Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103793**

ID профиля: **849091**

Вариант 20

стр №2

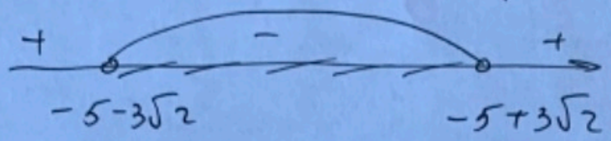
Чистовик

$\sqrt{2} \approx 1{,}4.$

$3\sqrt{2} \approx 4{,}2.$

$a_1 \approx -5-3\sqrt{2} \approx -9{,}2$

$a_2 \approx -5+3\sqrt{2} \approx -0{,}8$



$a \neq -5$

Т.к. $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq -5$.

Возможные значение a:

$a \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $a \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$.

чистовик

Задание 1

$S = a + (a+d) + \ldots (a+4d) = 5a + 10d$; $a_1 = a$

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{11} > S + 15 \\ a_8 \cdot a_9 < S + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+5d)(a+d\cdot 10) > 5a + 10d + 15 \\ (a+7d)(a+8d) < 5a + 10d + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 15ad + 50d^2 > 5a + 10d + 15 \\ a^2 + 15ad + 56d^2 < 5a + 10d + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 15ad - 5a > -50d^2 + 10d + 15 \\ a^2 + 15ad - 5a < -56d^2 + 10d + 39 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$-50d^2 + \cancel{10d} + 15 < -56d^2 + \cancel{10d} + 39$$

$$6d^2 < 24$$

$$d^2 < 4 \Rightarrow d \in (-2; 2)$$

т.к. последов возраст. $\Rightarrow d > 0$

т.к. последов целочисл. $\Rightarrow$ $d = 1$

$$\begin{cases} a^2 + 15a + 50 > 5a + 25 \\ a^2 + 15a + 56 < 5a + 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 10a + 25 > 0 \\ a^2 + 10a + 7 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+5)^2 > 0 \Rightarrow a \neq -5 \\ a^2 + 10a + 7 < 0 \quad D = 100 - 28 = 72 = (6\sqrt{2})^2 \end{cases}$$

$$a_{1,2} = \frac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}.$$

чистовик №3.

Задание 3/ вариант 20.

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le \min(-4a-6b; 13) \\ (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \end{cases}$$

– ~~окружность~~ круг. Ω_0

центр $O(a; b)$

$R_0 = \sqrt{13}$

Найдём множество $(a; b)$ – точки:

① т.к. $\min(-4a-6b; 13) \ge$ суммы квадр.

$\Rightarrow -4a-6b \ge 0$. в любом случае

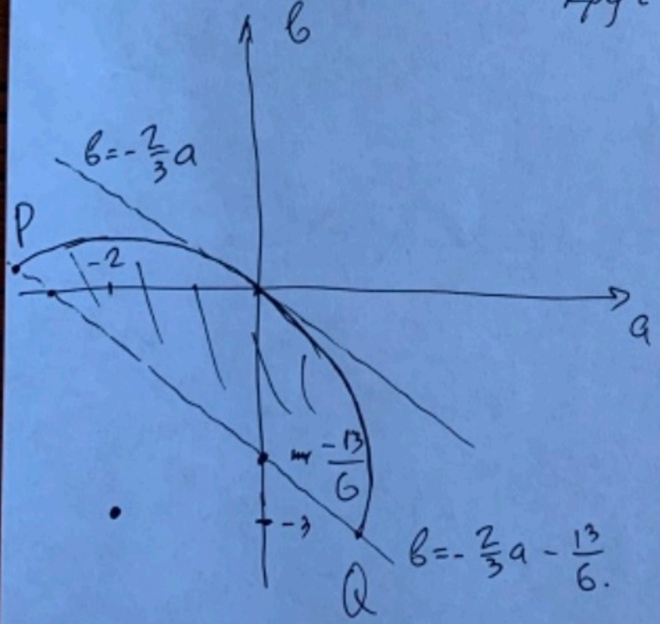
Пусть $-4a-6b \le 13 \Rightarrow \begin{cases} -4a-6b \le 13 \\ -4a-6b \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} b \ge -\frac{2}{3}a - \frac{13}{6} \\ b \le -\frac{2}{3}a \end{cases} \Rightarrow \boxed{a^2+b^2 \le -4a-6b}$

полоса.

