Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103658**

ID профиля: **828420**

Вариант 20

Лист 1.

Черновик

(3)

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(\underline{-4a-6b};13)\end{cases}$$ — M

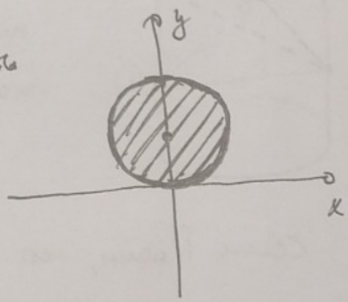
S_M - ?

1) $\underline{-4a-6b < 13}$ a и b - какие-то числа.

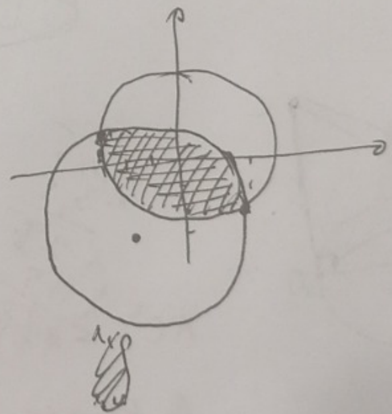
$a^2+b^2+4a+6b \le 0$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ \underbrace{(a+2)^2+(b+3)^2}_{\text{число}} \le 13\end{cases}$

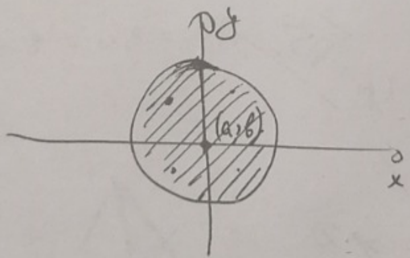
~~сдвигать~~ ~~сдвигать~~



$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2 \le 13 \\ (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13\end{cases}$ в $\underline{Oab}$.



$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$



$a^2+b^2 \le 13$

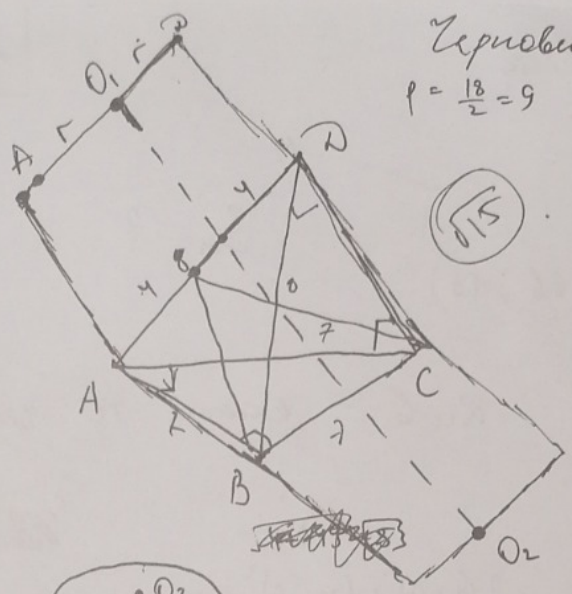
$\dfrac{a^2+b^2 \le 13.}{y'' \quad y''}$

$-4a-6b<13$
$a^2+b^2+4a+6b \le 0$

$\dfrac{(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13.}{y' \quad y'}$

Лист 2

(2) Черновик



$p = \frac{18}{2} = 9$

$\sqrt{15}$

$p = \frac{14+2}{2} = 8$

$AB = 2$

$AC = CB = 7$

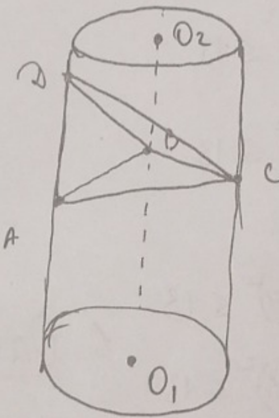
$AD = DB = 8$

$S = \sqrt{8 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1} = \sqrt{48}$

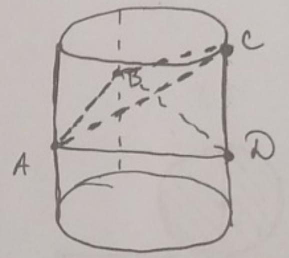
$S = \sqrt{9 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1} = \sqrt{63}$

