Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103613**

ID профиля: **310890**

Вариант 20

№1

Черновик 1

S-сумма первых 5 членов возраст. арифм. прогрессии $a_1, a_2, a_3 \dots$ состоящей из целых чисел. Известно, что $a_6 \cdot a_{11} > S+15$, $a_8 \cdot a_9 < S+39$. Укажите все возможные значения a_1.

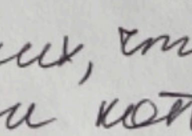
№2

Рассмотрим всевозможные тетраэдры ABCD, в которых $AB=2$, $AC=CB=7$, $AD=DB=8$. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причем ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра — наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?

№3

Пусть M - фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек $(x;y)$ таких, что существует пара вещественных a в при которых система неравенств выполняется

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13) \end{cases}$$



Найдите площадь фигуры M.

Черновик

Черновик ①

S — сумма первых 5 членов возраст.
...ифм. прогрессии $a_1, a_2, a_3 \ldots$ состоящей
...целых чисел. Известно, что $a_6 \cdot a_{11} > S + 15$
...$< S + 39$. Укажите все возможные
...чения a_1.

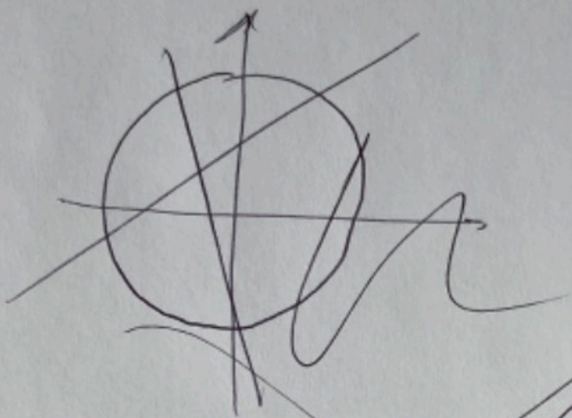
...отрим всевозможные тетраэдры ABCD,
... $AB = 2$, $AC = CB = 7$, $AD = DB = 8$.
... такой тетраэдр впишем в цилиндр
... все вершины оказались на
...ой поверхности, причем ребро CD
...ельно оси цилиндра. Выберем
...я которого радиус цилиндра —
...ший из полученных. Какие значе-
...принимать длина CD в таком

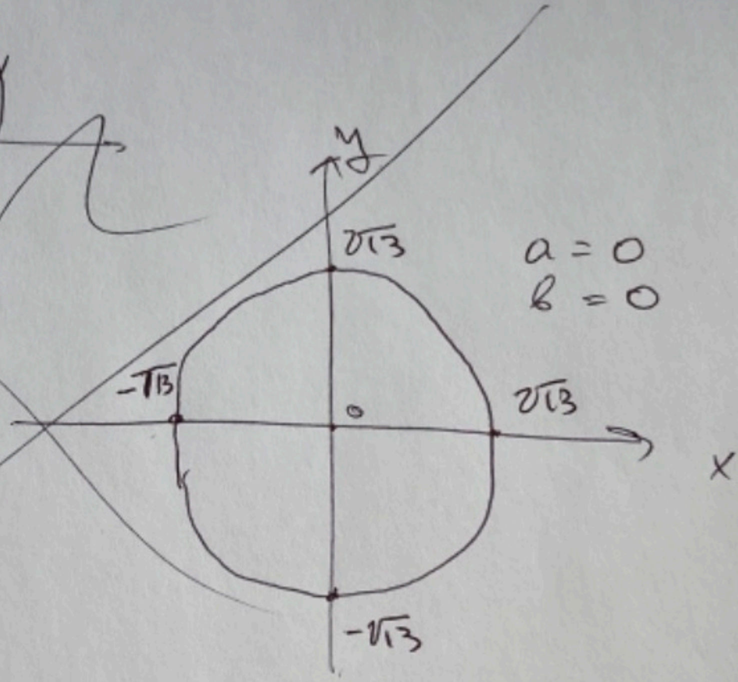
21103613 (U310890 M1298393)

