Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103572**

ID профиля: **861692**

Вариант 20

Чистовик

№1

$S_5 = a + 10d$

Тогда по усл. справедливо:

$$\begin{cases}(a+5d)(a+10d) > 5a+10d+15\\ (a+7d)(a+8d) < 5a+10d+39\end{cases}$$

a - целое и тк все целые, то d тоже целое,

и $d>0$ тк прогр. ↑.

$$\begin{cases}a^2+15ad+50d^2 > 5a+10d+15\\ a^2+15ad+56d^2 < 5a+10d+39\end{cases}$$

$\Downarrow$

$$15 < a^2+15ad+50d^2-5a-10d < 39-6d^2$$

$d \in N$ и $\in Z$ тк целы a и b и все коэфф.

(те $39-6d^2 > 15$)

Те возможно что $d=1$

$d=2$ $39-24=15$ уже не подх.

нтк $39-6d^2 \downarrow$ то ост. d не подойдут.

Проверим $d=1$

$$15 \underset{1)}{<} a^2+15a+50-5a-10 \underset{2)}{<} 33$$

1) $a^2+10a+25>0$

$(a+5)^2>0$ $a \neq -5$

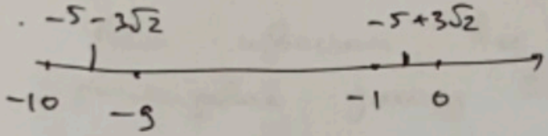
2) $a^2+10a+7<0$

$a \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$ (1)

21103572 (U861692 M1300625)

$d>0$

Исследовани



и $a \neq -5$, тогда

a принимает значен

целые от -9 до -1 включ.
без -5

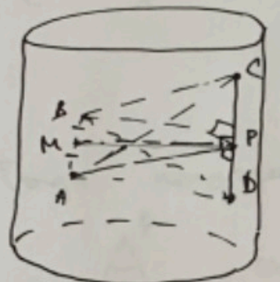
Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$.

21103572 (U861692 M1300625)

№2 Иисловии

Нам известны все стороны тетраэдра, кроме CD те зафиксировав длину CD мы зафиксируем тетраэдр.

∃ min радиус цилиндра при $CD = x$ $\quad x < 7+8=15$ (из 3 сторон)



Тк все вершины на боковой поверхности и CD ∥ оси, то CD полностью на боковой поверхности.

ТК $CB = BA$ и $BD = AD$, то в силу равноудаленности этих точек от C и D прямая AB ∥ основаниям цилиндра

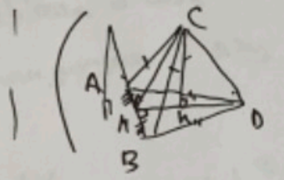
ТК CD ∥ оси и $AB \perp CD$ то AB лежит в плоскости ∥ основаниям цилиндра.

проведем прямую $MP \perp AB$ и ∥ пло-ти оснований цилиндр.

$MP \perp CD$ тк CD ∥ оси ~~цилиндр прямой~~.

Тогда (ABP) искомая п-ть.

$AP \perp CD$ и $BP \perp CD$ тк плоскть! CD.



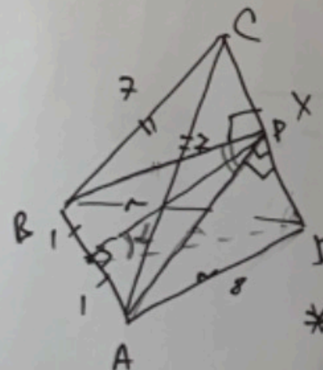
Док-во конкретное.

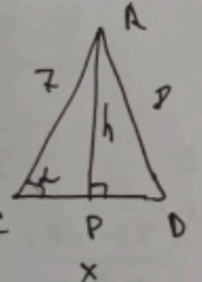
тк $CA = CB$ и $AD = BD$, то высота из C падает на медиану DM, $CM \perp AB$ (медиана р/б) $DM \perp AB$ анал.