$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DH_1 = \frac{\sqrt{48}}{3} DH_1$

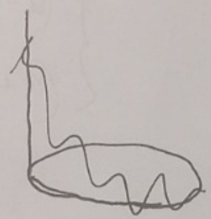
$V = \frac{1}{3} S_{ABD} \cdot CH_2 = \sqrt{7}\, CH_2$



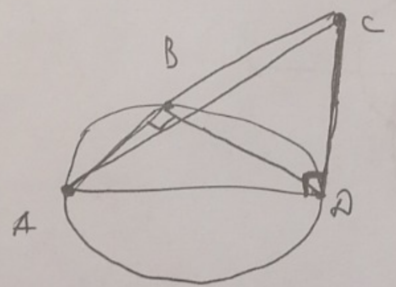
$CD \parallel O_1O_2$



Если $CD \parallel O_1O_2$, то CD лежит на высоте цилиндра.



Если Г наим., то одна из сторон тетраэдра должна быть равна диаметру, т.к. если будет хордой, то диаметр будет больше, а значит Г не будет наим. $\Rightarrow AD = BD = 8 = d = 2r$.



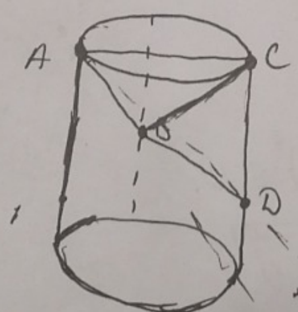
$3,5 \times 3,5 = 12,25$

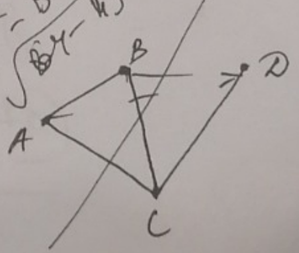
$AC^2 - \left(\frac{AD}{2}\right)^2 = CD^2$

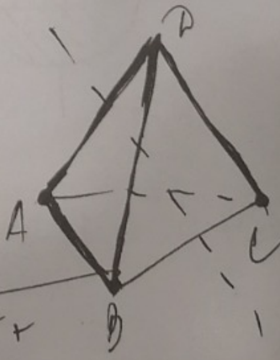
$\cancel{49} = 64$

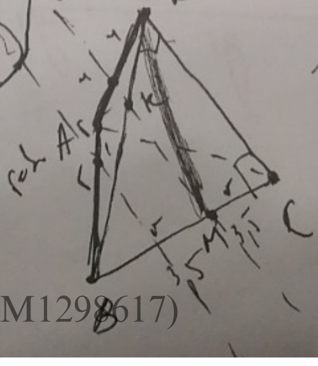
$BD^2 - BC^2 = CD^2$

$\sqrt{64 - 49} \Rightarrow CD = \sqrt{15}$









$\sqrt{12,25 +}$

$\sqrt{64 - 12,25} = \sqrt{51,75}$

21103658 (U828420 M1292617)

1

~~Черновик~~

Чистовик

Лист 1

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{11} > S + 15 \\ a_8 \cdot a_9 < S + 39 \end{cases} \quad \boxed{a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{Z}.} \quad S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

a_1

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_1 + 2d$

$a_4 = a_1 + 3d$

$a_5 = a_1 + 4d$

$\underline{S = 5a_1 + 10d}$

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_9 = a_1 + 8d$

$$\begin{cases} (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > 5a_1 + 10d + 15 \\ (a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < 5a_1 + 10d + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1d + 5a_1d + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \\ a_1^2 + 7da_1 + 8ad_1 + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -a_1^2 - 15a_1d - 50d^2 + 5a_1 + 10d + 15 < 0 \\ a_1^2 + 15a_1d + 56d^2 - 5a_1 - 10d - 39 < 0. \end{cases}$$

$6d^2 - 24 < 0$

$d^2 < 4$

$(d-2)(d+2) < 0$

$+ \quad - \quad +$

$-2 \quad 2$

$d \in (-2; 2)$, т.к. прогрессия ↑, то $d > 0$ и $d \in \mathbb{Z}$ (по усл.)

