Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103576**

ID профиля: **834815**

Вариант 20

Чистовик. Математика

11

1. Обозначим первый член прогрессии через a ($a = a_1$), а разность — через d. $S = S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = \frac{a + a + 4d}{2} \cdot 5 = 5a + 10d$.

Запишем систему неравенств:

$\begin{cases} (a+5d)(a+10d) > 5a+10d+15, \\ (a+\cancel{8}7d)(a+\cancel{9}8d) < 5a+10d+39; \end{cases}$

$\begin{cases} a^2+15ad+50d^2 > 5a+10d+15, \\ 5a+10d+\cancel{15}39 > a^2+15ad+56d^2; \end{cases}$

Сложим неравенства: $a^2+15ad+50d^2+5a+10d+39 > a^2+15ad+56d^2+5a+10d+15$;

$24 > 6d^2$;

$d^2 < 4$;

Так как $a_1, \ldots$ — целочисленная, то $a \in \mathbb{Z}$ (иначе $a_1 \notin \mathbb{Z}$) и $d \in \mathbb{Z}$ (иначе $a_1 \in \mathbb{Z}$, но $a_2 \notin \mathbb{Z}$). Также $a_1, \ldots$ — возрастающая, значит $d > 0$. Тогда $d = 1$.

Подставим это в изначальные неравенства:

$\begin{cases} a^2+15a+50 > 5a+25, \\ 5a+49 > a^2+15a+56; \end{cases}$

$\begin{cases} a^2+10a+25 > 0, \\ a^2+10a+7 < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} (a+5)^2 > 0, \\ a^2+10a+25-18 < 0; \end{cases}$

$\begin{cases} a \neq -5, \\ (a+5+\sqrt{18})(a+5-\sqrt{18}) < 0; \end{cases}$

$a \in (-5-\sqrt{18}; -5) \cup (-5; -5+\sqrt{18})$;

$a \in \mathbb{Z}$, так ~~что~~ что надо оценить $-5-\sqrt{18}$ и $-5+\sqrt{18}$.

21103576 (U834815 M1303338)

$\sqrt{16} < \sqrt{18} < \sqrt{25}$, значит $\sqrt{18} \in (4; 5)$; $-5-\sqrt{18} \in (-10; -9)$ и

1

$-5+\sqrt{18} \in (-1;0)$. Тогда $a \in \{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;$
$-1\}$.