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$

круг Ω_1 $R_1 = \sqrt{13}$ центр $O_1(-2; -3)$.



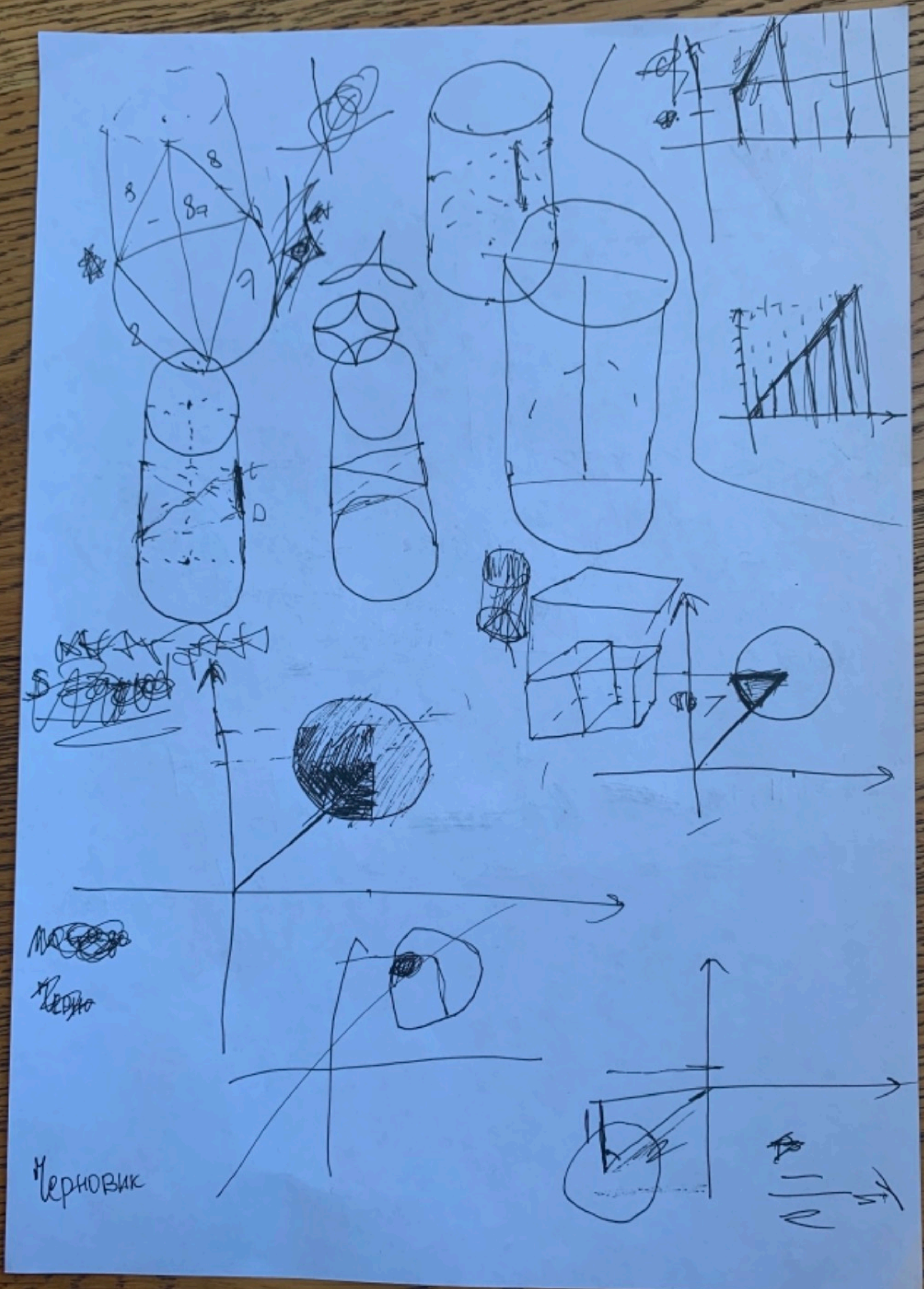
т.к. $R=\sqrt{13} \Rightarrow (0;0) \in \Omega_1$