$\underline{d = 1.}$

Найдем a_1:

21103658 (U828420 M1298617)

Лист 2

Чистовик

$$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+10) > 5a_1+10+15 \\ (a_1+7)(a_1+8) < 5a_1+10+39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+\cancel{5a_1}+10a_1+50 > \cancel{5a_1}+25 \\ a_1^2+7a_1+8a_1+56 < 5a_1+49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+10a_1+25 > 0 \\ a_1^2+10a_1+7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

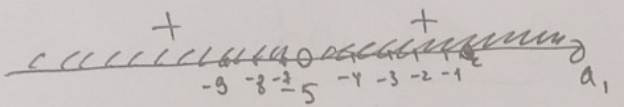
$$D = 100-28 = 72$$

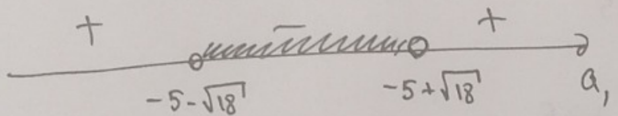
$$a_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{72}}{2}$$

$$a_1 = -5+\sqrt{18} \qquad a_2 = -5-\sqrt{18}$$

$72 \div 4 = 18$

$\cancel{\Leftrightarrow \{(a_1+5)^2 > 0}$





$a_1 \in (-5-\sqrt{18}; -5) \cup (-5; -5+\sqrt{18})$, но т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$, то нужно выбрать из этих промежутков все целые a_1.

$-5-\sqrt{18} > -10$

$5+\sqrt{18} < 10$

$\sqrt{18} < 5$

$18 < 25$

$-5-\sqrt{18} < -9$

$5+\sqrt{18} > 9$

$18 > 16$

$\Downarrow$

a_1 уже принимает значения $\{-9; -8; -7; -6\}$

$-5+\sqrt{18} > -1$

$\sqrt{18} > 4$

$18 > 16$

$-5+\sqrt{18} < 0$

$\sqrt{18} < 5$

$18 < 25$

a_1 также принимает значения $\{-4; -3; -2; -1\}$

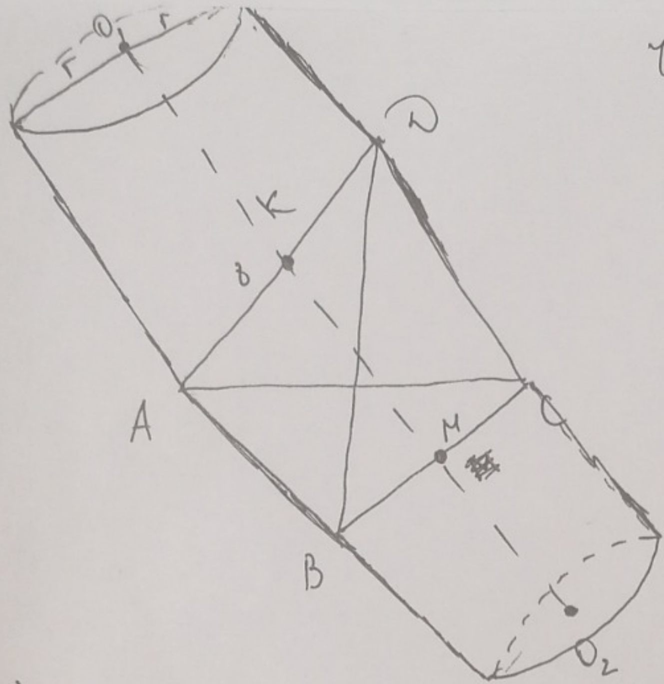
Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$.

21103658 (U828420 M1298617)

Лист 3

Чистовик.

(2)



1) Т.к. A, B, C, D лежат на боковой поверхности цилиндра, то на рисунке слева видно и понятно, что O_1O_2 – ось цилиндра $CD \parallel O_1O_2$ (по усл.) и значит, если ABCD вписать в цилиндр, то $AK = KD = r = 4$.

⇓

2) $\angle DCA = 90°$, т.к. опирается на AD – диаметр.

⇓

$CD^2 = AD^2 - AC^2 = 64 - 49 = 15$

$\underline{CD = \sqrt{15}}$.