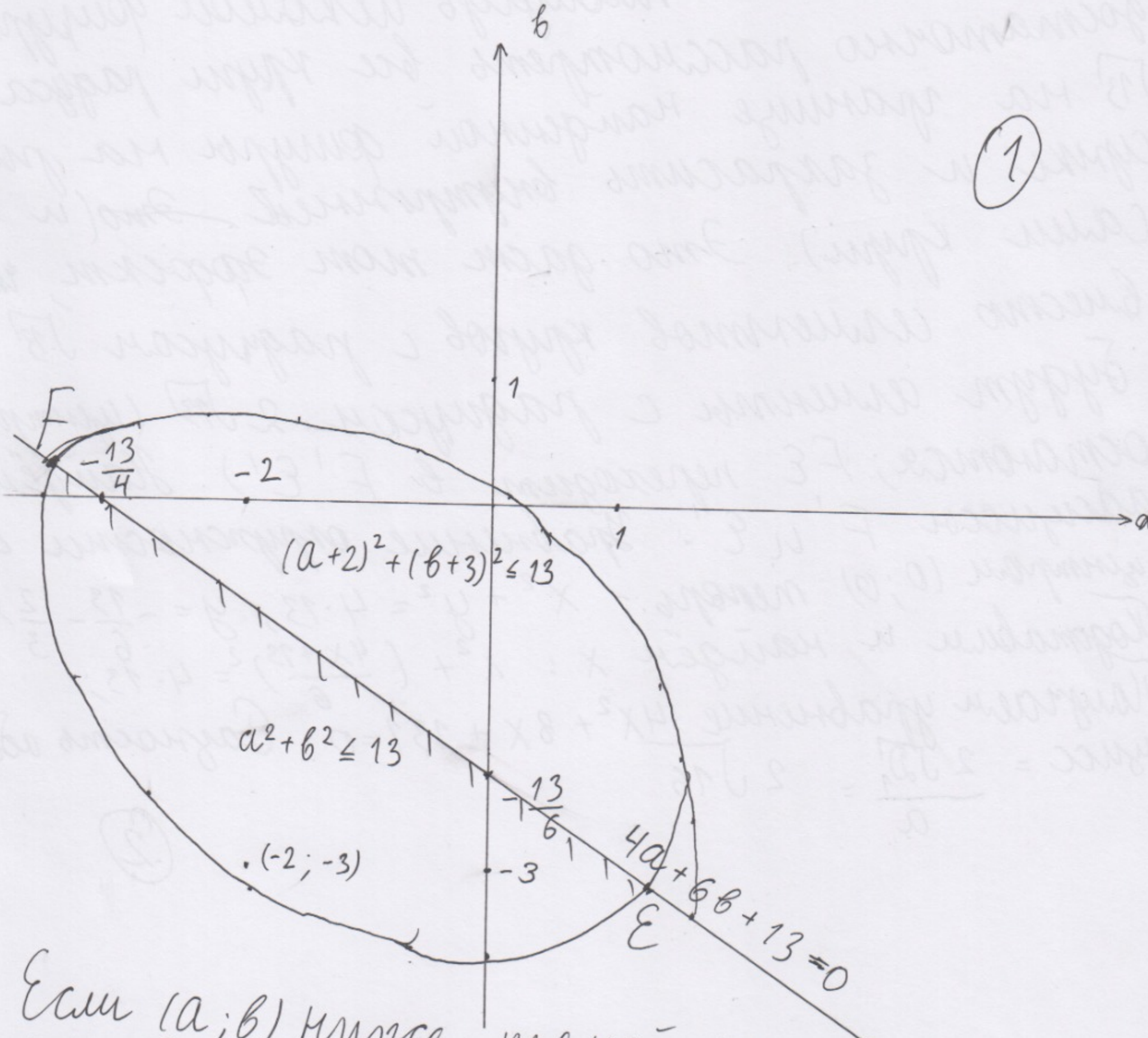
Ответ: $-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1$.

(продолжение 1)

2

Чистовик математика, 11

3. Первое ~~уравнение~~ неравенство указывает, что точка $(x;y)$ принадлежит кругу с центром в $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{13}$. Второе неравенство задаёт ограничения на $(a;b)$. Изобразим возможные $(a;b)$ на плоскости.



Если $(a;b)$ ниже прямой $-4a-6b < 13$, тогда $4a+6b+13=0$ то $(a;b)$ должно принадлежать кругу с центром $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{13}$. Иначе получаем $a^2+4a+4+b^2+6b+9 \leq 13$, т.е. $(a;b)$ принадлежит кругу с центром в $(-2;-3)$ и радиусом 13.

21103576 (U834815 M1303338)

(продолжение 3) Чистовик

Так как на прямой $4a+6b=13$ оба значения $-4a-6b$ и 13 равны и являются минимумами, то на этой прямой ~~происходит~~ пересечения кругов в ней совпадают (отрезок FE). Чтобы найти площадь искомой фигуры достаточно рассмотреть все круги радиуса $\sqrt{13}$ на границе найденной фигуры на рисунке и закрасить внутреннее ~~это~~ (и сами круги). Это даст тот эффект, что вместо сегментов кругов с радиусом $\sqrt{13}$ будут сегменты с радиусом $2\sqrt{13}$ (центры остаются; FE переходит в $F'E'$). Найдём абсциссы F' и E'. Уравнение окружности с центром $(0;0)$ теперь – $x^2+y^2=4\cdot13$; $y=-\frac{13}{6}-\frac{2}{3}x$. Подставим и найдём x: $x^2+\left(\frac{4x+13}{6}\right)^2=4\cdot13$;

Получаем уравнение $4x^2+8x+131=0$. Разность абсцисс $=\frac{2\sqrt{D_1}}{a}=2\sqrt{16}$

(2)

21103576 (U834815 M1303338)

