ по т. Пиф.

7) В плоскости ADP имеем. что

а) $P \in [DC]$ и б) $C \in [DP]$ т.к. $DA > AC$





Тогда CD: а) $CD = \sqrt{AD^2-AP^2} + \sqrt{AC^2-AP^2} = \sqrt{62} + \sqrt{47}$

б) $\sqrt{AD^2-AP^2} - \sqrt{AC^2-AP^2} = \sqrt{62} - \sqrt{47}$

Ответ: $CD = \sqrt{62} - \sqrt{47}$; $\sqrt{62} + \sqrt{47}$

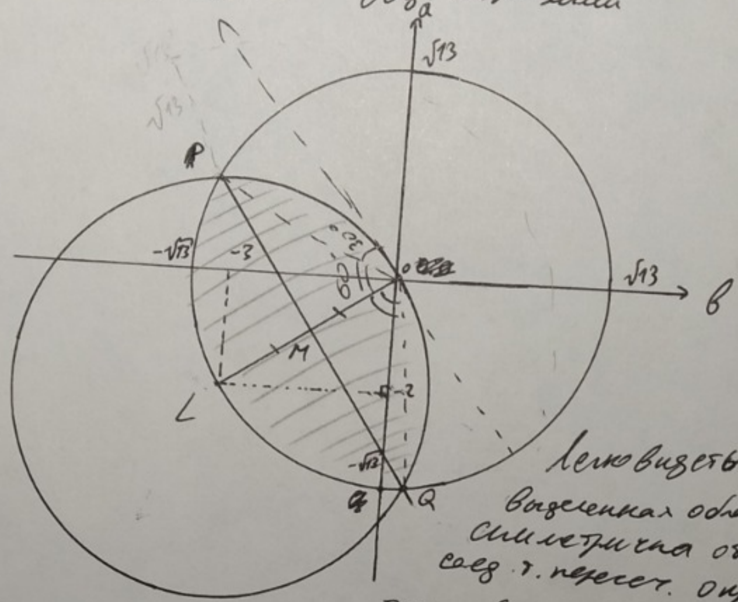
№ 3 Чистовик III

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)\le 13 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,\ 13) & (2)\end{cases}$$

(2): $-4a-6b<13$: $(a+2)^2+(b+3)^2\le 13$

$13\le -4a-6b$: $a^2+b^2\le 13$

$(b;a)$ ∈ ~~...~~ области выд. штриховкой



Легко видеть, что выделенная область ~~...~~ симметрична отн-но прямой, соед. т. пересеч. окр. (PQ)

тогда S_{M_1} при $(b;a)$ ∈ верхн. заштр. ~~...~~ площади равна $\frac{1}{2}S_M$

S_M - иск.

$S_M = 2S_{M_1} = 2\cdot S_{\text{сект.}(b;a)}\cdot 2\sqrt{13}/\sqrt{13} = 4S_{\text{сегм.}(b;a)}$ т.к. В этой области наход. центр. окр. $(x-a)^2+(y-b)=13$ с рад $\sqrt{13}$

$= 4S_{\text{сегм.}} = \{$т.к. M сер. OL то$\} =$

$= 4\cdot\frac{1}{3}\pi R^2 = 4\cdot\frac{1}{3}\pi(\sqrt{13})^2 =$

$= \frac{52}{3}\pi$

Ответ: $\frac{52}{3}\pi$.

