Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103702**

ID профиля: **802654**

Вариант 20

Чистовик 1

№ 1.

$S = a_1 + a_2 \dots + a_5 = (a_1 + 2d)5 \qquad d; a_n \in Z. \qquad d > 0$

$a_6 \cdot a_{11} > S + 15$

$a_8 \cdot a_9 < S + 39 \qquad\qquad a_1 - ?$

1) $a_6 \cdot a_{11} = (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) = a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 = t$

$a_8 \cdot a_9 = (a_1 + 7d)(a_1 + 8d) = a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 = t + 6d^2$

$\begin{cases} t > S + 15 \\ t + 6d^2 < S + 39 \end{cases} \Rightarrow \quad S + 15 + 6d^2 < t + 6d^2 < S + 39$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

т.к. $d \in Z$; $d > 0$, то $d = 1$

Значит:

$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 + 50 > (a_1 + 2)5 + 15 \\ a_1^2 + 15a_1 + 56 < (a_1 + 2)5 + 39 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$

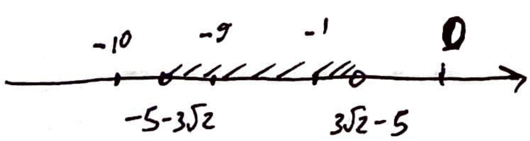
2) $a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$\frac{D}{4} = 25 - 7 = 18$

$a_{1,2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

$a_1 \in (-5 - 3\sqrt{2}; 3\sqrt{2} - 5)$

$\begin{cases} (a + 5)^2 > 0 \\ a_1 < 3\sqrt{2} - 5 \\ a_1 > -5 - 3\sqrt{2} \end{cases}$



Проверим: 1) $-10 < -5 - 3\sqrt{2} < -9$

$9 < 5 + 3\sqrt{2} < 10$

$4 < 3\sqrt{2} < 5$

$16 < 18 < 25$ – верно

2) $-1 < 3\sqrt{2} - 5 < 0$

$4 < 3\sqrt{2} < 5$

$16 < 18 < 25$ – верно.

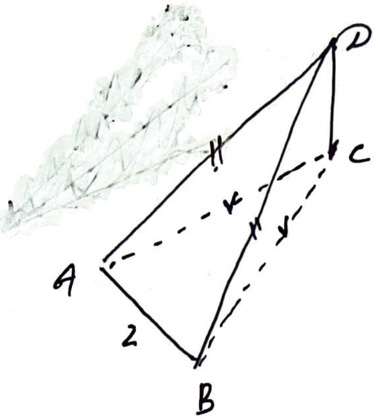
т.е. т.к. $a_1 \in Z$, то

$a_1 \in [-9; -1]$

Ответ: $a_1 \in Z$; $a_1 \in [-9; -1]$

Чистовик 2

№2



Дано: $ABCD$; $AB=2$ $AC=CB=7$

$AD=DB=8$

$CD \parallel O_1O_2$.

R_{min}: CD - ?

Решение:

1) Доп. постр $\alpha \perp CD$; $AB \in \alpha$. Откуда: $CD \cap \alpha = H$; $HM \perp AB$ т.к. $\triangle HAB$ - равнобедр. (в силу симметрии)

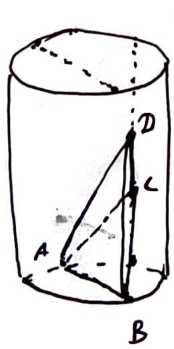
По Т.Т.П: $DC \perp AB$ т.к. $\triangle ABD$, $\triangle ABH$ - равнобедр. $MA=MB$; $DM \perp AB$; $HM \perp AB$

Значит для $AB \in \alpha$ плоск; DC - перпендикуляр; DM - наклонная, AB - прямая. через основание наклонной

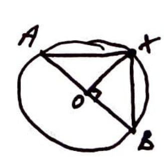
т.е. по Т.Т.П $DC \perp AB$.

2) Значит т.к. все точки принадлежат боковой поверхности и $CD \parallel O_1O_2$; то $\exists\ (O;R)$, где R - радиус цилиндра в котором будет хорда AB.