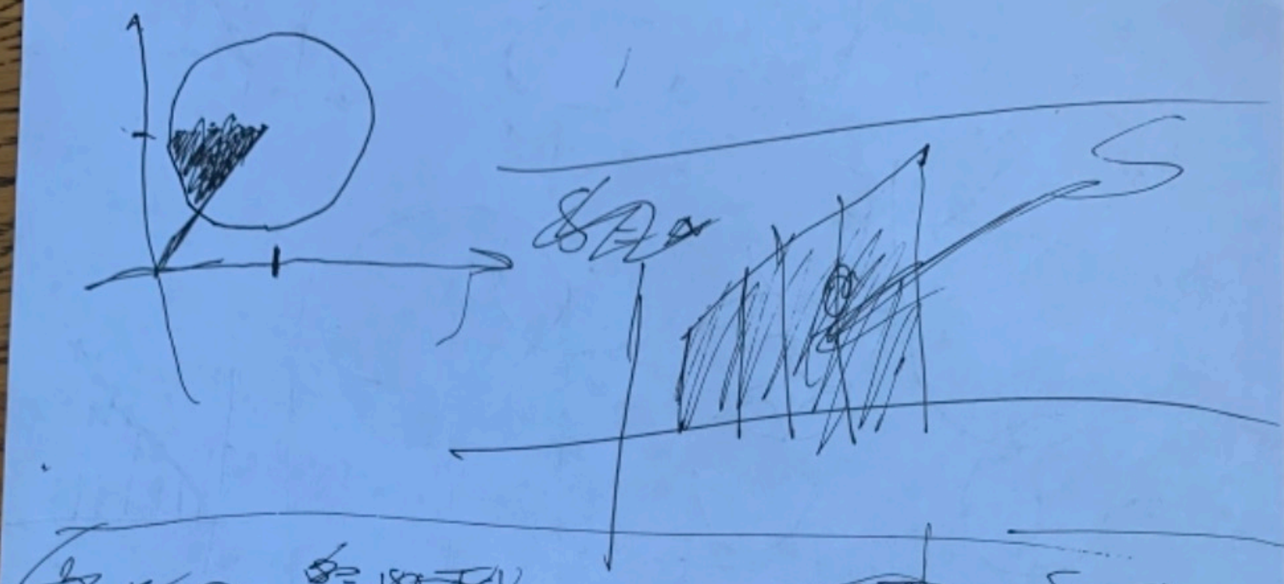
радиус в $(0;0)$ лежит на прямой $b = \frac{3}{2}a$

$\Rightarrow$ он $\perp$ $b = -\frac{2}{3}a$.

полоса отсечёт сегмент Ω_1.

P, Q – пересечение $b = -\frac{2}{3}a - \frac{13}{6}$ и круга.


Черновик



$(a+5)^2 > 0$

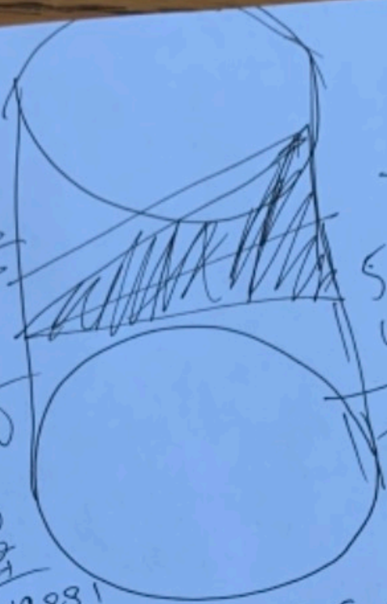
$x > -5$

$\sqrt{2} \approx 1.41,$

$\begin{cases} S = a + 6d \\ S = 10d - 3d \end{cases}$

$S = 5a + 10d = 5(a+2d)$

1.41
1.41
41
4
56
41



9 8 8 !

1 9600
280

1988!