Черновик

$-9 \quad \cancel{-10}\,-8 \quad \cancel{-11}\,-7 \quad \cancel{-12}\,-6 \quad \cancel{-13}\,-5$

$\underbrace{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5}_{\text{сум} = S} \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10} \quad a_{11} \quad \in \mathbb{Z}$

$-5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1$

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{11} > S+15 \\ a_8 a_9 < S+39 \end{cases}$$

$a_6 = a_1 + 5b \qquad a_{11} = a_1 + 10b \qquad a_6 \cdot a_{11} = a_1^2 + 15a_1b + 50b^2$

$a_8 = a_1 + 7b \qquad a_9 = a_1 + 8b \qquad a_8 a_9 = a^2 + 15a_1b + 56b^2$

$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_1 + 10b$

$a_1^2 + 15a_1b + 50b^2 > S+15$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1b + 56b^2 < S+39 \\ -a_1^2 - 15a_1b - 50b^2 < S+15 \end{cases}$$

$6b^2 < 24$

$b^2 < 4 \qquad b \in (-2;2) \qquad b > 0 \Rightarrow b \in (0;2)$

$D = 100 - 78 = \cancel{22} = 18$

$6^2 \cdot 2$

$a_{1,2} = \frac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

$-25 \qquad 100 \quad -150 \quad 50 \qquad b = 1$

$-20 \qquad -4 \quad a_6 a_{11} < a_8 a_9$

$-35 \quad \cancel{525} \quad 20 \quad 15 \quad 81 \quad -135 \quad 50 \quad 2$

$81 \quad 2 \quad -135 \quad 36 \quad 84 \quad -135 \quad 42 \quad 56 \quad 4$

$S+15 < a_1^2 + 15a_1b + 50b^2 < a_1^2 + 15a_1b + 56b^2 < S+39$

$0 \quad 25 \quad -75 \quad +50$

$\cancel{S+15 < a_1+}$

$\cancel{5a_1 + 25} < a_1^2 + \cancel{15a_1} + \cancel{50} < a_1^2 + \cancel{15a_1} + \cancel{56} < \cancel{5a_1 + 49}$

$10a_1 \quad 25 \quad 10a \quad 31 \quad 24$

$0 < a_1^2 + 10a_1 + 25 < a_1^2 + 10a_1 + 31 < 24$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + \cancel{31}\,7 < \cancel{24} \\ a_1 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \\ (a_1 + 5 + 3\sqrt{2})(a_1 + 5 - 3\sqrt{2}) < 0 \\ a_1 \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad a_1 < 0$$

-5

$0 \quad 1 \quad 9 \quad 10$

$-5-3\sqrt{2} \quad 5 \quad 5+3\sqrt{2}$

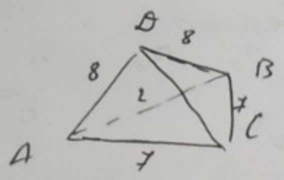
$5 + 3\sqrt{2} < 10$

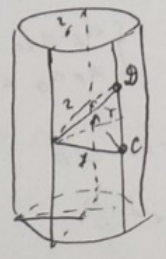
$3\sqrt{2} < 5$

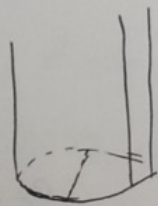
$18 < 25$

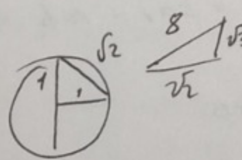
$a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

Черновик.