проведем из (·) M прямую ∥ CD и из нее опустим ⊥ (он ∥ Ch и лежит на MD)

тк $Oh \perp$ к (ABD) и $MD \perp AB$ то по Т3⊥ новая прямая ⊥ AB $\Rightarrow CD \perp AB$)

Тогда min радиус цилиндра будет тогда, когда min будет радиус описаной окр. вокр. △ ABP (тк ∥ п-ти)





* △ BCD = △ CDA по 3 сторонам

= AP = BP

Выразим h ~~через ...~~

$\sin\alpha = \frac{h}{7} \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{h^2}{49}} = \frac{\sqrt{49-h^2}}{7}$

$S_{ACD} = \frac{1}{2}\cdot 7 \cdot x \cdot \frac{h}{7} = \frac{xh}{2}$

Тh cosuq.

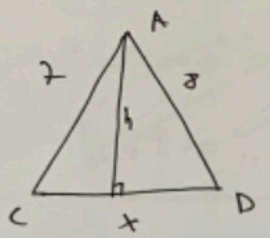
$64 = 49 + x^2 - 14x\cos\alpha$

~~$\cos\alpha = \frac{x^2 - 15}{14x}$~~

3

21103572 (U861692 M1300625)

$64 = 49 + x^2 - 14x \, \frac{\sqrt{49-h^2}}{7}$ Иисгдоши

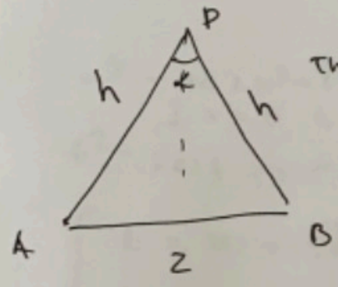


$$\frac{\sqrt{49-h^2}}{7} = \frac{x^2-15}{14x}$$

$$\sqrt{49-h^2} = \frac{\cancel{7}x^2-15 \cdot 7}{\cancel{14}x} = \frac{x^2-15}{2x} \qquad 49-h^2 = \left(\frac{x^2-15}{2x}\right)^2$$

$$h = \sqrt{49 - \left(\frac{x^2-15}{2x}\right)^2}$$

Тогда получаем, что исх. D:



$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$$

Th cos: $4 = 2h^2 - 2h^2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2h^2-4}{2h^2}$ $\quad \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{(2h^2-4)^2}{4h^4}} = \frac{\sqrt{4h^4-(2h^2-4)^2}}{2h^2}$

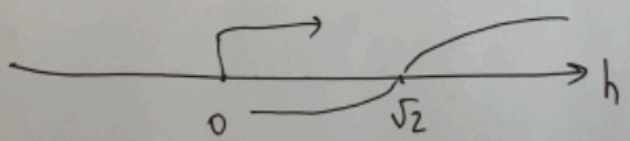
minimizujeм эту функцию

$$f(h) = \frac{2 \cdot 2h^2}{\sqrt{4h^4-(2h^2-4)^2}} = \frac{4h^2}{\sqrt{16h^2-16}} = \frac{h^2}{\sqrt{h^2-1}}$$

$$f'(h) = \frac{h^3-2h}{\sqrt{h^2-1}\,(h^2-1)}$$

корни $h = \pm\sqrt{2}$, но $h > 0$ $\Rightarrow \sqrt{2}$

$(h^2 - 2h = 0)$



$f(h) \downarrow \quad \nearrow$

Те min при $\underline{\underline{h = \sqrt{2}}}$

$$\sqrt{2} = \sqrt{49 - \left(\frac{x^2-15}{2x}\right)^2} \qquad 2 = 49 - \left(\frac{x^2-15}{2x}\right)^2$$