Черновик

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b; 13) \end{cases}$$





$-4a-6b > 13$

$4a+6b < 13$

$2(2a+3b) < 13$

Черновик

$+d(n-1)$

Черновик

$$\cancel{S=\frac{(a_1+a_1+nk)}{2}\cdot 5=5a_1+10k}$$

Черновик

$\frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5 = S$

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$(a_5+d)\cdot a_{11} > 2{,}5a_1 + 2{,}5a_5 + 15$

$(a_5+d)(a_1+10d) > 2{,}5(a_1+a_5)+15$

$(a_1+5d)(a_1+10d) > 2{,}5(a_1+a_1+4d)+15$

$a_1^2 + 10a_1d + 5a_1d + 15d^2 > 5a_1 + 10d + 15$

$a_1^2 + 15a_1d + 15d^2 > 5a_1 + 10d + 15$

$a_1^2 + a_1(15d-5) + 15d^2 - 10d > 15$

$\times\begin{array}{r}2{,}5\\4\\\hline 10\end{array}$

$S = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n = \frac{a_1+a_1+d(n-1)}{2}\cdot n =$

$= \frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$

$\cancel{15d^2}$

$(3d^2-2d-3)=0$

$D = 4+4\cdot3\cdot3 = 40$

$d_1 = \frac{2+\sqrt{40}}{6} = \frac{1+\sqrt{10}}{3}$

$d_2 = \frac{2-\sqrt{40}}{6} = \frac{1-\sqrt{10}}{3}$

$(a_1+5d)(a_1+10d) > \frac{2a_1+\cancel{5(n-1)}\,4d}{2}\cdot 5$

Черновик

Вар. 20

математика

Черновик

Вар. 20

математика
11 кл.

Чистовик (1)

№1

$$S=\frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5=\frac{2a_1+4d}{2}\cdot 5=(a_1+2d)\cdot 5=$$
$$=5a_1+10d$$

$$\begin{cases} a_6\cdot a_{11}>S+15 \\ a_8\cdot a_9<S+39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d)>5a_1+10d+15 & (1) \\ (a_1+7d)(a_1+8d)<5a_1+10d+39 & (2) \end{cases}$$

Домножим (1) на (−1), (2) оставим как есть ⇒ у (1) поменяется знак

$$\begin{cases} -(a_1+5d)(a_1+10d)<-5a_1-10d-15 & (1) \\ (a_1+7d)(a_1+8d)<5a_1+10d+39 & (2) \end{cases}$$

$$\cancel{(1)\ (-a_1-5d)(a_1+10d)>}$$

Сложим (1) и (2), т.к. сложение нер-в с одинаковым знаком равносильный переход.

$$(a_1+7d)(a_1+8d)-(a_1+5d)(a_1+10d)<39-15$$
$$(a_1+7d)(a_1+8d)-(a_1+5d)(a_1+10d)<24$$
$$a_1^2+8a_1d+7a_1d+56d^2-a_1^2-10a_1d-5a_1d-50d^2<24$$
$$6d^2<24 \quad |:6$$

Вар. 20 Математика 11 кл.

Чистовик ②

$d^2 < 4 \qquad d \in (-2; 2)$

Т.к. прогрессия возрастающая, то разность положительная / $\Rightarrow d = 1$

числа целые $\Rightarrow d \in N$ / $\Rightarrow$

Подставим „d" в ① нер-во.

$(a_1 + 5 \cdot 1)(a_1 + 10 \cdot 1) > 5a_1 + 10 \cdot 1 + 15$

$(a_1 + 5)(a_1 + 10) > 5a_1 + 25$

$a_1^2 + 10a_1 + 5a_1 + 50 > 5a_1 + 25$

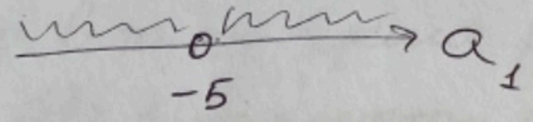
$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1 + 5)^2 > 0$

$a_1 \neq -5$

т.к. $(a_1+5)^2 \geq 0$ всегда

значит, чтобы



$(a_1+5)^2 > 0$

$a_1 \neq -5$

~~Ответ: $a_1 \in (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$~~

Вар. 20

Чистовик (3) Математика 11 кл.