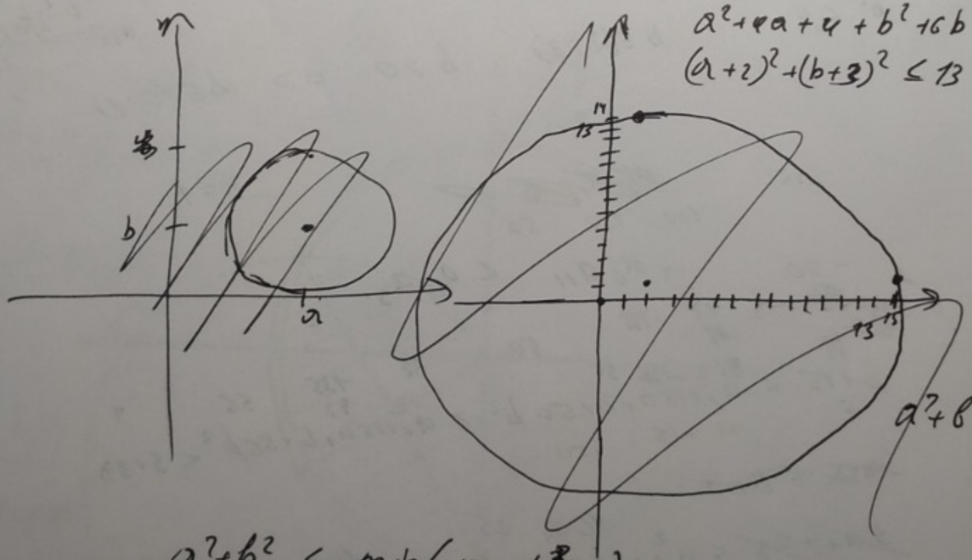




$6\cancel{\sqrt{13}} - 2 = 62$

$a = 2$
$b = 1$

$a^2 + b^2 \le -4a - 6b$
$a^2 + 4a + 4 + b^2 + 6b + 9 - 13 \le 0$
$(a+2)^2 + (b+3)^2 \le 13$



$a^2 + b^2 \le 13$

$a^2 + b^2 \le \min(-4a - 6b; 13)$
$\vee$
0

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 13 \\ a^2 + b^2 \le 1 \end{cases}$$

Черновик

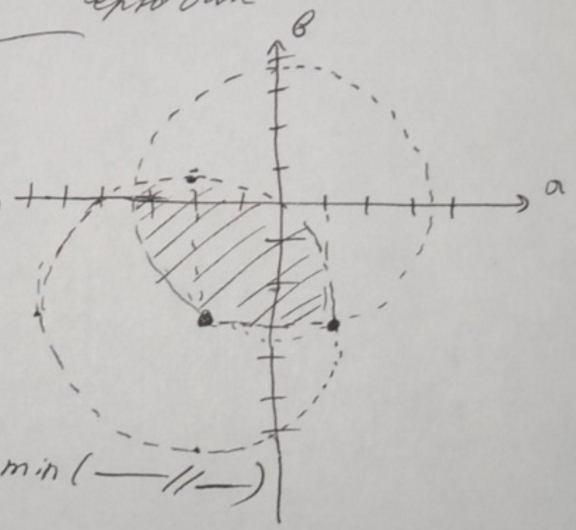
$$\begin{cases} \cancel{(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13} \\ \cancel{a^2+b^2 \le \min(-4a-6b; 13)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13) \end{cases}$$

$$a^2+b^2 \le 13$$

$$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$$

$$x^2-2ax+y^2-2by \le 13 - \min(\text{—}//\text{—})$$



$$\begin{cases} (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 13 \\ 4a+6b \le -13 \end{cases}$$

$$a = \frac{-13-6b}{4}$$

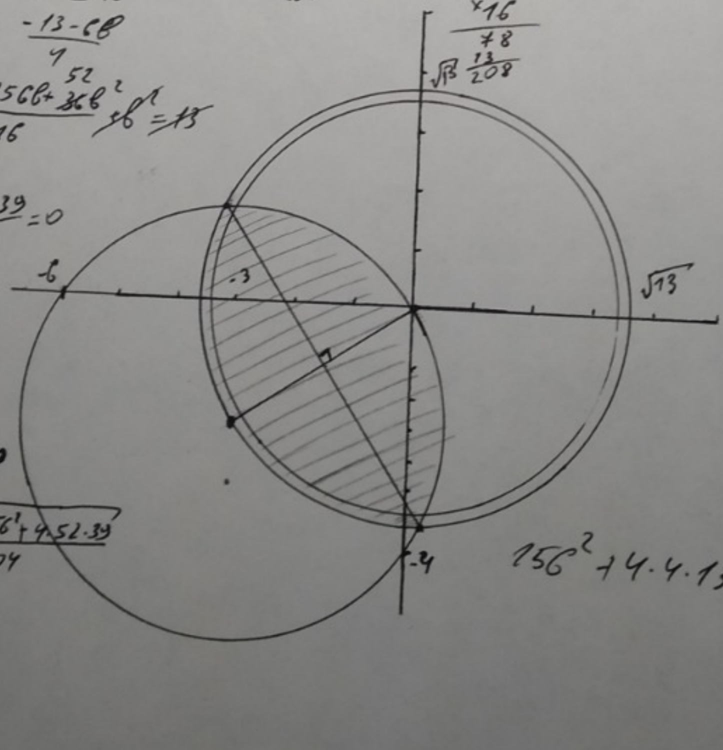
$$a^2 = \frac{169+156b+36b^2}{16} + b^2 \le 13$$