3) Если O_1O_2 пройдёт через AB, то при радиусе 1 будут хорды > 1, что невозможно

4) Если O_1O_2 пройдёт через BC, то $r = 3,5$, то $CD^2 = BD^2 - MC^2 = 64 - 12,25 = 51,75$

$\underline{CD = \sqrt{51,75}}$

21103658 (U828420 M1298617)

Лист 4

Чистовик

(3)

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b,\ 13)\end{cases} \leftarrow M$$

$S_M - ?$

1) Если $-4a-6b<13$, то:

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13\end{cases}$$

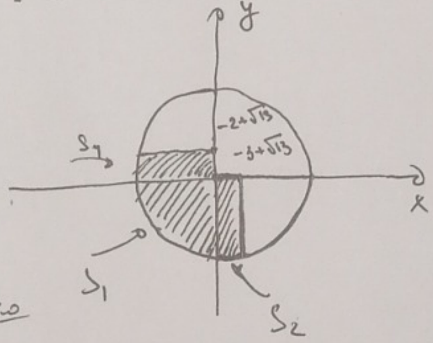
— Окружность заштрихованная внутри с центром $(a;b)$ и $R=\sqrt{13}$.

$a=0$, $b=0$ подходит

$a>0$ и $b>0$ – не подходит

$a<0$ и $b>0$ – не подходит

$a<0$ и $b<0$ – подходит



Если $a<0$, то $b \in (0; -3+\sqrt{13})$, то решения будут

Если $b<0$, то $a \in (0; \sqrt{13}-2)$

$S_1+S_2=S_M$

$(a+2)^2 \le 13$

$a^2+4a+4 \le 13$

$a^2+4a-9 \le 0$

$D=16+36=52$

$a=-\frac{4\pm\sqrt{52}}{2}=-2\pm\sqrt{13}$

$(b+3)^2 \le 13$

$b^2+6b+9-13 \le 0$

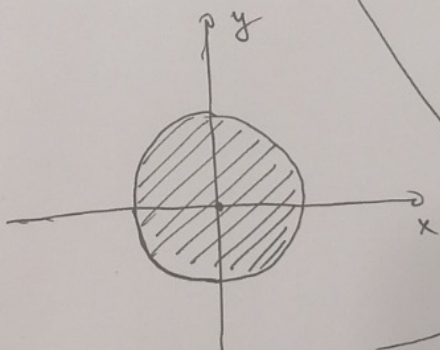
$b^2+6b-4 \le 0$

$D=36+16=52$

$b=\frac{-6\pm\sqrt{52}}{2}=-3\pm\sqrt{13}$

2) Если $13<-4a-6b$, то:

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le 13\end{cases}$$



$a=0$ $b=0$ – подходит

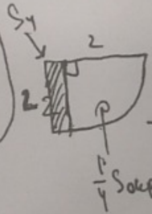
~~Пока $a \in (-\sqrt{13};\sqrt{13})$, $b \in ($~~

Если $a=\pm\sqrt{13}$, то $b=0$.

Если $b=\pm\sqrt{13}$, то $a=0$.

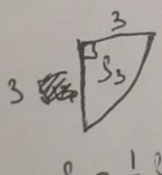
~~Если $a \in (-\sqrt{13}; 0)$, то $b \in (0; \sqrt{13-a^2})$~~

$S_4=\frac{1}{4}S_{окр_3}=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 4=\frac{13\pi}{4}-\pi=\frac{3\pi}{4}$



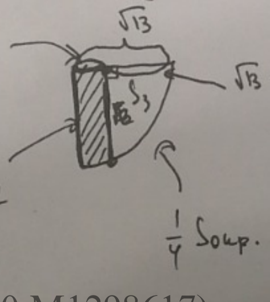
3) Из 1) и 2) => что нам нужно найти $S_1+S_2+S_4=S_M$

$S_1=\frac{1}{4}S_{окр}=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 13=\frac{13\pi}{4}$.



$S_3=\frac{1}{4}S_{окр_2}=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 9=\frac{9\pi}{4}$

$\sqrt{13}-3$



$\sqrt{13}-\sqrt{13}+3=(3)$.

$S_2=\frac{1}{4}S_{окр}-S_3=\frac{13\pi}{4}-\frac{9\pi}{4}=\pi$

$S_M=S_1+S_2+S_4=\frac{13\pi}{4}+\pi+\frac{9\pi}{4}=\frac{26\pi}{4}=\frac{13\pi}{2}$ кв. ед.