$4x^2+8x+131=0$ Черновик 11 класс. Математика

1. $S=\frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5=\frac{a_1+a_1+4d}{2}\cdot 5=5a_1+10d$

$\frac{\sqrt{D}}{2a}$

$a_6 a_{11}=(a_1+5d)(a_1+10d)>5a_1+10d+15$

$a^2+15ad+50d^2>5a+10d+15$

$\frac{\sqrt{D_1}}{a}$

~~в а. прогрессия: $b_1=a_1$; $d_6=5d_a$~~

$\cancel{a_5=b_2}$ $a^2+\overset{15}{\cancel{17}}ad+\overset{56}{\cancel{72}}d^2<5a+10d+39$

$36x^2+$
$+16x^2+$
$+8\cdot 13x+$
$+169=$
$36\cdot 4\cdot 13$

$52x^2+104x+169$
$52x^2+104x+1703=0$

$\cancel{a^2}+15ad+50d^2+\cancel{5a}+\cancel{10d}+39>$
$>\cancel{a^2}+1\overset{5}{\cancel{7}}ad+\overset{56}{\cancel{72}}d^2+\cancel{5a}+\cancel{10d}+15$

$39>\cancel{2ad}+\overset{6}{\cancel{22}}d^2+15$

~~$2ad+22d^2<24$~~ $6d^2<24$
~~$ad+11d^2<12$~~ $d^2<4$
~~$\underbrace{d}_{цел.}\underbrace{(a+11d)}_{цел.}<12$~~ $d\in\mathbb{Z}$

$\left[\begin{array}{l}d=0,\\d=1;\end{array}\right.$

$d=0\Rightarrow$
$\Rightarrow$ не возрастает
$d=1$

1440
$\cancel{3}\cdot 144$ + 432
$\cdot 13$ 1872
-169
1703

~~$d=1\Rightarrow a<1$~~
~~$d=2\Rightarrow a\le 6-22=-16$~~
~~$d=3\Rightarrow a\le 4-33=-29$~~
~~$d=4\Rightarrow a\le 3-44=-41$~~
~~$d=6\Rightarrow a\le 2-66=-64$~~
~~$d=12\Rightarrow a\le 1-132=-131$~~

$1703:13=131$
$\begin{array}{r}1703\\-13\\\hline 40\\-39\\\hline 13\end{array}$

$a\in(-5-\sqrt{18};\ -5+\sqrt{18})$

$\cancel{a}\ne -5$

$\sqrt{16}<3\sqrt{2}<\sqrt{25}$

$\begin{cases}(a+5)^2>0\\(a^2+2\cdot 5a+25)-18<0\end{cases}$ $a\ne -5$

$(a+5-\sqrt{18})(a+5+\sqrt{18})<0$ $a\cancel{6}$

$\begin{cases}a^2+10a+25>0\\a^2+10a+7<0\end{cases}$

$S=5a+10$

$\begin{cases}a^2+15a+50>5a+25,\\a^2+15a+56<5a+49;\end{cases}$

21103576 (U834815 M1303338)

3. Черновик

$$\boxed{\begin{aligned}&a^2+\left(\frac{13+4a}{6}\right)^2=13\\&36a^2+(4a+13)^2=468\end{aligned}}$$