$S = 5a + 10d < S + 39$

$S = S + 10d + a$

$S = a + (a+d) + \ldots + (a+4d) = 5a + 10d = 5(a+2d)$ ✓

$a_1 = a$
$a_2 = a + d$
$a_3 = a + 2d$

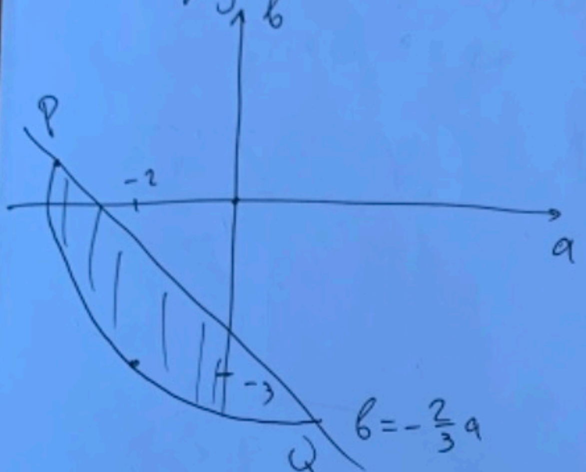
$\frac{a_3 + a_1}{2} = a_2 = \frac{a + a + 2d}{2} = a + d$

чистовик № 4.

полуплоскость $b \le -\frac{2}{3}a - \frac{13}{6}$

② пусть $13 \le -4a-6b$. $\Rightarrow$ $a^2+b^2 \le 13$

круг Ω_2 с центром $O(0;0)$ $R_2=\sqrt{13}$



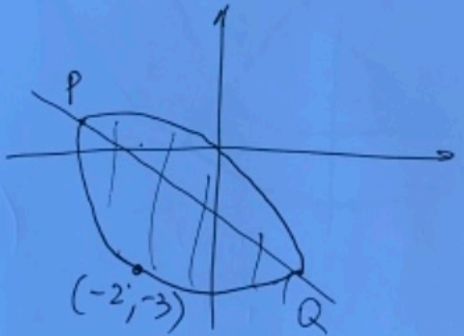
т.к. $R_2=\sqrt{13}$ $\Rightarrow$ точка $(-2;-3)\in\Omega_2$

прямая отсечёт сегмент.

За счёт непрерывности ~~функции~~ функции $a^2+b^2 \le \min(-4a-6b; 13)$ точки P и Q совпадают.

$\Downarrow$

множество центров $(a; b)$.

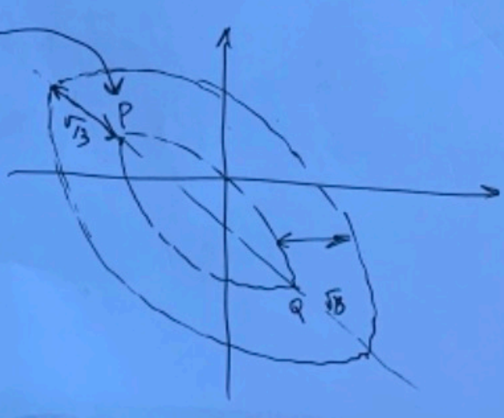


Тогда подставлея эти значения в

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$

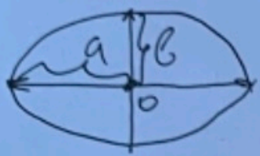
$\Rightarrow$ от каждой точки этого множества отложим круги радиуса $\sqrt{13}$.

$\Rightarrow$ множество M:



чистовик 5.

~~найдём~~ двигая центр по этой области.
получим фигуру M — эллипс.
$S_M = \pi \cdot a \cdot b$, где a и b — длины от центра.



найдём P, Q.