т.е. $2R \geqslant AB \Rightarrow R_{min} = \frac{AB}{2} = 1$.



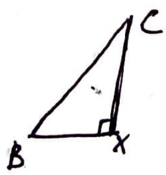
3) Построим цилиндр так, что $AB \in$ основанию. тогда проекции $\triangle ADB$ и $\triangle ACB$ на основание - равны $\triangle AXB$:



, где $AX=XB$. $Ox=OA=OB=R_{min}=1$

т.е. $AX=XB=\sqrt{2R^2}=\sqrt{2}$

4) Из $\triangle BXC$:



$\angle X = 90°$ (т.к. $CD \parallel O_1O_2$; $O_1O_2 \perp (ABX)_{плоск}$)

$BC=7$ $BX=\sqrt{2}$ $\Rightarrow CX=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

5) Из $\triangle BXD$: Аналогично: $\angle X = 90°$ $BD=8$; $BX=\sqrt{2}$ $\Rightarrow XD=\sqrt{62}$

Чистовик 3

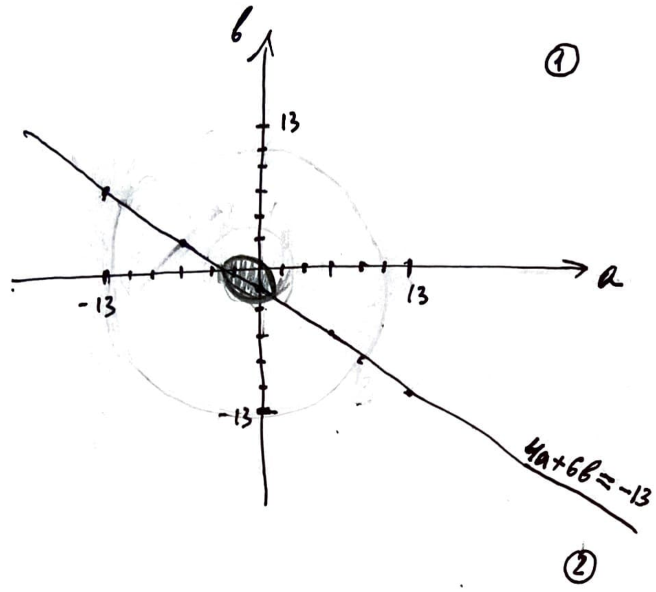
б) $CD = DX - CX = \sqrt{62} - 3\sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{62} - 3\sqrt{5}$

Чистовик 4

№ 3
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 & (2) \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;\ 13) & (1) \end{cases}$$

1) $a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;\ 13)$



Найдём вид этой совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -4a-6b<13 \\ (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13 \end{cases} \quad ① \\ \begin{cases} -4a-6b \ge 13 \\ a^2+b^2 \le 13 \end{cases} \quad ② \end{array}\right.$$

② $a^2+b^2 \le 13$ — круг $R=\sqrt{13}$ с центром $(0;0)$.

① $(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$ — круг $R=\sqrt{13}$ с центром $(-2;-3)$. // проходит через $(0;0)$

$B;A$: $\begin{cases} a^2+b^2=13 \\ 4a+6b=-13 \end{cases}$ // ① и ② — пересекаются в $A;B$.

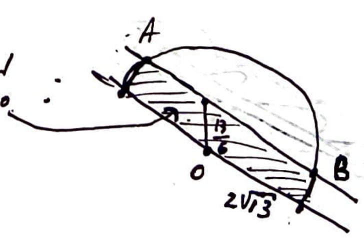
2) Чтобы найти площадь M:

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$ — круг с центром $(a;b)$; $R=\sqrt{13}$.

т.е площадь M соответствует: S_1: $\begin{cases} (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13\cdot 4 \\ -4a-6b<13 \end{cases}$

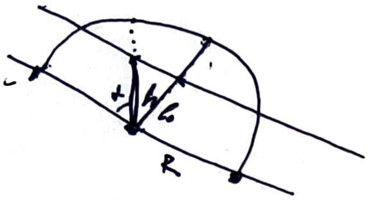
S_2: $\begin{cases} a^2+b^2 \le (2\sqrt{13})^2 \\ -4a-6b \ge 13 \end{cases}$ $\qquad S_M = S_1+S_2$.