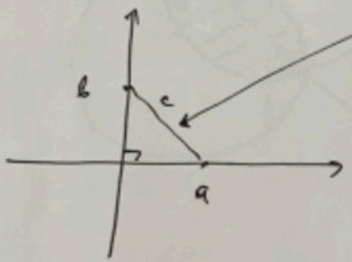
$$\frac{(x^2-15)^2}{2^2x^2} = 47$$

4

№3 Исследуем

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,\ 13) & (2)\end{cases}$$

б (2) условие: $a^2+b^2=c^2$



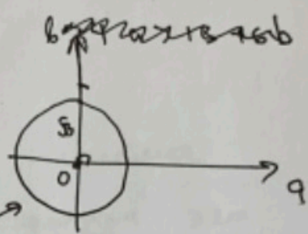
если a и $b \geq 0$, то $-4a-6b<0$

$\Rightarrow$ это min $-4a-6b<0<a^2+b^2$

$\Rightarrow$ такие не подойдут

$$\exists \begin{cases}-4a-6b>13\\ a^2+b^2\le 13\end{cases}$$

круг радиуса $\sqrt{13}$



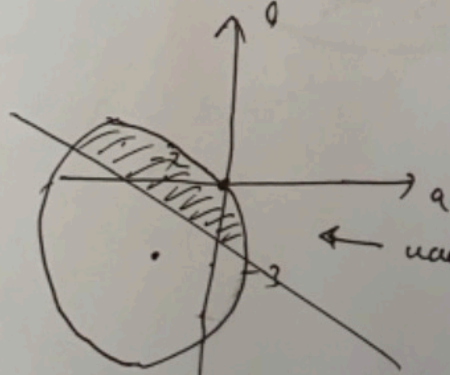
$$\exists \begin{cases}13>-4a-6b\\ a^2+b^2\le -4a-6b\end{cases}$$

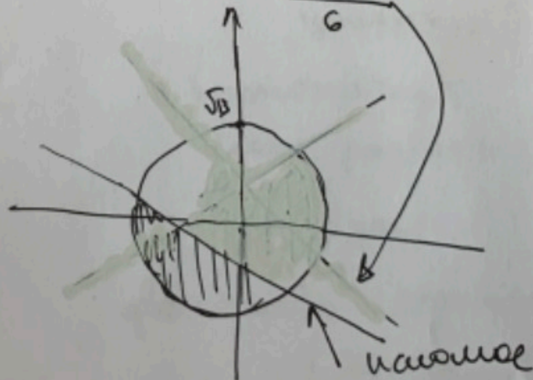
$$\begin{cases}13>-4a-6b & b>\frac{-4a-13}{6}\\ (a+2)^2+(b+3)^2\le 13\end{cases}$$

ц. $O(0;0)$

$-6b>13+4a$

$b<-\frac{13+4a}{6}$





т.е все a и b с этих систем подходят.

$d>0$

Чистовик

~~$49x^4 - 210x^2 + 225 = 47 \cdot 14^2 x^2$~~

~~$\exists\, x^2 = t,\ t>0$~~

$x^4 - 30x^2 + 225 = 47 \cdot 4 \cdot x^2$

$-47 + \dfrac{x^4 - 30x^2 + 225}{16x^2} = 0$

$x^4 - 782x^2 + 225 = 0$

$\exists\ x^2 = t \quad t>0$

$t^2 - 782t + 225 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = 391 + \sqrt{391^2 - 225} > 0 \\ t = 391 - \sqrt{391^2 - 225} > 0 \end{array}\right.$ но $0 < x < 15$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{391 + \sqrt{391^2 - 225}} > 15 \\ x = \sqrt{391 - \sqrt{391 - 225}} \end{array}\right.$

↑ подходит

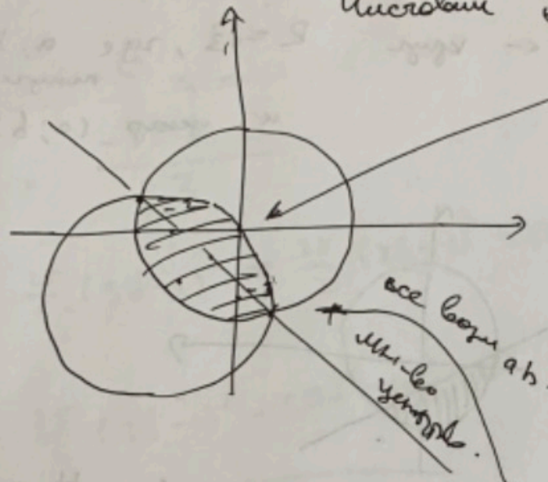
Ответ: $\sqrt{391 - \sqrt{391 - 225}}$

5

103572 (U861692 M1300625)