Ответ: $\frac{13\pi}{2}$ кв. ед.

21103658 (U828420 M1298617)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103658**

ID профиля: **828420**

Вариант 20

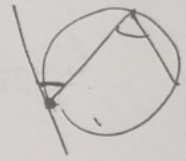
④ Черновик

Лист 3

$$\begin{cases} НОД(a,b,c) = 10 \\ НОК(a,b,c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 544 \\ \times \quad 3 \\ \hline 1632 \end{array}$$

~~НОД(a,b)~~



$НОД(a, b, c) = 5 \cdot 2 \Rightarrow$ числа $a, b, c \;\vdots\; 5$ и $\vdots\; 2$, но $\not\vdots\, 3$ и $\not\vdots\, 4$

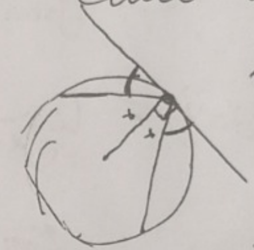
~~5 2~~ 10 ~~2 5~~ 10

$a = 5^n \cdot 2^k$

$b = 5^m \cdot 2^l$

$c = 5^s \cdot 2^p$

Если a или b или c $\vdots$ на число отличное от 2 и 5, то НОК содержал бы эти числа



$НОК(2^{15} \cdot 5^3;\ 2^4 \cdot 5^6) =$

$= \underline{2^{15} \cdot 5^6}.$

Важно, что 2 и 5 — взаимнопростые

$\Downarrow$

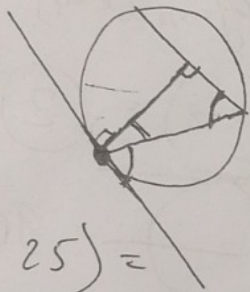
не будет других вариантов НОК, кроме как 2 в max степени и 5 в max степени.

$\Downarrow$

~~a = b = c =~~

$a = 5^n \cdot 2^k$ и все, других чисел нет

$2^{17} \cdot 5^{16}$



$НОК(16;\ 25) =$

$= (2^4;\ 5^2) = 400$ ~~$2^4 \cdot 5^2$~~

Рассмотрим случай, когда $a = 2^{17} \cdot 5^{16}$, тогда b и c = содержат 2 и 5 в меньших степенях $\Rightarrow$ небольших

$\Rightarrow$ для 2 — 17 вариантов (от 1 до 17)

для 5 — 16 вариантов (от 1 до 16)

$$\begin{array}{r} 1632 \\ + \; 915 \\ \hline 2547 \end{array}$$

для числа b и c $\boxed{17 \mid 16}$

варианты для 2 — варианта для 5

част. черн.

4, 2.

$2 \cdot 17 \cdot 16 = (256 + 16) \cdot 2 = 272 \cdot 2$ варианта. $= \begin{array}{r} 272 \\ \times \quad 2 \\ \hline 544 \end{array} = \boxed{544 \text{ вар.}}$

Таких вариантов 3 (для $a = 2^{17}$.

5+5+5+4+1+... 29/4

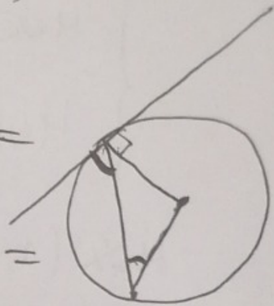
Черновик

Лист 4

(5)

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$, $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$, $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

и a, и b, и c



$$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)\cdot\log_{(x-4)^2}(5x-26)\cdot\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=$$

$$=\cancel{2}\cdot\log_{2x-8}(x-4)\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\log_{x-4}(5x-26)\cdot 2\log_{5x-26}(2x-8)=$$

$$=\cancel{2\cdot\log_{2x-8}(x-4)\cdot\frac{\log_{5x-26}(2x-8)}{\log_{5x-26}(x-4)}=2\cdot\log_{2x-8}(x-4)\cdot\log_{5x-26}(x-4)}$$

$$=\cancel{2\cdot\log_{2(x-4)}(x-4)}\cdot\log_{x-4}(5x-26)\cdot\cancel{\frac{1}{\log_{2(x-4)}5x-26}}$$

$$=2\cdot\log_{2x-8}(x-4)\cdot\cancel{\log_{x-4}}\frac{\log_{5x-26}(2x-8)}{\log_{5x-26}(x-4)}=$$