№2

1) Цилиндр наименьший радиус, когда в его основании описанная окружность ABC (берем именно ABC, потому что тетраэдр симметричен относительно CD, которая должна являться осью цилиндра, тогда радиус цилиндра либо радиус описанной окружности ABD, либо ABC, у ABC - меньше.

2) Радиус цилиндра уменьшается если увеличивается угол CMD (M - середина AB)

3) $AB \perp CD$ (по теореме о трех перпендикулярах: CM, MD, CD)

4) Но в то же время радиус НЕ меньше 1, т.к. $AB \leq$ диаметру цилиндра

5) Если бы не это ограничение, то точки D и C удалялись бы друг от друга и в пределе лежат на одной плоскости с AB

6) Таким образом, радиус - единица, а AB - диаметр

Вар 20. Чистовик 4 Математика 11 кл.

7) Тогда мы знаем, что точка M лежит на O_1O_2, и перпендикуляр из т. M на CD, которое равно 1.

8) И в $\triangle CMD$ мы знаем две стороны и высоту из вершины принадлежащей обеим сторонам.
Отсюда находим CD.

Вар. 20

№1

Чистовик (5)

Математика 11 кл.

Подставим „d" во (2) нер-во:

$(a_1+7)(a_1+8) < 5a_1+49$

$a_1^2+8a_1+7a_1+56 < 5a_1+49$

$a_1^2+10a_1+7<0$

$a_1^2+10a_1+7=0$

$D=100-4\cdot7=72$

$a_1=\frac{-10+\sqrt{72}}{2}=-5+3\sqrt{2}$

$a_1=\frac{-10-\sqrt{72}}{2}=-5-3\sqrt{2}$ ~~Ел. нат.~~

$a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$

$\quad\quad\;\; \| \quad\quad\quad\quad\quad \|$

$\quad\; -9{,}2\ldots \quad\quad\quad -0{,}8\ldots$

$a_1 \in Z$ т.к. это система, то решением системы будет ↓

Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; \cancel{-5}; -4; -3; -2; -1\}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103613**

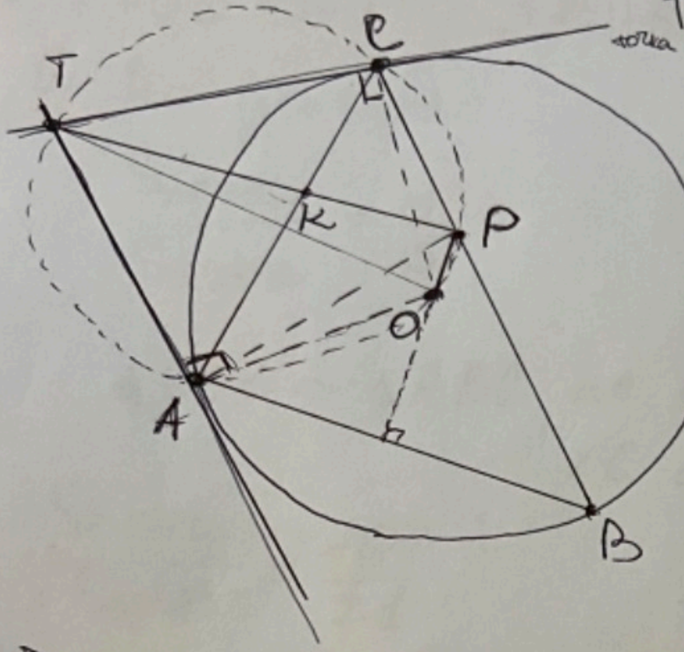
ID профиля: **310890**

Вариант 20

Чистовик (1) Математика

11 кл.

№6



T принадлежит второй окр-сти т.к.