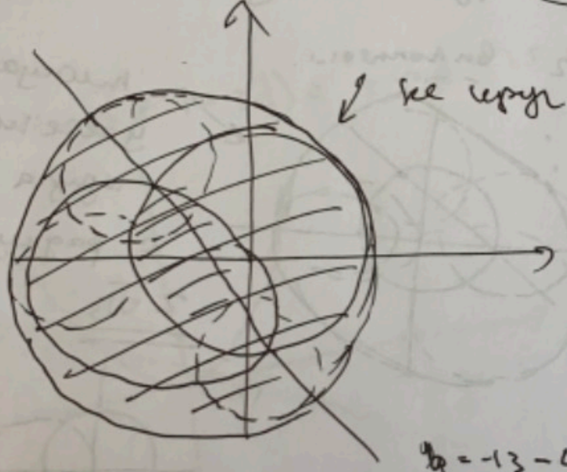
Исловим ~~искомая площадь S~~

Обоснование: посчитаем точки и сверим.



$(x-a)^2+(y-b)^2\le 13$

круг с центр. $(a;b)$



→ те искомая фигура это ещё круги построенные на этих центрах, посчитаем как разность площадей двух симм. отсеченных круга.

$y=\frac{-13-4x}{6}$

2

7.

21103572 (U861692 M1300625)

$1>0$

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 13 \\ a^2 + b^2 \le \min(-4a-6b, 13) \end{cases}$$

$a > 0$

$$\begin{cases} a(a+5d) + 50d^2 > 5(a+2d) + 15 \\ a(a+5d) + 56d^2 < 5(a+2d) + 39 \end{cases}$$

$$a a_6 + 50d^2 > 5a_3 + 15$$

$$\frac{a_1 + a_5}{2}$$

21103572 (U861692 M1300625)

$1>0$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \text{mi..} \end{cases}$$

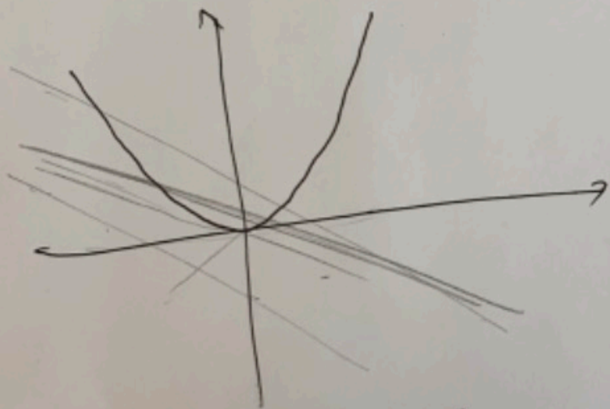
$$x_B = \frac{-5(3d-1)}{2}$$

$$y_B = \frac{25}{4}(3d-1)^2 - \frac{25}{2}(3d-1)^2 + 50d^2 - 10d - 15 =$$

$$= -\frac{25}{4}(3d-1)^2 + 50d^2 - 10d - 15 = -\frac{5}{4}(23x+7-40x^2)$$

$$a^2 > 5(1-3d)a + 10d + 15 - 50d^2$$

$$-50d^2+10d+15$$



$$\begin{cases} a^2+15ad+50d^2 > 5a+10d+15 \\ a^2+15ad+56d^2 < 5a+10d+39 \end{cases}$$

$a \le -11$

$$121 - 15\cdot 11d + 50d^2 > -55 + 10d + 15$$

$$> \cancel{50d^2} + 10d + 15 - 50d^2$$

$$a^2 + 15ad - 59$$

21103572 (U861692 M1300625)

a_1 + – целое $d>0$ z

$a_1 \quad a_1+d \quad a_1+2d \quad a_1+3d \quad a_1+4d$

$S_5 = 5a_1 + 10d$

$a_1 - ?$

$$\begin{cases}(a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1+10d+15\\(a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1+10d+39\end{cases}$$

$$\begin{cases}\overbrace{a^2+15ad}^{t}+50d^2 > \overbrace{5a+10d}^{5(a+2d)}+15\\a^2+15ad+56d^2 < 5a+10d+39\end{cases}$$