$$\frac{52b^2+156b-39}{16} = 0$$

130
+26

$(-2+\sqrt{13}; -3)$

13
×16
78
13
208



$$52b^2+156b-39=0$$

$$b = \frac{-156 \pm \sqrt{156^2+4\cdot 52\cdot 39}}{104}$$

$$156^2+4\cdot 4\cdot 13\cdot 13\cdot 3$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103866**

ID профиля: **857012**

Вариант 20

№4

$a = 2^{a_1} \cdot 5^{a_2}$

$b = 2^{b_1} \cdot 5^{b_2}$

$c = 2^{c_1} \cdot 5^{c_2}$

Чистовик IV

НОД $(a;b;c) = 2^1 \cdot 5^1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ хот. в одном из $a;b;c$; есть множ. 2^1 и 5^1 без повт. аналогично с 2^{17} и 5^{16}

$a;b$

I

1) $a = 2^1 \cdot 5^{a_2}$ $\quad a_2 \neq 16$
$b = 2^{b_1} \cdot 5^1$ $\quad b_1 \neq 17$ $\Big\}$ $c = 2^{17} \cdot 5^{16}$

2) $a = 2^1 \cdot 5^{16}$
$b = 2^{b_1} \cdot 5^1$ $\quad b_1 \neq 17$ $\Big\}$ $c = 2^{17} \cdot 5^{c_2}$

3) $a = 2^1 \cdot 5^{a_2}$ $\quad a_2 \neq 16$ $\Big\}$ $c = 2^{c_1} \cdot 5^{16}$
$b = 2^{17} \cdot 5^1$

4) $a = 2^1 \cdot 5^{16}$
$b = 2^{17} \cdot 5^1$ $\Big\}$ $c = 2^{c_1} \cdot 5^{c_2}$

II $a = 2^1 \cdot 5^1$

1) $b = 2^{b_1} \cdot 5^{16}$, $b_1 \neq 17$ $\quad c = 2^{17} \cdot 5^{c_2}$

2) $b = 2^{17} \cdot 5^{b_2}$, $b_2 \neq 16$ $\quad c = 2^{c_1} \cdot 5^{16}$

I 1) $15 \cdot 16 \cdot 1 = 240$
2) $16^2 = 256$
3) $15 \cdot 17 = 255$
4) $17 \cdot 16 = 272$
II 1) $16^2 = 256$
2) $15 \cdot 17 = 255$