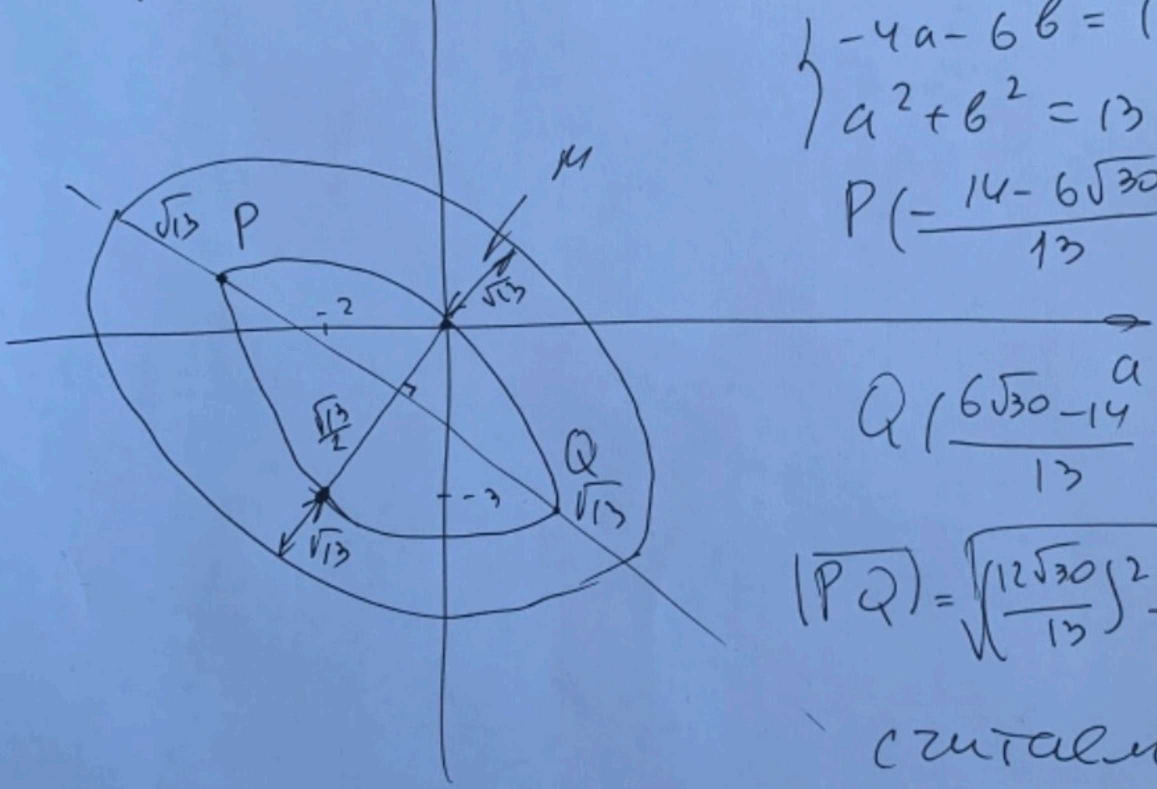
~~$\begin{cases} -4a-6b=13 \\ a^2+b^2=13 \end{cases}$~~

$$\begin{cases} -4a-6b=13 \\ a^2+b^2=13 \end{cases}$$

$$P\left(-\frac{14-6\sqrt{30}}{13};\ \frac{4\sqrt{30}-21}{13}\right)$$

$$Q\left(\frac{6\sqrt{30}-14}{13};\ \frac{-21-4\sqrt{30}}{13}\right)$$

$$|PQ| = \sqrt{\left(\frac{12\sqrt{30}}{13}\right)^2 + \left(\frac{8\sqrt{30}}{13}\right)^2}$$



считаем ↗

подставляем

$$S_M = \pi \cdot a \cdot b$$

$$a = \frac{1}{2} PQ + \sqrt{13}$$

$$b = \sqrt{13} + \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$S_M = \pi \cdot \frac{\sqrt{208 \cdot 30}}{13 \cdot 2} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{2}$$