$52a^2+104a+169=468$

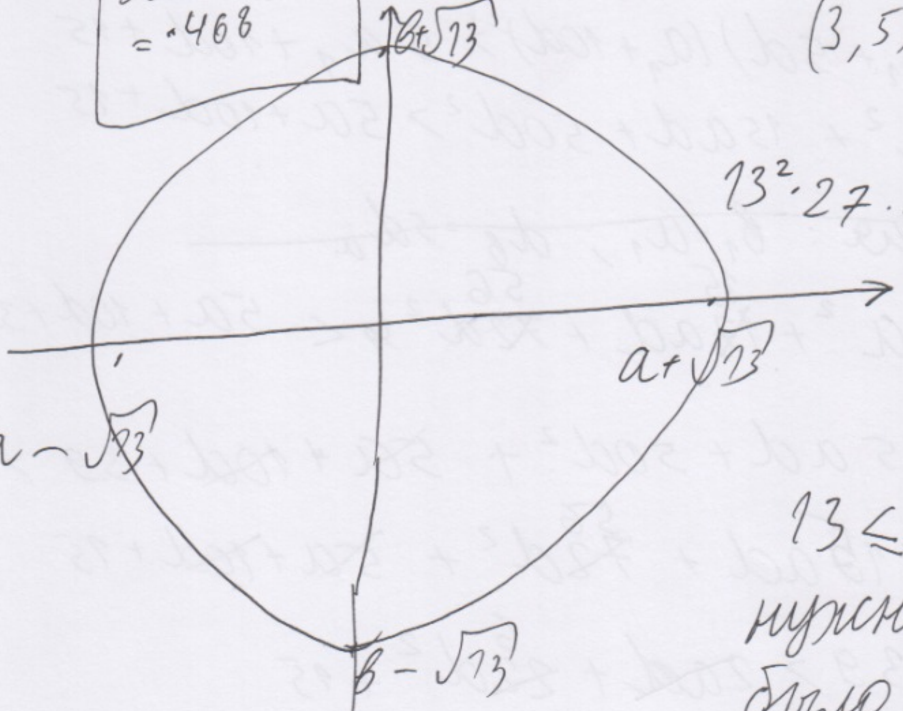
$52a^2+104a-299$

$D_1=52^2+52\cdot 299$

$\sqrt{13}\in(3;4)$

$(3,5)^2=\frac{49}{4}=\frac{48}{4}+\frac{1}{4}=12\frac{1}{4}$

$\sqrt{13}\in(3,5;4)$



$13^2\cdot 27\cdot 4$

$52(52+299)$

$468-169=299$

$52\cdot 3{,}5 >$

$13\le -4a-6b \Rightarrow$ нужно, чтобы $(0;0)$ было внутри

$357 \mid 13$; -26; 91; 27

$(36+16)a^2+(4\cdot 36-248)a+961+144=13\cdot 36$

$4a+6b+13\le 0$

$52a^2-104a+637=0$

$a^2+b^2+4a+6b\le 0$

$a^2+4a+4+b^2+6b+9\le 13$

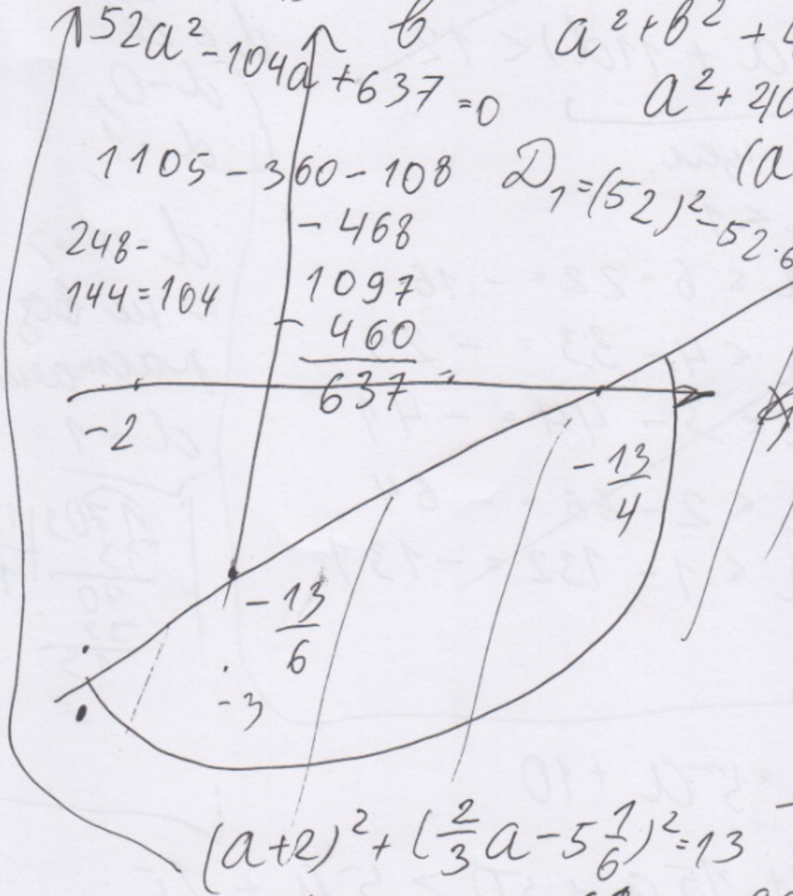
$(a+2)^2+(b+3)^2\le 13$

$1105-360-108$

$D_1=(52)^2-52\cdot 637$

$248-144=104$

-468; 1097; -460; 637



$b=\frac{-13-4a}{6}$

$$\boxed{\begin{aligned}&(a+2)^2+\left(\frac{13-4a}{6}+3\right)^2=13\\&\left(-\frac{2}{3}a+5\frac{1}{6}\right)^2=13\end{aligned}}$$

$(a+2)^2+\left(\frac{2}{3}a-5\frac{1}{6}\right)^2=13$

$\frac{13}{6}=\sqrt{\frac{169}{36}}\not=\sqrt{13}$

$a^2+\frac{4}{9}a^2+4a-\frac{62}{9}a+\frac{961}{36}+4=13$

$\frac{169}{36}\vee 13$

$\frac{13}{36}\vee 1$

Черновик

3. $(a+2)^2 + \left(\frac{13-4a}{6} + 3\right)^2 = 13$

$$(a+2)^2 + \left(\frac{31-4a}{6}\right)^2 = 13$$

$$(6a+12)^2 + (4a-31)^2 = 13\cdot 36$$

$36a^2+144a+144+16a^2-$

$-8\cdot 31a + 31^2 = 468$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 36 \\ \hline 108 \\ 36 \\ \hline 468 \end{array}$$

$52a^2 + (144-248)a + 31^2 = 324$

$52a^2 - 104a + 637 = 0$

$\mathcal{D}_1 = 52^2 - 52\cdot 637 = 52\cdot$

$\cancel{a^2 - 2a}$

$\cancel{31 \times 31}$

$900+60+1=$