1) Р.п. OC и OA

$OC \perp CT$

$OA \perp AT$

$\Rightarrow$ OT - диаметр второй окружности т.к. $\angle OCT = \angle OAT = 90°$ и они вписанные

2) четырехугольник CPOA - вписанный

$\Rightarrow \angle CPA = \angle COA = 2\angle B$

3) из п. 2) следует, что

$\angle CPA = 2\angle B = \angle PAB + \underbrace{\angle PBA}_{\angle B}$

т.к. $\angle CPA$ - внешний

$\Rightarrow 2\angle B = \angle B + \angle PAB$

$\Rightarrow \angle PAB = \angle B \Rightarrow \triangle PAB$ - равнобедр.

т.к. углы при основании равны

$\Rightarrow (PA = PB)$

$\Downarrow$

$P \in$ серед. перпендик. к AB,

то есть PO - серед. перпендик. $\Rightarrow PO \perp AB$

4) $\angle TPO = 90°$ т.к. опир. на OT (диаметр

21103613 (U310890 M1298394)

5) чистовик (2) математика 11кл.

$PO \perp AB$
$PO \perp TP$ $\Rightarrow TP \parallel AB$

б) По условию:

$$\frac{S_{\triangle CPK}}{S_{\triangle APK}} = \frac{4}{5}$$

$\triangle CPK \sim \triangle ABC$ по 2 равным углам

$\angle C$ - общий, $\angle CPT = \angle CBA$ т.к прямые параллельны.

$$\frac{S_{\triangle CPK}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{16}{81}$$

$$S_{ABC} = \frac{81 \cdot S_{\triangle CPK}}{16} = \frac{81 \cdot 8}{16} = \frac{81}{2} = 40,5$$

Ответ: $40,5 = S_{\triangle ABC}$

№5 Чистовик ③ Математика 11 кл.

1) Давайте обозначим каждое из чисел за буквы:

$A = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2\log_{2x-8}(x-4) = 2\frac{\lg(x-4)}{\lg(2x-8)}$

$B = \log_{(x-4)^2}(5x-26) = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26) = \frac{\lg(5x-26)}{2\lg(x-4)}$

$C = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2\log_{5x-26}(2x-8) =$

$= \cancel{2\log} \frac{2\lg(2x-8)}{\lg(5x-26)}$

где $\begin{cases} x-4>0 \\ 2x-8>0 \\ 2x-8 \neq 1 \\ 5x-26>0 \\ (x-4)^2 \neq 1 \\ 5x-26 \neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>4 \\ x \neq 4{,}5 \\ x>5{,}2 \\ x \neq 5;\ x \neq 3 \\ x \neq 5{,}4 \end{cases}$ ~~x≠5,2~~ $x \in (5{,}2; 5{,}4) \cup$ $\cup (5{,}4; +\infty)$

Заметим, что $A \cdot B \cdot C = 2$

т.к. два числа должны быть равны, а третье на 1 больше, то

$a \cdot a \cdot (a+1) = 2$

$a^3 + a^2 - 2 = 0$

21103613 (U310890 M1298394)

Чистовик (4) Математика 11 кл.

$$\begin{array}{r|l} a^3+a^2-2 & a-1 \\ -\underline{a^3-a^2} & a^2+2a+2 \\ 2a^2 & \\ -\underline{2a^2-2a} & \\ 2a-2 & \\ -\underline{2a-2} & \\ 0 & \end{array}$$

$a=1$

итак $a=1$ или $a^2+2a+2=0$

$D=4-8<0$

тогда а) либо $A=1$

б) либо $B=1$

в) либо $C=1$

а) $A=1$ $\quad 2\log_{2x-8}(x-4)=1$

$x^2-8x+16=2x-8$

$x^2-10x+24=0$

$x=4$ - не подходит под условие

$\underline{x=6}$

При $x=6$ $\quad B=\frac{1}{2}\log_2 4=\frac{1}{2}\cdot 2=1$

$C=2\log_4 4=2$

$A=1; B=1; C=2$

21103613 (U310890 M1298394)

Чистовик (5) математика 11кл.