Часть 2

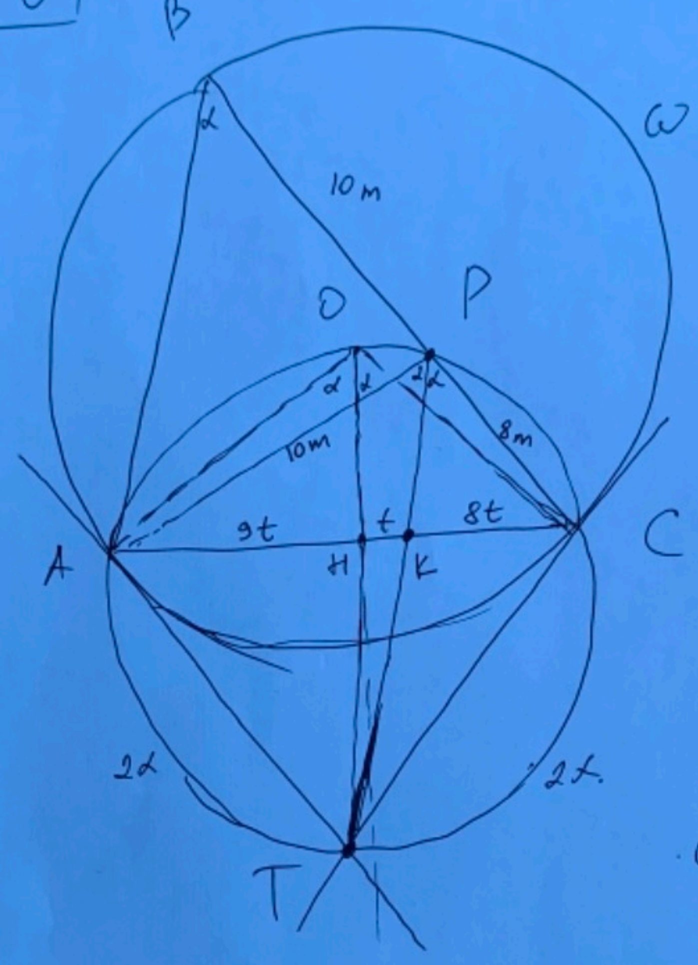
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103793**

ID профиля: **849091**

Вариант 20

№6 Чистовик 1



$$\frac{S_{AKP}}{S_{PKC}} = \frac{10}{8}.$$

ω – опис. около ABC

Решение.

1) Т.к. Отношение площадей △AKP и △PKC с общей высотой из (.)P на AC $\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{10}{8}$. Пусть $AK = 10t$; $KC = 8t$.

2) Т.к. O – центр ω ⇒ O – лежит на серединном перп. Пусть $OH \perp AC$.

3) Т.к. касат. в (.) A и (.) C ⇒ AO и OC – радиусы ⊥ касательным. ⇒ $\angle OAT = \angle OCT = 90°$ ⇒ AT и CT пересекут окр в точках, образующих диаметр с (.) O.
Т.к. AT и TC – отрезки касат. ⇒ они равны ⇒ T ∈ серед. перп. OH.

чистовик 2.

4) Отсюда вытекает, что $T \in$ окружности опис около AOC.

5). т.к. $OK \perp AC$ и AOC – р/б $\Rightarrow HA = HC = 9t$. $\Rightarrow HK = t$.

6) Пусть $\angle ABC = \alpha \Rightarrow \cup AC$ окр ω равна $2\alpha \Rightarrow \angle AOC = 2\alpha$ – центральной $\Rightarrow$ $\Rightarrow \cup AT = \cup TC = 2\alpha$, т.к. $\angle AOC$ – впис во 2-ую окружность, т.к. OT (и OK) – ещё и биссектриса.

7) Тогда впис. углы $\angle APT$ и $\angle CPT$ опираются на $\cup AT$ и $\cup CT \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle APT = \angle CPT = \alpha$.

8) Тогда $AB \parallel PT$ (соотв. углы $\angle ABC = \angle TPC = \alpha$, секущ BC)

9) Тогда $\Delta KCP \sim \Delta ABC$ ($\angle C$ – общий)

$\Rightarrow \frac{BC}{PC} = \frac{AC}{KC} = \frac{18t}{8t} = \frac{9}{4}$; т.к. $S_{KPC} = 8 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{S_{KPC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81} = \frac{8}{S_{ABC}} \Rightarrow S_{ABC} = 40{,}5$$

чистовик 3.