$\cdot 42$ 6

$+13$ 7

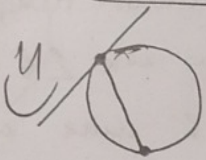
$\cdot 24$ 6

$+10$ 4

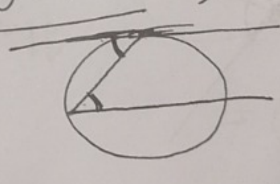
$$=2\cdot\underline{\log_{2x-8}(x-4)\cdot\log_{x-4}(2x-8)}=2.$$

~~a~~

~~b~~ 60.



1.

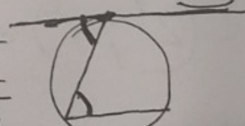


$90\cdot 4=3\cdot 3\cdot 10\cdot 4=$

$=\underline{3\cdot 3}\cdot 2\cdot 2\cdot\underline{2\cdot 5}\cdot 2$

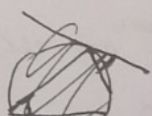
$$\begin{cases}a=1\\b=1\\c=2\end{cases}\quad\begin{cases}a=1\\b=2\\c=1.\end{cases}\quad\begin{cases}a=2\\b=1\\c=1.\end{cases}$$

$$\begin{array}{r}37\\ \times 37\\ \hline 259\\ +111\\ \hline 1369\end{array}$$

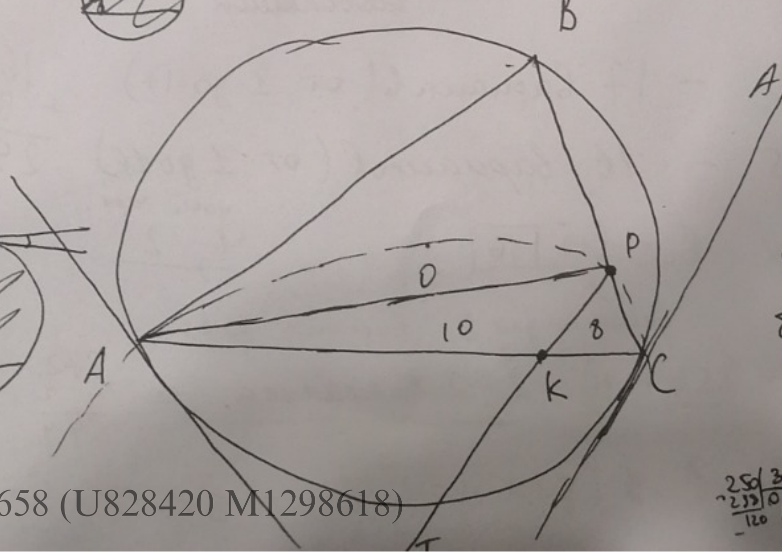


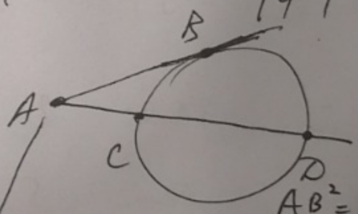
$\times$ 90

$$\begin{array}{r}1{,}6\\ \times 90\\ \hline 1440\end{array}$$

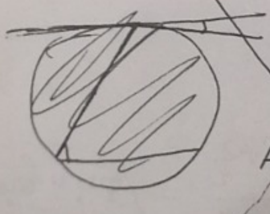


(6)





$AB^2=AD\cdot AC.$



а) S_{ABC} – ?

б) $\angle ABC=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

AC – ?