кол вариантов

в сумме 1534

Ответ: 1534

№ 16

Чистовик V

Дано: Окр.$(O;R) = \omega$

$\triangle ABC$ вписан в Окр.$(O;R)$

кас ω в A и C пересек. в T

Окр. опис. около $AOC = \varphi \cap [BC] = P$

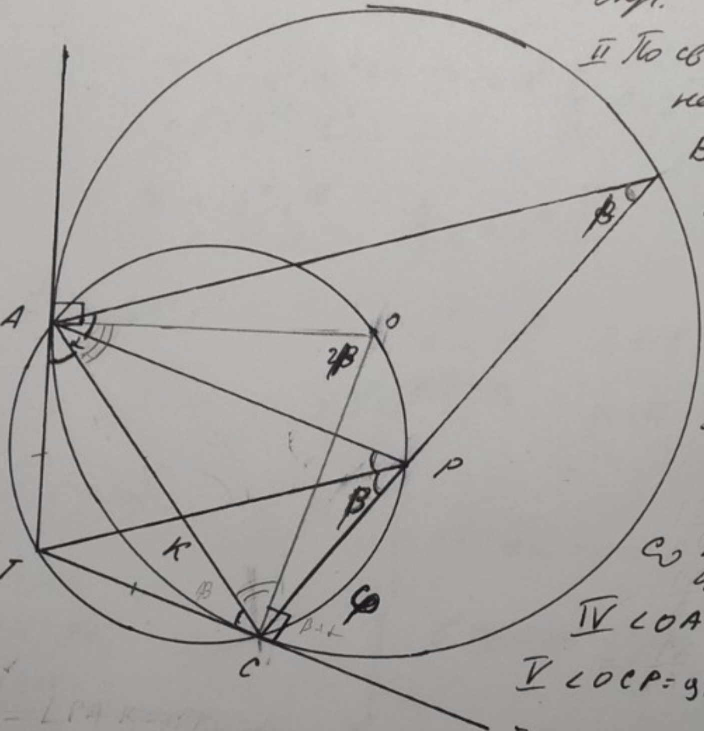
$S(\triangle APK) = 10$; $S(\triangle PKC) = 8$

1) $S(\triangle ABC) = ?$

2) $AC = ?$, если $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$

I $T \in \varphi$ т.к. $\angle OAT + \angle OCT = 90° + 90° = 180°$

тогда $AOPCT$ - лежат на одной окр.



II По св-ву равных хорд в φ находим, что $\angle CAT =$ $= \angle ACT = \angle APT = \angle TPC$

Пусть $\angle CAT = \beta$

$\angle AOC$ оп. на $2\overset{\frown}{AT}$ => (по св-ву отр. касс)

=> $AOC = 2\beta$

=> $\angle ABC = \beta$

III $\angle ATC = \angle APB$ (внешний угол)

тогда $BAP = \beta$ тоже.

IV $\angle OAC = \angle OCA$ оп. на R.

V $\angle OCP = 90 - \alpha - B$, где $\alpha = \angle PAC$

тогда $\angle OCB = 90° - \alpha + B$

С другой стор. $\angle OAB = 2\beta + \alpha - 90$

Значит $\angle PAC = \angle BCA$

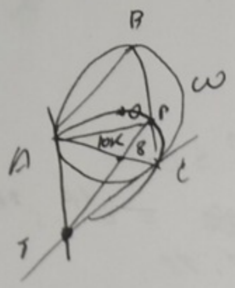
VI Следовательно $\triangle ACB \sim \triangle PCA$

и $\triangle APC \sim \triangle PKC$ => $\frac{S(\triangle PAC)}{S(\triangle PAB)} = \frac{S(\triangle PKC)}{S(\triangle PAK)} = \frac{8}{10}$

$S(\triangle ABP) = \frac{5}{4} \cdot S(\triangle APC)$ => $S\,\triangle ABP = 22,5$

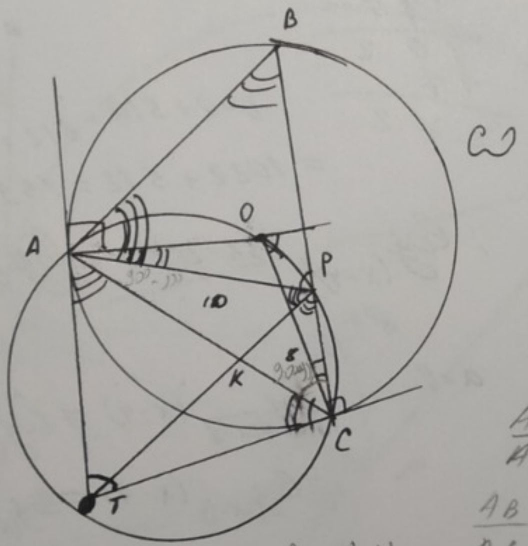
$S(\triangle ABC) = 40,5$

Ответ: 40,5



$S(\triangle APK)=10$

$S(\triangle PKC)=8$



AOPCT - вписанный.