б) $\operatorname{arctg} ABC = \frac{1}{2} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{1}{2}.$ $(\alpha < 45°)$

$tg^2\alpha + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{5} = \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{4}{5}$

$\cos 2\alpha = +\frac{3}{5}$ (~~угол APC тупой!~~

т.к. $tg\,\alpha = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \alpha < 45° \Rightarrow 2\alpha < 90°.$

$S_{APC} = 18 = \frac{1}{2} AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha \ominus$

$\frac{AP}{PC} = \frac{10}{8}$, т.к. P T – бисс $\angle APC$ из пункта а)

$\ominus\ \frac{1}{2} \overset{2}{\cancel{10}}m \cdot \overset{4}{8}m \cdot \frac{4}{\cancel{5}} = 18$

$m^2 = \frac{18}{2 \cdot 16} = \frac{9}{10} \Rightarrow m = \frac{3}{4}.$

по т. cos в $\triangle APC$: $(AC)^2 = (10m)^2 + (8m)^2 -$
$- 2 \cdot \overset{2}{\cancel{10}}m \cdot 8m \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow$

$(AC)^2 = 164m^2 - 96m^2 = 68m^2$

$AC = m\sqrt{68} = \frac{3}{4}\sqrt{68}$

Ответ: а) 40,5 б) $\frac{3}{4}\sqrt{68}.$

Чистовик 4.

№1.

$НОД = 10 = 2 \cdot 5.$

$НОК = 2^{17} \cdot 5^{16}$

Условия для a, b, c.

1) a, b, c не содержат одновременно и 2 и 5, т.к. тогда НОД равен не 10, а 2 или 5.

2) a, b, c – не содержат делителей отличных от $2^{x_1} \cdot 5^{x_2}$, т.к. тогда НОД и НОК будет содержать ещё сомножитель.

1 случай, который нам подходит:

2^{x_1} или 5^{x_1} чтобы НОК был $2^{17} \cdot 5^{16}$.

2^{x_2} 5^{x_4} $x_1 = 17$ $x_2 \in (0;17)$

5^{x_3} $x_3 = 16$ $x_4 \in (0;16)$

и т.к. нам нужно тройки возьмём $3! = 6$ перестановок.

т.е. подходит. $6 \cdot 16 + 6 \cdot 5 = 186$

1 случай

2 случай $2^{x_1} = 2^{x_2} = 2^{17}$ или $2^{x_1} = 2^{17}$

$5^{x_3} = 5^{16}$ $5^{x_1} = 5^{x_4} = 5^{16}$.

Чистовик 6.

№5 задания

$a = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$

$b = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$c = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$$\begin{cases} x > 4 \\ x \neq 5 \\ x > \frac{26}{5} \\ x \neq \frac{31}{5} \end{cases}$$

Заметим, $a \cdot c = 2\log_{(2x-8)}(x-4) \cdot 2\log_{(5x-26)}(2x-8)$

$= 4\log_{(5x-26)}(x-4) = \frac{2}{b}$

$a \cdot b \cdot c = 2.$

заметим, что если $a = c \Rightarrow$

$b = \frac{2}{a^2}$

если $b = a+1$ не может.

~~Для $x=26$~~ если $a = b \Rightarrow c = \frac{2}{a^2}$

$\Rightarrow c = a+1.$

Заметим, что $x = 6$ решение.

21103793 (U849091 M1303257)

НОД $(a; b; c) = 10$
НОК $(a; b; c) = 2^{17} \cdot 5^{6}$

$$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$$

$x=6$ - решение

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26) \\ \log_{5x-26}(2x-8) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)+1 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) \\ \log_{(x-4)^2}(5x-26) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)+1 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_{(x-4)^2}(5x-26) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) \\ \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)+1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=10 \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16}=2\cdot 10^{16} \end{cases}$