$$\begin{array}{r} 248 \\ -144 \\ \hline 104 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 961 \\ -324 \\ \hline 637 \end{array}$$

$b = \frac{-13-4a}{6}$

$b = -\frac{2}{3}a - 2\frac{1}{6}$

$(-2; -3)$

$b' = \frac{3}{2}a - 2\frac{1}{4}$

$\frac{1}{26}$;

$\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right)a = 2\frac{1}{4} - 2\frac{1}{6} =$

$\frac{13}{6}$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{\cancel{3}1}{12}$

$-\frac{2}{78} : \left(-\frac{1}{39}\right) - 2\frac{1}{6}$

$a = \frac{6}{12\cdot 13} = \frac{1}{26}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103576**

ID профиля: **834815**

Вариант 20

Чистовик

5. Наложим все требуемые ограничения на x:

$\sqrt{2x-8}>0 \Leftrightarrow x>4$

$\sqrt{2x-8}\neq 1 \Rightarrow x\neq 4,5$

$(x-4)^2>0 \Rightarrow x\neq 4$

$(x-4)^2\neq 1 \Rightarrow x\neq -3;\ x\neq 5$

$x-4>0 \Rightarrow x>4;$

$\sqrt{5x-26}>0 \Rightarrow x>5,2;$

$\sqrt{5x-26}\neq 1 \Rightarrow x\neq 5,4;$

$2x-8>0;\ x>4.$

Итак, $x\in(5,2;5,4)\cup(5,4;+\infty)$.

Перепишем логарифмы: $2\log_{2x-8}(x-4)$; $\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$; $2\log_{5x-26}(2x-8)$. Заметим, что их произведение $=2$.

~~Дону~~ Пусть те из них, что равны, равны t, а оставшийся $=t+1$. Их произведение $t^2(t+1)=2$. Найдём возможные t: $t^3+t^2-2=0$. $t=1$ — решение. Разделим на $t-1$:

$$\begin{array}{l|l} t^3+t^2+0t-2 & t-1 \\ -(t^3-t^2) & t^2+2t+2 \\ \hline \quad 2t^2+0t & \\ \quad -(2t^2-2t) & \\ \hline \qquad +2t-2 & \\ \qquad -(2t-2) & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

1

$(t^2+2t+2)(t-1)=0;$

$((t+1)^2+1)(t-1)=0;$

Значит $t=1$.