$90^\circ -))) = 30$

$$\frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PT} = \frac{AC}{AT}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AP}{TA} = \frac{PB}{TC}$$

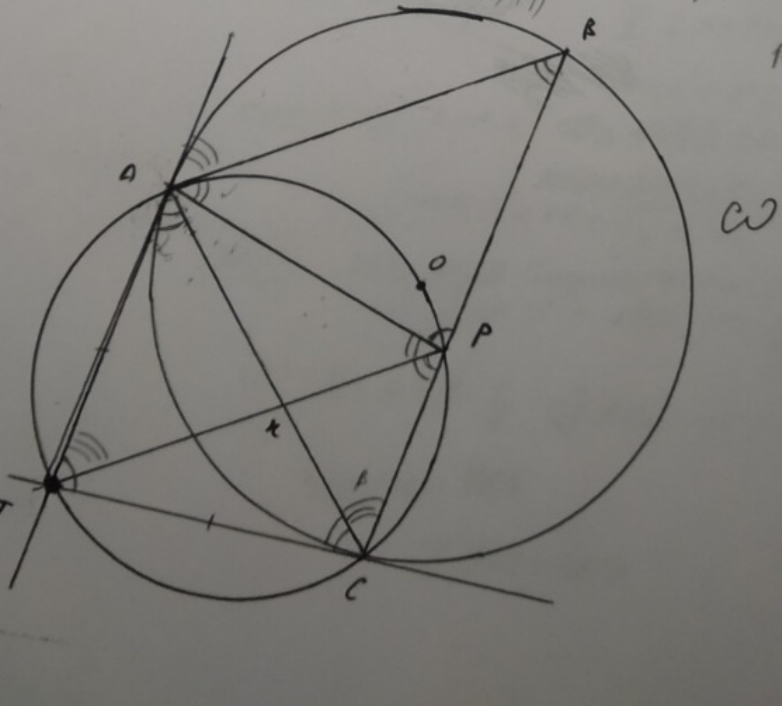
$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{TA}$$

β

$180^\circ - 90^\circ +))) -)))$

$90^\circ +))) -)))$

$90^\circ -))) +))$



$a = 2^{a_1} \cdot 5^{a_2}$

$б = 2^{b_1} \cdot 5^{b_2}$

$c = 2^{c_1} \cdot 5^{c_2}$

$a \le б$

$a \le c$

$a \le b \le c$

$b = 2^{17} \cdot 5^{b_2}$

$b_2 \ne 1;16$

$c = 2^{c_1} \cdot 5^{16}$

$c_2 \ne 1;16$

то $a = 10$

$$\begin{cases} НОД\ (a;b;c) = 10 \\ НОК\ (a;b;c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 17 \\ 16 \\ \hline 102 \\ 17 \\ \hline 272 \end{array}$$

$170 + 85 = 255$

$240 + 510 + 512 + 272 = 1022 + 512 = 1534$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$; $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$; $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

a b c

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b \\ a+1 = c \end{cases} \\ \begin{cases} a = c \\ a+1 = b \end{cases} \\ \begin{cases} b = c \\ b+1 = a \end{cases} \end{array}\right.$$

$a = b$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$4\log_{(2x-8)}(x-4) = \log_{(x-4)}(5x-26)$

$\dfrac{4}{(\log_{(x-4)} 2) + 1} = \log_{(x-4)}(5x-26)$

21103866 (U857012 M1297446)