$S_1 = S_2 = \dfrac{\pi\cdot 52}{2} - S_0$, где S_0:



$S_M = \pi\cdot 52 - 2S_0$.

Чистовик 5

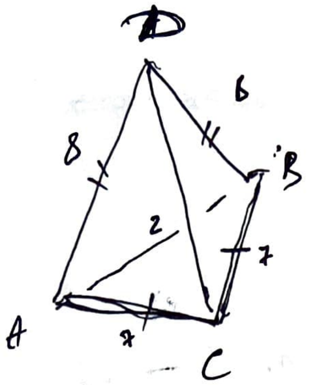


S_0 – ? $\quad \frac{\pi}{2}-\alpha=\operatorname{arcctg}\left(-\frac{2}{3}\right) \quad h=\frac{13}{6} \quad R=2\sqrt{13}$

1) Из α и h $\Rightarrow$ находим l_0.

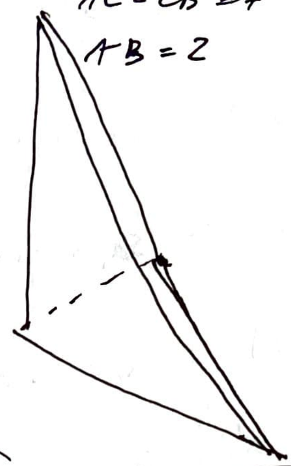
$$l_0=\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot h=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$S_0 =$