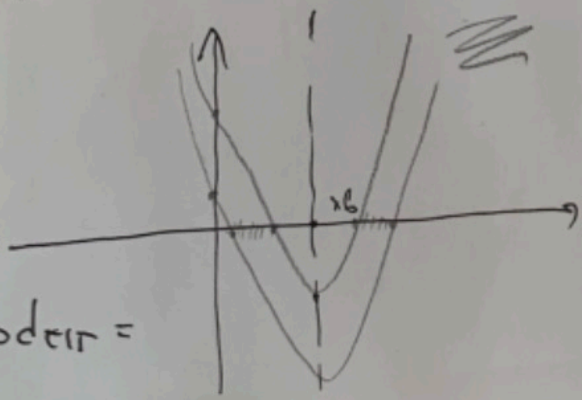
a^2 $-10{,}9 < a < -5{,}5\ldots$ $5(a+2d)$ -10 -3 -8 -6

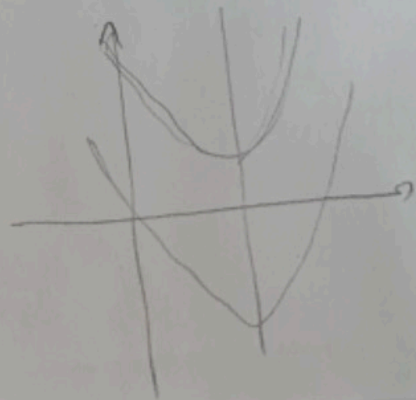
$$\begin{cases}t > 5a+10d+15-50d\\t < 5a+10d+39-56d\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+5(3d-1)a+50d^2-10d-15>0\\a^2+5(3d-1)a+56d^2-10d-39<0\end{cases}$$

$d>0$ целое

$$\begin{cases}x^2+5(3d-1)x+50d^2-10d-15>0\\x^2+5(3d-1)x+56d^2-10d-39<0\end{cases}$$





$-50d^2+10d+15=$

z ·

21103572 (U861692 M1300625)

$\underbrace{a^2+15ad+50d^2-5a-10d}_{t} > 15$

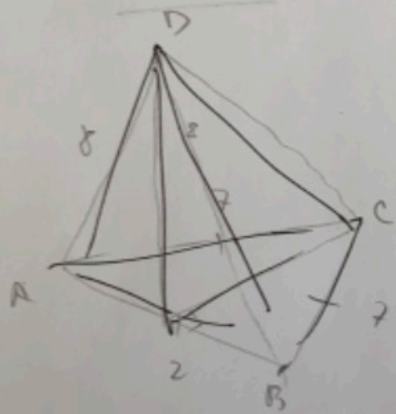
$\underbrace{a^2+15ad+50d^2-5a-10d}_{t} < 39-6d^2$

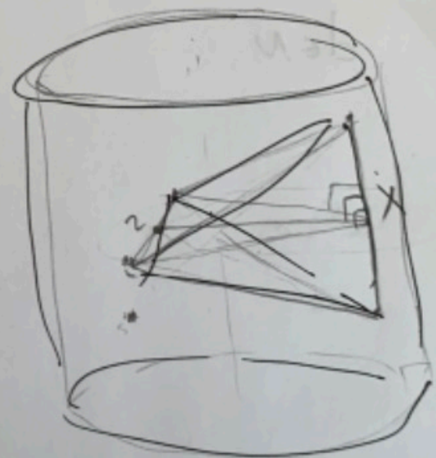
$a^2+10a-10+50+40 < 33$

$15 < t < 39-6d^2$

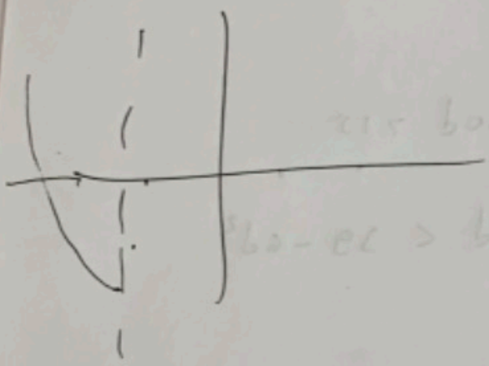
$d=1$

$d=2$ X





21103572 (U861692 M1300625)