Найдём возможные значения x при равенстве любого из трёх чисел x:

$2\log_{2x-8}(x-4)=1;$

Чистовик.

4. Домножим второе уравнение на первое:

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=10, \\ abc = 2^{18}\cdot 5^{17}; \end{cases}$$

2 и 5 - простые числа, значит каждое из чисел a, b, c имеет вид $2^n \cdot 5^m$ (из второго), кроме того, ни у какого из a, b, c $n=0$ или $m=0$ (из первого). Итак, имеется взаимнооднозначное соответствие между тройкой $(a;b;c)$ и четвёркой $(a_1; b_1; a_2; b_2)$, где $a=2^{a_1}\cdot 5^{a_2}$, $b=2^{b_1}\cdot 5^{b_2}$, $c=2^{18-a_1-b_1}\cdot 5^{17-a_2-b_2}$, значит их кол-ва равны. $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{N}$; $a_1, b_1 \in [1;16]$ (если одно равно семнадцати, то $18-a_1-b_1 \le 0$, что недопустимо ($n>0$)); $a_2, b_2 \in [1;15]$ (по тем же основаниям для m ($m>0$)), кроме того, $a_1+b_1 \le 17$; $a_2+b_2 \le 16$. При этом существуют следующие условия (необходимые и достаточные для первого равенства):

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a_1=1, \\ b_1=1, \\ a_1+b_1=17, \end{array}\right. & (1) \\ \left[\begin{array}{l} a_2=1, \\ b_2=1, \\ a_2+b_2=16; \end{array}\right. & (2) \end{cases}$$

(1) и (2) не зависят друг от друга и перемножим! Рассмотрим их раздельно: (1) $a_1=1 \Rightarrow 16$ ~~реш~~ пар $(a_1;b_1)$; $b_1=1 \Rightarrow 15$ пар $(a_1;b_1)$, кроме учтённой $(1;1)$; $a_1+b_1=17 \Rightarrow 14$, не считая $(1;16)$, $(16;1)$. (2) $a_2=1 \Rightarrow 15$ пар $(a_2;b_2)$; $b_2=1 \Rightarrow 14$, не считая $(1;1)$; $a_2+b_2=16 \Rightarrow 13$, не считая $(1;15)$, $(15;1)$. Итого $45\cdot 42=1890$.

Ответ: 1890 троек.

(продолжение 5) Чистовик

~~Возведём~~ $(x-4)^2 = 2x-8;$

$x^2-8x+16=2x-8;$

$x^2-10x+24=0;$

$(x-6)(x-4)=0;$

$x>5,2$, значит $x=6$.

$\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)=1;$

2

$(x-4)^2=5x-26;$

$x^2-8x+16=5x-26;$

$x^2-13x+42=0;$

$(x-7)(x-6);$

$x=7$ или $x=6$

$\cancel{2\log_{5x-26}(2x-8)=0}$

$\cancel{(2x-8)^2=5x-26}$

$\cancel{4x^2-32x+64=5x-26;}$

$\cancel{4x^2-37x+90=0;}$

Так как один из этих логарифмов (рассмотренных) в любом случае $=1$, то необязательно исследовать третий.

Проверим $x=6$:

$2\log_4 2=1;\ \frac{1}{2}\log_2 4=1;\ 2\log_4 4=2$ – подходит.

Проверим $x=7$: $2\log_6 3 \neq 1, \neq 2;\ \frac{1}{2}\log_3 9=1;\ 2\log_9 6 \neq 1, \neq 2.$

не подходит

Ответ: $x=6$.