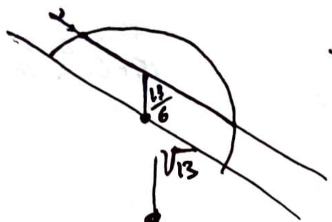


$AC = CB = 7$

$AB = 2$

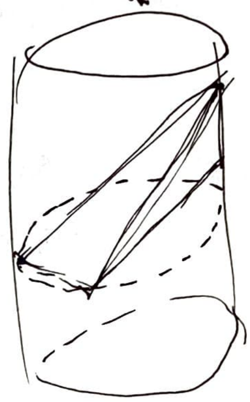


$4a + 6b = -13$

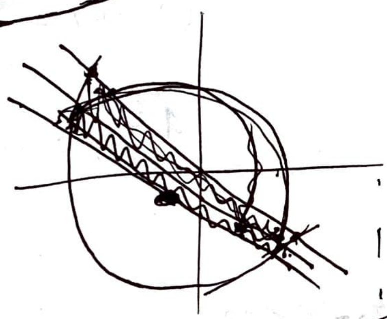


$a^2 + b^2 \leq 13$

$a^2 + b^2 + 4a + 6b + 13 \leq 13$



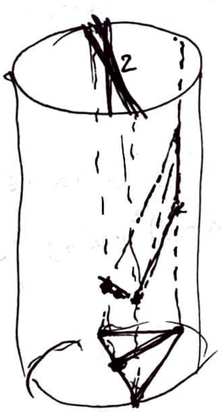
$3 < \sqrt{13} < 4$



$\cancel{4}8 + 18 = 26$

$2\ 3$

$\frac{13}{3} \vee \cancel{4}\frac{12}{3}$



$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 13$

$a^2 + b^2 < \min(13;\ -4a - 6b)$

$-4a - 6b > 13$

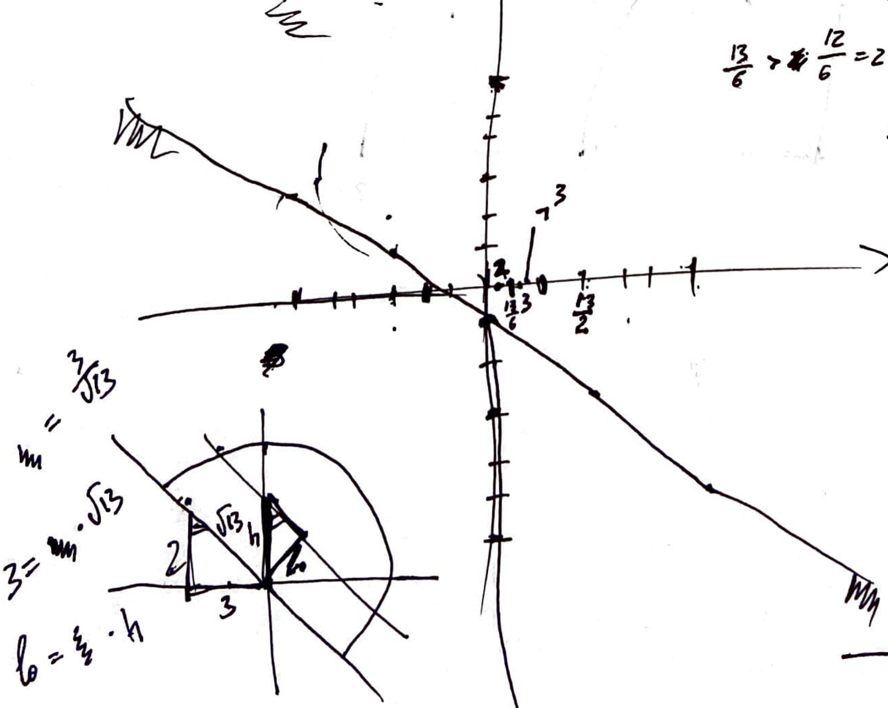
$6b + 4a < 13$

$\frac{13}{6} > \frac{12}{6} = 2$

$\frac{3 \cdot 13}{\cancel{12}4} \vee \frac{12}{4}$

$b < \frac{-4a - 13}{6}$

$-\frac{2}{3}a - \frac{13}{6}$



$(a+2)^2 + (b+3)^2 = 13$

$a^2 + b^2 = 13$

$\times \frac{13}{4}$
52

$-\min(-4a - 6b)$

$-\min = 13$

$$S_5 = \frac{a_1 + \overset{a_1+4d}{a_5}}{2} \cdot 5 = (a_1 + 2d) \cdot 5$$

~~6 7 8 9 10 11~~

$$(a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1 + 10d + 15$$

$$a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15$$

$$m - S > 15$$

$$(a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1 + 10d + 39$$

$$15 + 6d^2 < m - S + 6d^2 < 39$$

$$a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39$$

$$6d^2 < 24$$

$$d^2 < 4$$

$$a_1^2 + 10a_1 + 25 \qquad 5a_1 + 25$$

$$5a_1 + 49$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 13$$

$$(a_1+5)^2 > 0$$

$$a^2 + b^2 \le \min(-4a - 6b, 13)$$

$$\frac{D}{4} = 25 - 7 = 18 \; (3\sqrt{2})^2$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \cdot\ 1{,}4 \\ 3 \\ \hline 4{,}2 \\ -\ 5 \\ \hline -0{,}8 \end{array}$$

$$-4a - 6b < 13$$

$$4a + 6b > -13$$

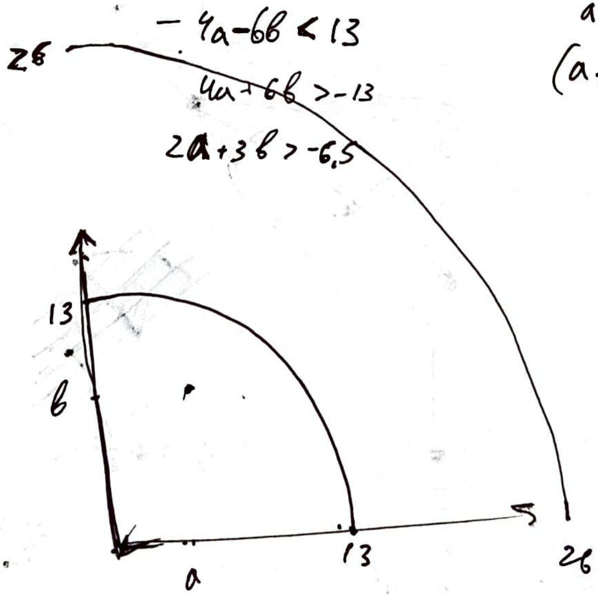
$$2a + 3b > -6{,}5$$

$$a^2 + b^2 \le -4a - 6b$$

$$(a+2)^2 + (b+3)^2 \le 13$$

$a > 0$

$b > 0$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103702**

ID профиля: **802654**

Вариант 20

Чистовик 1.