б) $B=1$ $\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)=1$

$x^2-8x+16=5x-26$

$x^2-13x+42=0$

$x=6$ или $x=7$

уже проверили

$\underline{x=7}$ $A=2\log_6 3$ $C=2\log_9 6$

в) $C=1$ $2\log_{5x-26}(2x-8)=1$

$4x^2-32x+64=5x-26$

$4x^2-37x+90=0$

$D<0$

Ответ: $\underline{x=6}$

Вар 20

Чистовик 6

№6

б) Знаем $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$

$S_{APC} = 18 \quad S_{ABC} = 40,5$

$S_{APB} = 40,5 - 18 = 22,5 \qquad S_{APC} = 10+8 = 18$

$\angle B = \angle PAB$

$\cancel{\frac{CP}{PB} = \frac{18}{\frac{45}{2}}}$

$$\frac{CP}{PB} = \frac{18}{\frac{45}{2}} = \frac{36}{45}$$

Вар. 20 Чистовик (7) Математика 11кл.

№4

1) Среди чисел $a; b; c$ каждое больше или равно 10, т.к. НОД$(a;b;c) = 10$

2) НОД входит в разложение НОК

$$НОК(a;b;c) = \underbrace{2 \cdot 5}_{НОД} \cdot 2^{16} \cdot 5^{15}$$

3) Решения по типу $(1;1;2)$ и $(2;1;1)$ разные, поэтому посчитаем для варианта $(a;b;c)$ и потом дополнительно для перестановок.

4) У нас нет других множителей кроме 2 и 5, так же среди 3х пар: $2^1, 5^1, 2^{17}, 5^{16}$

остальные две степени – любые

черновик

10; 2

$2^{16}\cdot 5^{15}$

a 10 ; 126

16

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 126 \\ \times\ 5 \\ \hline \end{array}$$

$10\cdot 3\cdot 3\cdot 7 = \boxed{630}$

a $630\cdot \cancel{10}\,2 = 1260$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$2\cdot 10\cdot 9\cdot 7 = 630\cdot 20 = 12600$

$$\begin{array}{r|l} 12600 & 14 \\ \hline & 900 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overset{3}{14} \\ \times\ 9 \\ \hline 126 \end{array}$$