$5+5+5+$
$+7+3=$
$=25/34$

$5+5+5+2+7=$
$=15+6=24/34$

$21|34$, $0{,}61$

$250|34$, $0{,}73$

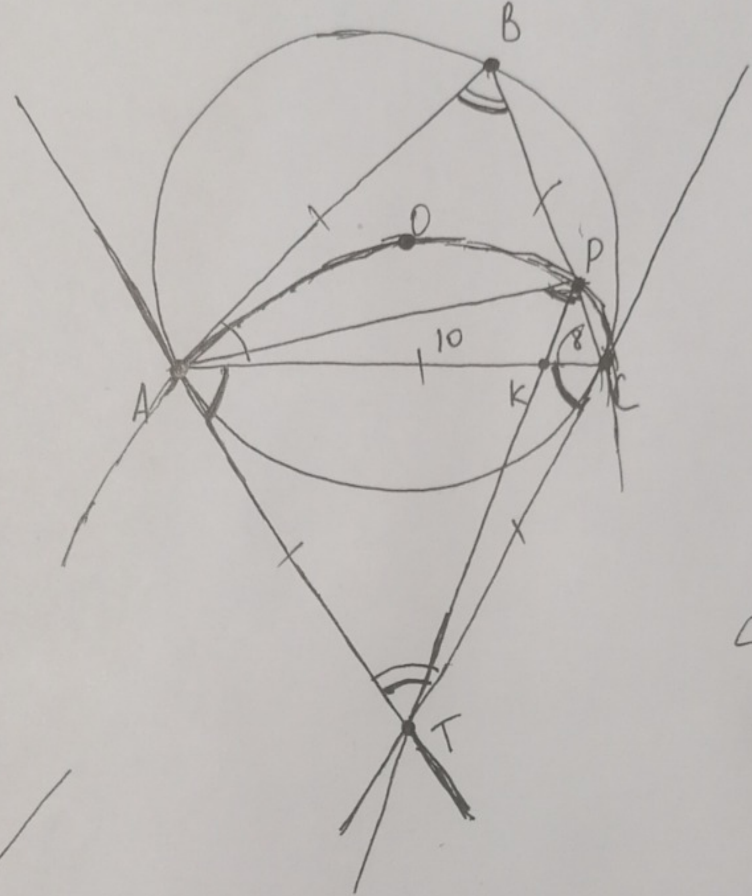
60%

21103658 (U828420 M1298618)

Черновик

Лист 5

(6)



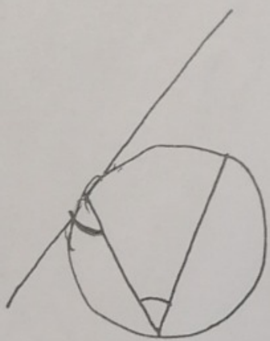
а) S_{ABC} - ?

$TC^2 = TP \cdot TK$

$S_{ABC} = 18 + S_{ABP}$

S_{ABP} - ?

$\angle B = \angle T$, т.к. оба опираются на дугу $\breve{AC}$.



21103658 (U828420 M1298618)

Чистовик

(4)

$$\begin{cases} НОД(a,b,c) = 10 \\ НОК(a,b,c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \end{cases}$$

$НОД(a,b,c) = 5 \cdot 2 \Rightarrow$ Числа $a, b, c \vdots 5$ и $\vdots 2$

Важно, что 2 и 5 - взаимно простые числа $\Rightarrow$ Пересечений в НОД и НОК случаев не должно быть

Если a, b или $c \vdots$ на числа отличные от 2 и 5, то НОК содержал бы эти числа.

Других вариантов НОК, кроме как $2^{max} \cdot 5^{max}$ не будет.

1) Рассмотрим случай, когда a, b или $c = 2^{17} \cdot 5^{16}$, тогда другие два числа содержат 2 и 5 в небольших степенях, чем 17 и 16.

для 2 – 17 вариантов степеней (от 1 до 17)

для 5 – 16 вар. степеней (от 1 до 16).

Всего вариантов для оставшихся двух чисел

$\boxed{17 \mid 16} \Rightarrow 17 \cdot 16 \cdot 2 = 544$ варианта.

для 2ки   для 5ки   т.к. 2 числа

Таких случаев может быть 3 ($a = 2^{17} \cdot 5^{16}$, $b = 2^{17} \cdot 5^{16}$ и $c = 2^{17} \cdot 5^{16}$) $\Rightarrow$ Общее число вариантов в этом случае:

$544 \cdot 3 = 1632$ варианта.

Чистовик

Лист 6

2) Рассмотрим случай, когда $a = 2^{17} \cdot 5^{n}$

Таких вариантов тоже будет $b = 2^{k} \cdot 5^{16}$, где $n, m \leq 16$

три. $c = 2^{l} \cdot 5^{m}$, $k, l \leq 17$.