$1;2;3=1$

$1;2;3=6$

$\text{НОД}(a;b;c)\cdot\text{НОК}(a;b;c)=a\cdot b\cdot c$

$10\cdot 2\cdot 10^{16}=a\cdot b\cdot c$

$2\cdot 10^{17}=a\cdot b\cdot c$

$2^{18}\cdot 5^{17}=a\cdot b\cdot c$

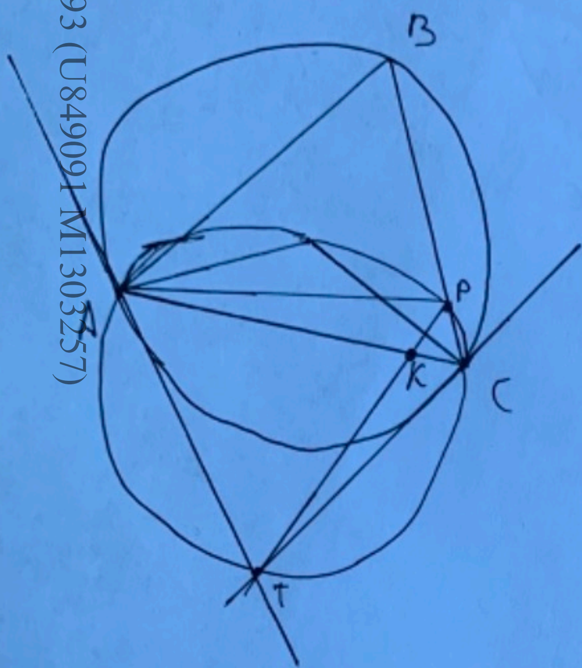
$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=\log_{(x-4)^2}(5x-26)=\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$x-4=a>0$

$5x-26=b>0$

$\log_{\sqrt{2a}}a=\log_{a^2}b=\log_{\sqrt{b}}2a$

$\dfrac{1}{\log_a\sqrt{2a}}=\dfrac{2}{\log_a 2a}=\dfrac{2}{1+\log_2 a}$



$S_{APK} = 10$, $S_{CPK} = 8$

$S_{ABC} = ?$

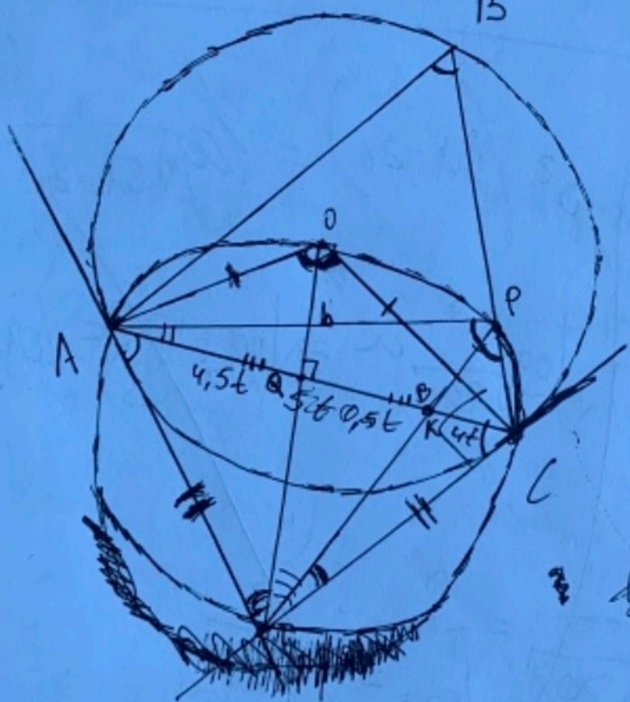
$\cancel{\angle < 60^0}$

$S_{APC} = 18$

$\frac{1}{2} \cdot \sin\beta \cdot AK \cdot PK = 10$

$\frac{1}{2} \cdot \sin\beta \cdot PK \cdot CK = 8$

$\frac{AK}{CK} = \frac{5}{4}$



ACCT - вписан,

T ∈ окр.

$\frac{5m}{4m}$

26

26 ?

чистовик 5.

таких вариантов по 1 разу
и их перестановок всего 3.

$3+3=6$ (2 случай

3 случай:

2^{x_1}

$2^{x_2}\,5^{x_3}$

5^{x_4}

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x_4=16 \\ x_3\in[0;16]\end{cases} \\ \begin{cases} x_3=16 \\ x_3\in[0;16]\end{cases}\end{array}\right.$$ 1 выбор.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x_1=17 \\ x_2\in(0;17]\end{cases} \\ \begin{cases} x_2=17 \\ x_1\in[0;17]\end{cases}\end{array}\right.$$ 2 выбора

Делаем 2 выбора из 2 состояний системы т.к. они симметричны
$\Rightarrow$ всего 4 случая: a, b, c – различны значит их перестановок в тройках
$3! = 6$ штук.

тогда 3 случай $=17\cdot16\cdot4\cdot6=6528$

Ответ: $6528+186+6=6720$