4. Система $\begin{cases} НОД(a;b;c)=10, \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16}; \end{cases}$ эквивалентна системе $\begin{cases} НОД(a;b;c)=10, \\ abc=2^{18}\cdot 5^{17} \end{cases}$ Так как разложение на простые множители числа $abc=2^{18}\cdot 5^{17}$, то каждое из чисел (a,b,c) имеет вид $2^n\cdot 5^m$. Если хотя бы у одного из них m или n равно нулю, то их НОД имеет вид степени 5 или 2, т.е. $\neq 10$. Но при этом наименьшее n из всех $=1$ и m - так же (только тогда НОД$(a;b;c)=10$). Рассмотрим некоторые частный случай тройки $(a;b;c)$ и будем домножать и складывать найденные кол-ва решений. Допустим, что ~~степ~~ числа, степень двойки которого 1 (в разложении) и степень 5 которого 1, различны. Пусть первое - a, а второе - b. (случай, когда $m=1$ или $n=1$ у большего кол-ва чисел рассмотрим отдельно).

$$(a_1;a_2;b_1;b_2)$$

$a_1, b_1, \cancel{b_1}, b_2 \in [1;16]$

$a_2, b_2 \in [1;15]$

$45\cdot 42=$

$$a=2^{a_1}\cdot 5^{a_2}$$
$$b=2^{b_1}\cdot 5^{b_2}$$
$$c=2^{18-a_1-b_1}\cdot 5^{17-a_2-b_2}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a_1=1 \\ b_1=1 \\ a_1+b_1=17 \end{array}\right. \\ [\ldots \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 45 \\ \hline 210 \\ 168 \\ \hline 1890 \end{array}$$

$90\cdot 21=210-21=\cancel{43}1890$

$2\log_{2x-8}(x-4)$; $\dfrac{\log_{(x-4)}5x-26}{2}$; $2\log_{5x-26}(2x-8)$

$2\log_{2x-8}(x-4);\ \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26);\ 2\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$a \qquad b \qquad c$

$a=b \Rightarrow 4\log_{2x-8}(x-4) = \log_{x-4}(5x-26)$

$4=\log_{(x-4)}(2x-8)\cdot\log_{(x-4)}(5x-26)$

$2\log_{5x-26}(2x-8)=2\log_{2x-8}(x-4)+1$

$\log_{5x-26}(2x-8)=\log_{2x-8}(x-4)+\frac{1}{2}$

$\dfrac{\log_{(x-4)}(5x-26)}{\log_{5x-26}(2x-8)-\frac{1}{2}}=4$

$\log_{(x-4)}(5x-26)=4\log_{5x-26}(2x-8)-2$

$\begin{cases} a=b=c-1 \\ abc=2 \end{cases}$

$a^2(a+1)=2$

$a^3+a^2-2=0$

$a=1$

	1	0	1	-2
1	1	1	2	0

$(a^2+a+2)(a-1)=0$

~~какая-то~~

	1	1	0	-2
1	1	2	2	0

$(a^2+2a+2)(a-1)=0$

$2x-8>0$

$x>4$

$2x-8\neq 1$

$x\neq 4{,}5$

$x-4\neq 1$

$x\neq 5$

$x-4>0$

$x>4$

$2\log_{2x-8}(x-4)=1$

$(x-4)^2=2x-8$

$x^2-8x+16=2x-8$

$x^2-10x+24=0$

$(x-4)(x-6)=0$

$x=4$

$x=6$

$\boxed{\begin{matrix} x>4 \\ x\neq 4{,}5 \\ x\neq 5 \\ 5x-26>0 \end{matrix}}$

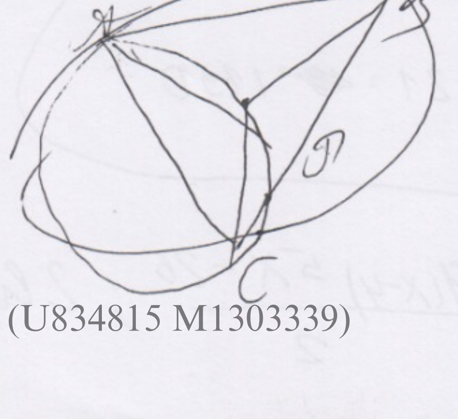
$x>\frac{26}{5}=5{,}2$

$x>5{,}2$

$5x-26\neq 1$

$x\neq \frac{27}{5}$

$x\neq 5{,}4$



21103576 (U834815 M1303339)