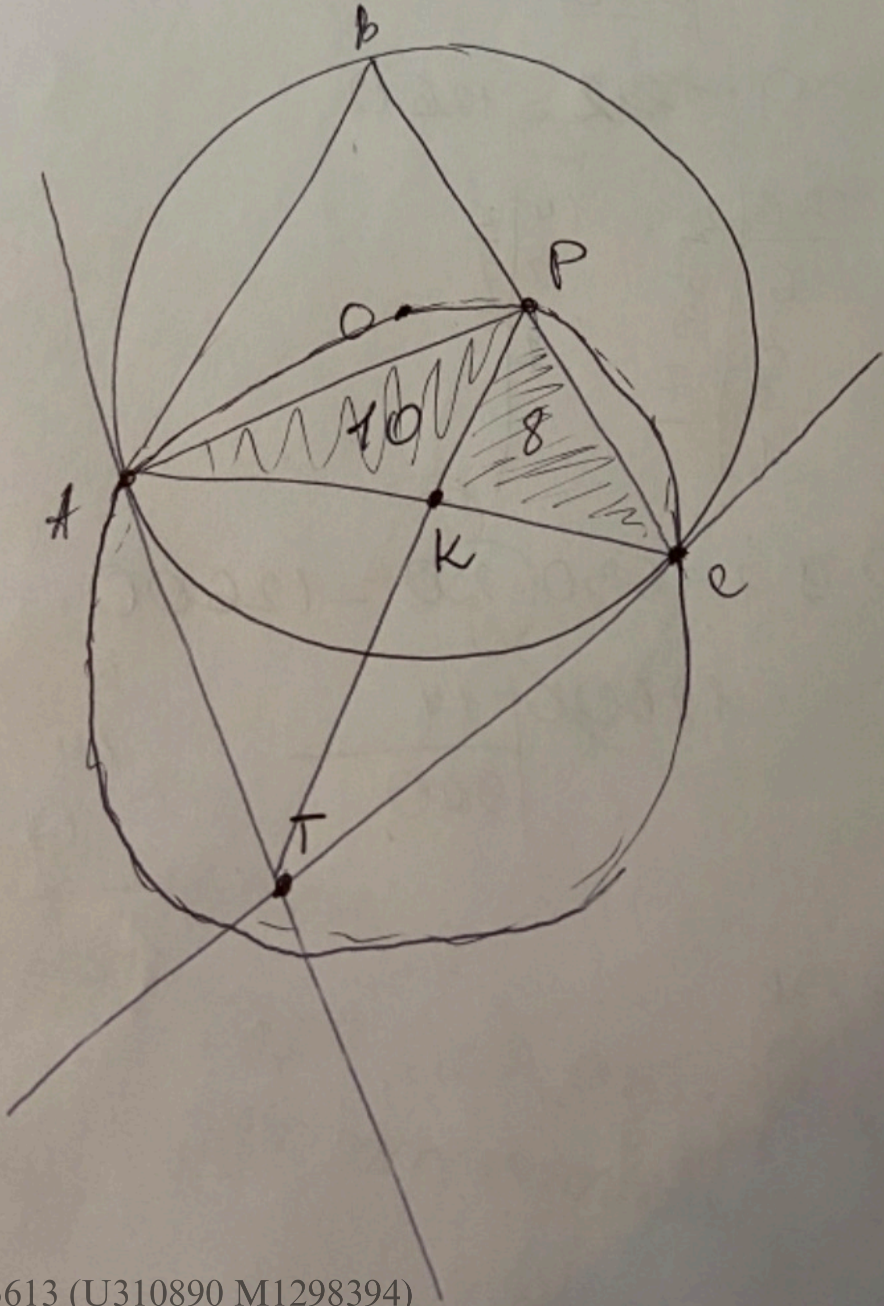
$126\cdot 10\cdot 14$

~~НОД(10, 20; 30) = 10~~
~~НОК(10 ... 30~~

черновик

$$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$$

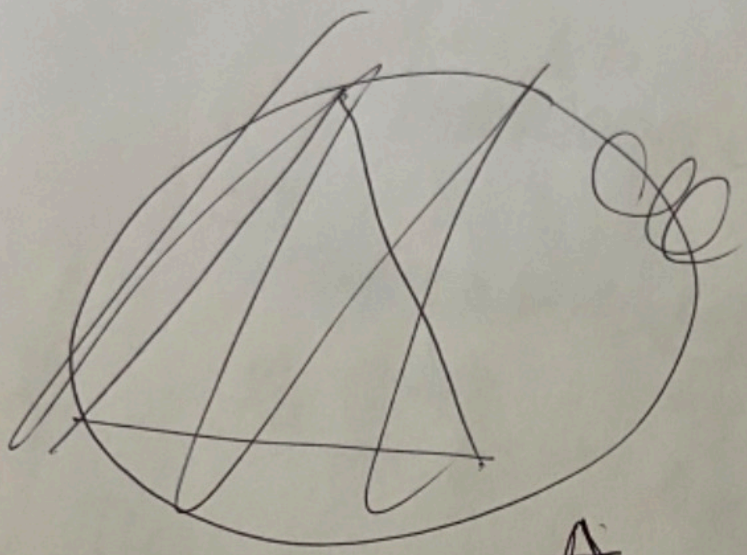
$$\log_{(x-4)^2}(5x-26)+1 =$$
$$= \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$$