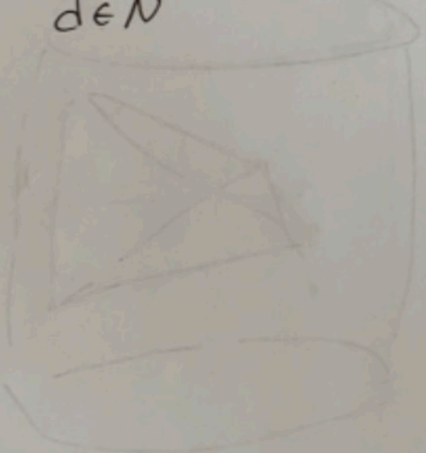
$\mathcal{D} = 25(3d-1)^2 - 200d^2 + 40d + 60$

$-56d^2$

$5a + 10d + 15 < a^2 + 15ad + 50d^2 < 5a + 10d + 39 - 6d^2$

$15 < a^2 + 15ad + 50d^2 - 5a - 10d < \underline{39 - 6d^2}$

$d \in N$



21103572 (U861692 M1300625)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103572**

ID профиля: **861692**

Вариант 20

№1 Инсговин

НОД $(a;b;c) = 10 = 2 \cdot 5$

НОК $(a;b;c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$

Поймем, что каждое число имеет вид $2^{k_i} 5^{m_i}$; k_i и $m_i \geq 1$

Тогда хотябы для одного числа степень 5 и 1

и для хотябы 1 степень 2 это 1 (чтобы (НОД) = 10)

и т.к НОК $= 2^{17} \cdot 5^{16}$, то хотябы 1 из чисел имеет

степень 5 16 и 2^{17} 17 (не обязательно в одном числе).

Т.е $\exists$:

$5 \cdot 2^{m'}$

$5^{16} \cdot 2^{k'}$

$5^{9} \cdot 2^{6}$

из понятно выше вариантов для a от 1 до 16 вар.

т.е $\underline{\underline{16}}$.

$2 \cdot 5^{8}$

$2^{17} \cdot 5^{9}$

$2^{6} \cdot 5^{n}$

аналогично для b от 1 до 17 17 вар.

(от 2 до 15)

1) $5 \quad 5^{16} \cdot 5^{2} \Rightarrow \underbrace{3^2 \cdot 3^2}_{} \cdot 14$ — кол-во вариантов когда все степени различны (для 5 и 2 соотв.)

$2 \quad 2^{17} \quad 2^{2}$ внутри пары кол-во вар.

...

2) $5 \quad 5 \quad 5^{16}$ ← повтр. но двойки все различ.

или $5 \cdot 5^{16} \cdot 5^{16} \Rightarrow 3 \cdot 3^2 \cdot 2$ — кол-во вар. с данными степенями 5 ор. и различ. двойками.

3) $2 \cdot 2 \cdot 2^{17}$ или $2 \quad 2^{17} \quad 2^{17}$ $= 3 \cdot 3^2 \cdot 2$ Аналогично 5 разные.

1

4) $\left(\begin{array}{l} 2 \cdot 2 \cdot 2^{17} \leftarrow \text{2 вар. ещё когда } 2 \text{ по } 17 \\ 5 \cdot 5 \cdot 5^{16} \leftarrow \text{2 вар (ещё когда } 2 \text{ по } 16) \end{array}\right.$

Числовые

те $3 \cdot 3 \cdot 4$ — когда не все разные степени и у 5 и у 2.