N 5 $\quad \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) \quad \log_{(x-4)^2}(5x-26) \quad \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x-8>0 \\ x-4>0 \\ 5x-26>0 \\ 2x-8\neq 1 \\ x-4\neq 1 \\ 5x-26\neq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x>5{,}2 \\ x\neq 5{,}4 \end{cases}$

На ОДЗ:

$A = 2\log_{2x-8}(x-4) = 2\log_{2t} t$

$B = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26) = \log_t s$

$C = 2\log_{5x-26}(2x-8) = \log_s 2t$

1)

$t = x-4 \quad s=\sqrt{5x-26} \quad ; \ t; s>0 \quad t\neq 1 \quad s\neq 1$

Заметим, что $\quad AB = \frac{2}{C} \quad ; \quad CB = \frac{2}{A} \quad ; \quad AC = \frac{2}{B}.$

т.е $ABC = 2$ $\quad$, если $y = A = B = C-1$ (и аналогично для других случаев
$y = C = B = A-1$
$y = C = A = B-1$)

Получаем $\quad y^2\cdot(y+1) = 2$

$y^3+y^2-2=0$

$y=1 \quad y^2+2y+2=0$

$D = 4-4\cdot 2<0$

нет корней.

т.е $\quad A=1 \quad B=1 \quad C=1$

$2\log_{2t} t = 1 \quad \log_t s = 1 \quad \log_s 2t = 1$

$t^2 = 2t \quad t = s \quad 2t = s$

$t=0$ $\varnothing$ $\quad t=2$ $\quad x-4=\sqrt{5x-26} \quad 2x-8=\sqrt{5x-26}$

$x-4=2 \quad x^2-13x+42=0 \quad 4x^2-37x+90=0$ – должно иметь корень $x_1=7$ или $x_2=6$

$\underline{\underline{x=6}} \quad \underline{\underline{x_1=7}} \quad \underline{\underline{x_2=6}}$

Чистовик 2

$$\begin{cases} 4x^2-37x+90=0 \\ x_1=7 \end{cases}$$

$4\cdot7^2-37\cdot7+90=0$

$98-259+90=0$ – неверно.

Значит случае: $C=B=1=A-1$ – нет.

$$\begin{cases} 4x^2-\cancel{37x}+90=0 \\ x_2=6 \end{cases}$$

$4\cdot6^2-37\cdot6+90=0$

$148-222+90=0$ – неверно

Значит случае $C=A=1=B-1$ – нет.

2) $A=B=1 \Rightarrow x=6$

$C=2$

$\log_5 2t=2$ $\quad 5^2=2t$ $\quad 5x-26=2x-8$

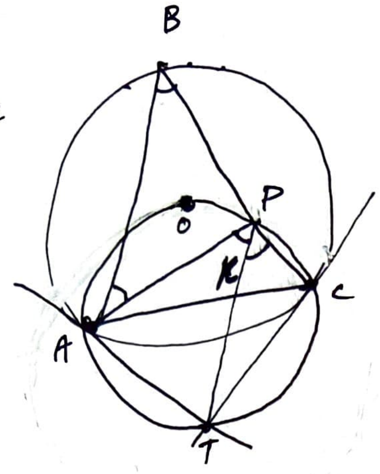
$3x=18$

$x=6$ – верно.

Ответ: 6

Чистовик 3

№7



Дано: ω ; $\triangle ABC$

$(O_1;R_0) \supseteq \{A;O;C\}$ $(O_1;R_0)\cap BC = P$

TC ; AT – касательные

$S_{APK}=10$ $S_{CPK}=8$

а) S_{ABC} ?