(Посчитаем для одного и умножим на 3)

Для a : $n \in [1; 16] \Rightarrow$ 16 вариантов числа вида $2^{17} \cdot 5^{n}$

Для b : $k \in [1; 17] \Rightarrow$ 17 вариантов числа вида $2^{k} \cdot 5^{16}$

Для c : $l \in [1; 17]$, $m \in [1; 16] \Rightarrow$ 17·16 вариантов для числа вида $2^{l} \cdot 5^{m}$

$\Downarrow$

Всего вариантов:

$16 + 17 + 16 \cdot 17 = 272 + 33 = 305$ вариантов

Т.к. таких случая 3, то всего:

$305 \cdot 3 =$ 915 вариантов

Сложив кол-во вариантов в 1) и во 2) случае получаем итоговый ответ:

$1632 + 915 = 2547$ ~~сл~~ вариантов

Ответ: 2547.

21103658 (U828420 M1298618)

Чистовик

Лист 7

(5) $\overset{a}{\overset{\shortparallel}{\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)}}$, $\overset{b}{\overset{\shortparallel}{\log_{(x-4)^2}(5x-26)}}$, $\overset{c}{\overset{\shortparallel}{\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)}}$

Перемножим эти три выражения.

$$\log_{\sqrt{(2x-8)}}(x-4)\cdot\log_{(x-4)^2}(5x-26)\cdot\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=$$

$$=2\log_{2x-8}(x-4)\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\log_{(x-4)}(5x-26)\cdot\cancel{2}\log_{5x-26}(2x-8)=$$

$$=2\log_{2x-8}(x-4)\cdot\frac{\log_{5x-26}(2x-8)}{\log_{5x-26}(x-4)}=2\cdot\underbrace{\log_{2x-8}(x-4)\cdot\log_{(x-4)}(2x-8)}_{=1}=$$

$=2$.

$a\cdot b\cdot c=2$, при этом $a=b$ или $b=c$ или $a=c$, а оставшееся число больше на 1 $\Rightarrow$ это возможно только если $a=1,\ b=1,\ c=2$

$a=1,\ b=2,\ c=1.$

$a=2,\ b=1,\ c=1.$

Решим три системы ур-ий:

1) $\begin{cases}\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1.\\ \log_{(x-4)^2}(5x-26)=1\\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=2.\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2x-8}=x-4\\ (x-4)^2=5x-26\\ 5x-26=2x-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-8=x^2-8x+16\\ x^2-8x+16=5x-26\\ 3x=18\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-10x+24=0\\ x^2-13x+42=0\\ x=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-6)(x-4)=0\\ x=6\\ (x-6)(x-7)=0\end{cases}\Leftrightarrow$

~~ОДЗ:~~

Специальное условие для log:

$\begin{cases}2x-8>0\\ 2x-8\neq 1.\\ x-4>0\\ x-4\neq 1.\\ 5x-26>0\\ 5x-26\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>4\\ x\neq 4{,}5\\ x>4\\ x\neq 5\\ x>\frac{26}{5}\\ x\neq\frac{27}{5}\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in(5{,}2;\ 5{,}4)\cup$
$\cup(5{,}4;\ +\infty)$

Чистовик

Лист 8

(5)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \vee x=4 \\ x=6 \\ x=6 \vee x=7 \end{cases}$ $\overset{\text{на спец. усл. для вод}}{\Leftrightarrow}$ $\underline{x=6}$ и $\underline{x=7}$

2) $\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1 \\ \log_{(x-4)^2}(5x-26)=2 \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \vee x=4 \\ (x-4)^4=5x-26 \\ 5x-26=(2x-8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x \in \varnothing}.$

$5x-26=4x^2-32x+64$

$4x^2-37x+90=0$

$\cdot\ 90\cdot 4 \quad 30\cdot 3\cdot 4 \quad 10\cdot 3\cdot 3\cdot 4 \quad 5\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 4$

$D=1369-16\cdot 90=$ $+37$

$=1369-1440<0$

$\Downarrow$

В этом случае решений нет

3) $\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=2 \\ \log_{(x-4)^2}(5x-26)=1 \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-8=x-4 \\ x=6 \vee x=7 \\ 5x-26=(2x-8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=6 \vee x=7 \\ \cancel{5x-26}=x \in \varnothing \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x \in \varnothing}.$

$\Downarrow$

Ответ: 6, 7.