$81 \cdot 14 + 27 \cdot 2 + 27 \cdot 2 + 9 \cdot 4 =$

$= 1134 + 108 + 36 = 1278$ вариантов для $(a; b; c)$

Ответ. 1278

2

№2 Чистовик

$\lt$ ОДЗ:

] $2x-8=a>0 \neq 1$

$x-4=b>0 \neq 1$

$5x-26=c>0\neq 1$ $\boxed{x>\frac{26}{5} \quad x\neq\frac{27}{5}}$

Тогда $2\log_a b$; $\frac{1}{2}\log_b c$; $2\log_c a$ – числа.

① ② ③

1 Случай:

] ① = ②

Их произведение: $\log_a b \cdot \log_b c = \cancel{\frac{\log_a b}{\log}} \frac{\log_b c}{\log_b a} =$

$= \log_a c = \frac{1}{\log_c a}$

Те ~~таки~~ они равны, то 1 корни от исх. значен.

еще в каждом по 2 случая

1) $2\log_c a = \pm\sqrt{\frac{1}{\log_c a}} + 1$

] $t = \log_c a$

$2t - \frac{1}{\sqrt{t}} = 1$ ~~t≥0~~

ед. корни..

2) ~~$2t + \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 = 0$~~

~~$t>0$~~

3

2) ② = ③ Чистовик

Тогда аналогично

$$\frac{1}{2}\log_b c \cdot 2\log_c a = \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$\underbrace{2\log_a b^{>0} \pm\sqrt{\frac{1}{\log_a b}} + 1}_{>0} \qquad 2t - \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 = 0$$

ед. реш. ан.

т.к правая часть ≥ 1, то и $\log_a b \geq 1 \Rightarrow > 0$

аналогично с преды.

3) ① = ③

$$2\log_a b = 2\log_c a$$

от произ.: $4\log_a b \cdot \log_c a = 4\log_c b = \frac{4}{\log_b c} > 0$

$$\frac{1}{2}\log_b c = \pm\frac{2}{\sqrt{\log_b c}} + 1$$

$$t - \frac{4}{\sqrt{t}} - 1 = 0$$

ед. реш.