Решение:

1) $\angle AOC = 2\angle ABC = 2\alpha$; $\angle ABC=\alpha$. – вписанный и центральный углы.

$\angle APC = \angle AOC = 2\alpha$ – на одну дугу в $(O_1;R_0)$

2) $\angle OAT = \angle OCT = 90°$ $\Rightarrow$ OT – диаметр ; $T\in(O_1;R_0)$.

3) $AT = TC$ (по св-ву касательных) $\Rightarrow$ $\angle APT = \angle TPC = \frac{\angle APC}{2} = \alpha$

4) $\triangle APK$ и $\triangle KPC$: имеют одинаковую высоту (PK).

значит $\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{5}{4}$.

Т.к. $\angle APK = \angle KPC = \alpha$, то PK – биссектриса. значит

по св-ву : $\frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{5}{4}$.

5) $\angle BAP = 180° - \angle ABP - \angle APB = 180° - \alpha - (180° - 2\alpha) = \alpha$

Значит $\triangle ABP$ – равнобедр т.е $AP=BP$; $\frac{BP}{PC} = \frac{5}{4}$.

6) $\triangle ABP$ и $\triangle APC$ – имеют одинаковую высоту AK,

т.е $\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{BP}{PC} = \frac{5}{4}$; $S_{APC} = S_{APK} + S_{CPK} = 18$

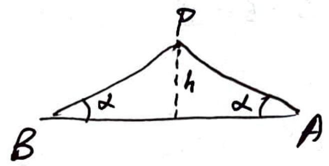
Значит $S_{ABP} = \frac{45}{2}$; $S_{ABC} = S_{ABP} + S_{APC} = 40,5$ Ответ: 40,5

Чистовик 4

№7 б) $\angle ABC = \alpha = \operatorname{arcctg} \frac{1}{2}$; $AC - ?$

Решение:

1) Из $\triangle ABP$



$\cos\alpha = \frac{AB}{2 \cdot BP}$ $\qquad \sin\alpha = \frac{2 S_{APB}}{AB \cdot BP}$

$ctg\,\alpha = \frac{AB}{2 \cdot BP} \cdot \frac{AB \cdot BP}{2 \cdot S_{APB}} = \frac{AB^2}{4 \cdot S_{ABP}} = \frac{1}{2}$

$AB^2 = 2 \cdot S_{ABP} = 45$ $\qquad AB = 3\sqrt{5}$; $h = \frac{AB}{2} : ctg\alpha = AB$

$BP = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + h^2} = \frac{\sqrt{5 AB^2}}{2} = \frac{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{2} = \frac{15}{2}$

2) $\frac{BP}{PC} = \frac{5}{4}$ $\Rightarrow$ $PC = 6$

3) Из $\triangle APC$: $AP = \frac{15}{2}$; $PC = 6$ $\quad \angle APC = 2\alpha$

По т. косинусов : $AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP \cdot PC \cdot \cos 2\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(\frac{3\sqrt{5}}{2 \cdot \frac{15}{2}}\right)^2 - 1 = \frac{2}{5} - 1 = -0{,}6$

$AC^2 = \frac{225}{4} + 36 - 2 \cdot \frac{15}{2} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{225}{4} + \frac{216}{4} + \frac{144}{4} = \frac{585}{4}$

$AC = \frac{\sqrt{585}}{2}$

Ответ: $\frac{\sqrt{585}}{2}$

НОД$(a, b, c) = 10$

$a \vdots 10 = 10k$
$b \vdots 10 = 10m$
$c \vdots 10 = 10p$

НОК$(a\ b\ c) = 2^{17} \cdot 5^{15}$

$2^{16} \cdot 5^{15} \vdots k ; m ; p.$

1) Две из чисел равны. $k = m \neq p$

1) ~~...~~ , $k \not\vdots p$; $p \not\vdots k$

$(1+16)(1+15)$ - возможных k.