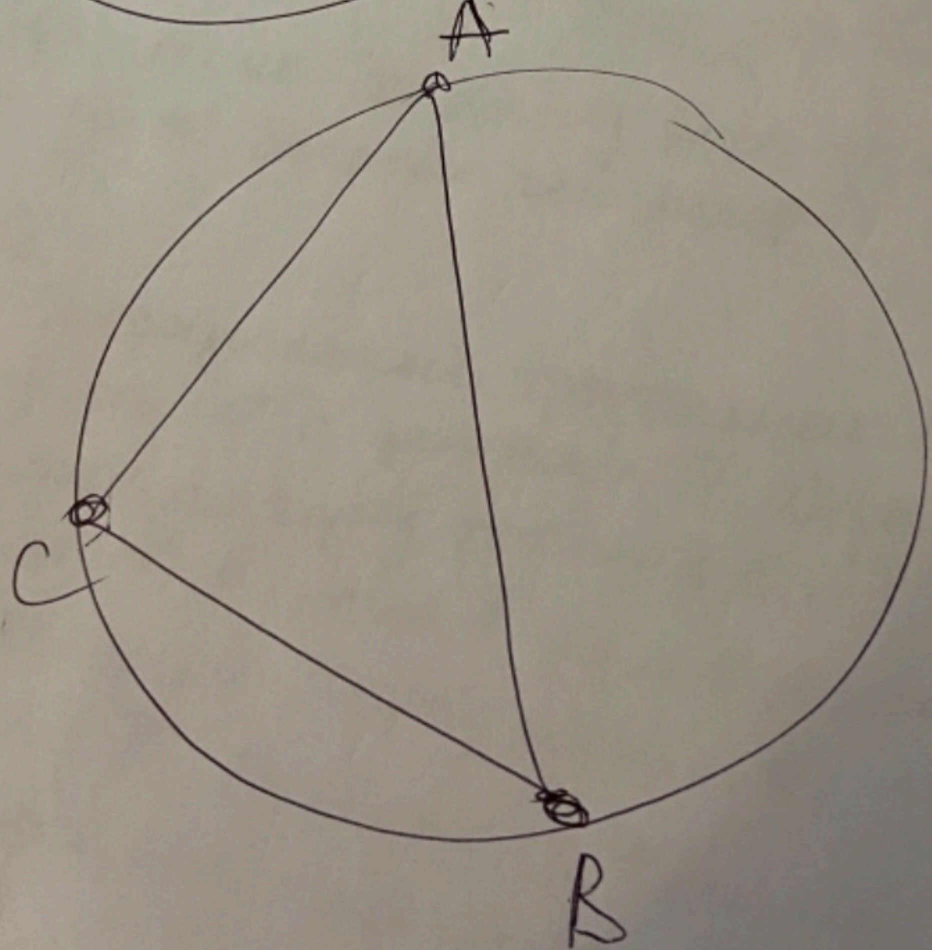


Черновик

~~а) Найдите S треугольника ABC~~

~~б) Пусть известно, что $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$~~, найти AC?





Черновик

№4

Найдите кол-во троек натур. чисел (a, b, c) удовлетворяющих системе уравнений.

$$\begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 10 \\ \cancel{\text{НОК}(a; b; c) = 2^{16} \cdot 5^{16}} \end{cases}$$

10; $2^{10} \cdot 5^{10}$;

16 / 20; 17;

№5

~~Даны числа~~ $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$x > \frac{26}{5}$

$x > 5\frac{1}{5}$

$x =$

① = ②

③ = ② + 1

При каких x два из этих чисел равны, а третье больше их на 1?

№6

черновик

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$2\log_{2(x-4)}(x-4) = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

$\frac{2}{\log_{(x-4)}2 + \log_{(x-4)}(x-4)} = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26) \quad /2$

$\frac{4}{\log_{(x-4)}2 + 1} = \log_{(x-4)}(5x-26)$

log

$10;\ 2^1 \cdot 5^{14};\ 2^{15}$.

$2^1 \cdot 5^1;\ 2^2 \cdot 5^{14};\ 2^{14} \cdot 5^1$

НОД: $10 = 2 \cdot 5$ $\qquad 2 \cdot 5;\ 2 \cdot 5$

НОК: $2^{14} \cdot 5^{14}$

$2 \cdot 2 \cdot 5;$

$2^{13}\ 5\ 21$

Черновик

$2 \cdot 5$; $2^{17} \cdot 5^{\cancel{16}}$, $2^{17} \cdot 5^{16}$

$17 \cdot 16$

21103613 (U310890 M1298394)