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) \qquad \log_{(x-4)^2}(5x-26) \qquad \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$A \pm B = C - 1$

ОДЗ: $2x-8>0$ $\quad x \neq \frac{9}{2} = 4,5$
$5x-26>0$ $\quad x \neq \frac{27}{5}$
$x-4>0$ $\quad x \neq 5$

$2\log \qquad \frac{1}{2}\log \qquad 2\log$

$x > 4$
$x > \frac{26}{5} \approx 5,2$

$2\log_{s} 2t - 1 = 2\log_{2t} t \qquad 2 \qquad \frac{1}{\log_{x-4}(2\cdot(x-4))}$

$2x - 8 = \sqrt{5x-26} > 0$
$4x^2 - 32x + 64 = 5x - 26$
$4x^2 - 37x + 90 = 0$

~~...~~ $\quad 4 \cdot 25 - 37 \cdot 5 + 90$

$190 - \cancel{185} = 5$

$4\log_{2t} t = \log_t s$

$4 = \frac{\log_t s \cdot \log_t 2t}{\cancel{\dots}} = (\log_t 2 + 1)$

$\log_s 4t^2 - 1 = \log_s\left(\frac{4t^2}{s}\right) = \log_t\left(\sqrt{s}\right.$

$36 \cdot 4 = 120$ 24

$s = \sqrt{5x-26}$ $B = \log_t s$ $A = 2\log_{2t} t$ $3 \cdot 7 \cdot 6 = 42$ 180

$2(x-4) = 4 = \sqrt{30-26} = 2$ $C = \log_s 2t$

$t^2 = s$

$\frac{2}{\cancel{\log}} = \log_t s \cdot \log_t 2t$

$\log_t s = \log_s 2t - 1 = 2\log_{2t} t$

188 $\frac{CB}{\cancel{AB}} = \frac{\log_s 2t}{\log_s t} = \log_t 2t$

98 49 210 259

$49 \cdot 2 - 37 \cdot 7 + 90$ $3 \cdot 6 \cdot 3$ 54

$CB = \frac{2}{A}$ $= \frac{1}{A}$

$AC = \frac{2\log_{2t} t}{\log_{2t} s} = 2\log_s t = \frac{2}{B}$

16

$x^2 + \cancel{16} - 8x = 5x - 26$

$x^2 - 13x + 42 = 0$

$+ \; 7 \cdot 6$ $\frac{216}{4}$ $\frac{225}{4}$

$\frac{-y^3 + y^2 - 2}{y^3 - y^2}$ | $y - 1$; $y^2 + 2y + 2$

$2y^2 - 2y$

$2y - 2$

$4x^2 + 64 - 32x - 5x + 26 = 0$

$4x^2 - 37x + 90 = 0$

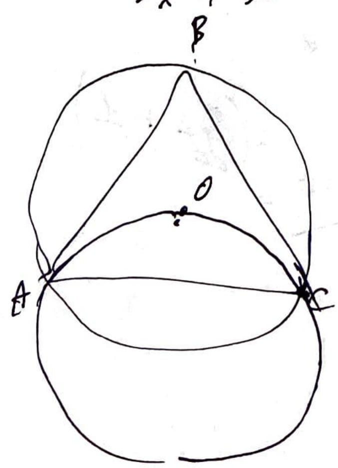
$\frac{37}{4}$ $\frac{30 \cdot 3}{4}$ $\frac{30}{2}$ $\frac{3}{2}$

$\frac{4x^2 - 37x + 90}{4x^2 - 28x}$ | $x - 7$; $4x$

$-9x + 90$

$216 + 144 + 225 = 585$

$37^2 - 16 \cdot 90$



$\frac{AB^2}{4} + \frac{4AB^2}{4}$ 0,4

$\frac{144}{4} + \frac{36}{4}$

$\frac{1}{2} AB \cdot BP \sin\alpha = \frac{45}{2}$

$AB \cdot BP \cdot \sin\alpha = 45$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\sin\alpha =$

$\cos\alpha = \frac{AB}{2 \cdot BP}$

$\frac{AB}{2BP} \cdot AB \cdot BP = 45$

$BP^2 = 45$

$2 \cdot BP^2 =$

Чистовик 5

№4