Чистовик

№2

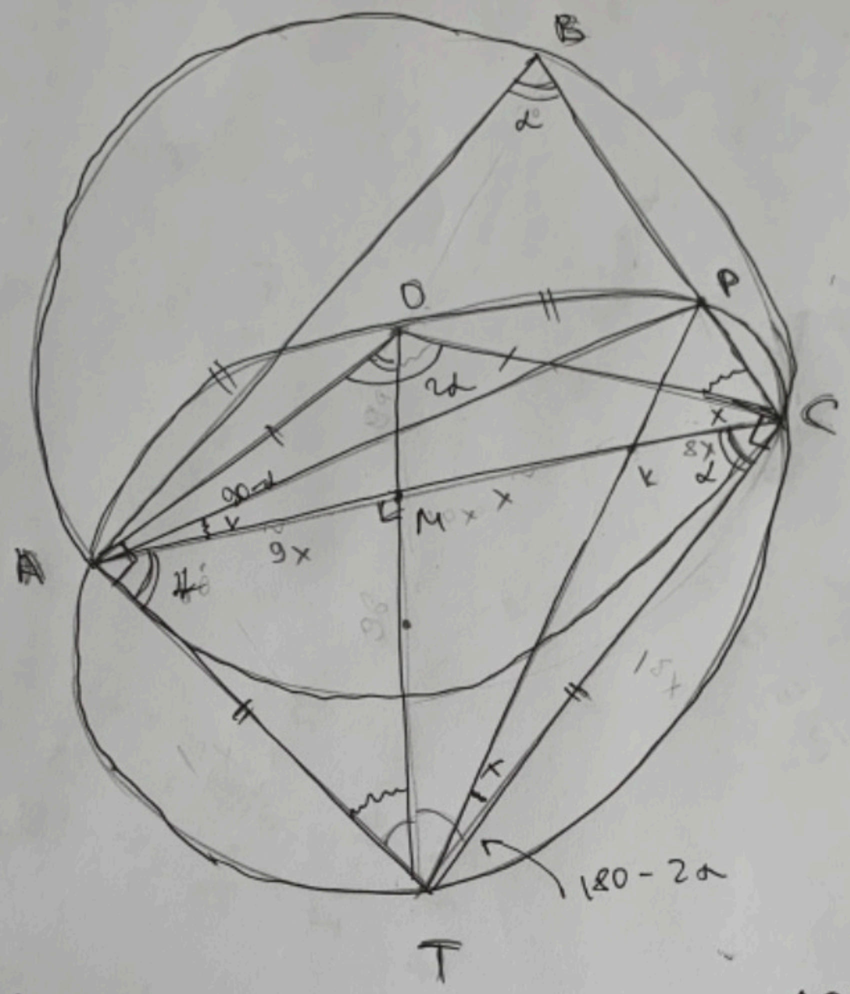
Чистовик

Далее для каждого случая находим t и решаем ур. вид. $\log_{f(x)} g(x) = t$

которое решим как $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \\ f(x) = g(x)^t \end{cases}$

21103572 (U861692 M1300626)

N3 Чистовик



Тк OA и CO ⊥ AT и CT (т.к.) касат., то AOCT описан.
=> T лежит на окр. AOC.

$\angle CBA = \angle CAT = \angle ACT$ (т.к. касательные)

Тк высоты у △APK и PKC к сторон AC равны (совпадают),
и их S 8 и 10 то $\frac{AK}{KC} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

OT - диаметр. тк на него опираются прямые углы. и тк
AO=OC и CT=AT, то AOCT - дельтоид. => AC ⊥ OT и тк центр.
на OT, то M середина AC => AM=9x MK=x, KC=8x

5

№2

3 ~~a~~ $2x+8=a>0$ $x>-4$

-16 $x-4=b>0$ $x>4$

$5x-26=c>0$ $x>\frac{26}{5}$

Тогда 1) случай первый равен второму:

$$2\log_a b=\frac{1}{2}\log_b c$$

$$\frac{\log_b b}{\log_b c}=\frac{1}{4}\quad 4=\log_b c\cdot\log_b a$$

$$4=\log_{x-4}(5x-26)\log_{x-4}(2x+8)$$

$\log_a b$

21103572 (U861692 M1300626)

$12 : [3;4]$

$6 \cdot 8 =$

$2 \cdot$

НОД (a b c) = 10

НОК (a; b; c) $= 2^{17} \cdot 5^{16}$

$a = 10p$ $\quad 5^{14} \cdot 2 \cdot p \quad 5 \cdot 2 \cdot q \quad 5 \cdot 2 \cdot a \quad 5^{14}$

$b = 10q$

$c = 10a$ $\quad 5 \cdot \quad 5 \cdot \quad 5 \cdot \quad 2^{16}$

15

2	2	2	1	1	14	7	1	15
2	2	2	1	2	13	1	2	14
2	2	2	1	3	12		3	13
2	2	2	1	4	11		4	12
2	2	2	1	5	10		5	11
			1	6	9		6	10
			1	7	8		7	9
							8	8

Кол-во разл. троек

$2 \cdot 5^{1} \quad 2 \cdot 5 \quad 2 \cdot 5^{14}$

1) $3 \cdot 3$

2) $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 =$

$2^1 5^1 \quad 2^1 5^1 \quad 2^{14} 5^{15}$

$2^1 5^{15} \quad 2^1 5^1 \quad 2^{14} 5^1$

$2^1 \quad 2^{15} \quad 2^{14}$

2 2 2

2 2 2

2 2 2

$\log_{\sqrt{2x-8}}$

$\cancel{\tfrac{1}{2}}\log_{2x-8}(x-4) = \cancel{2}\log_{5x-26}(2x-8)$

$\log_{(2x-8)}(x-4) \cdot \log_{(2x-8)}(5x-26) = 1$

>0

$x > \frac{26}{5} = 5\frac{1}{5}$

$5x - 26 > 1$

$x > \frac{27}{5}$

$\cancel{\log}$

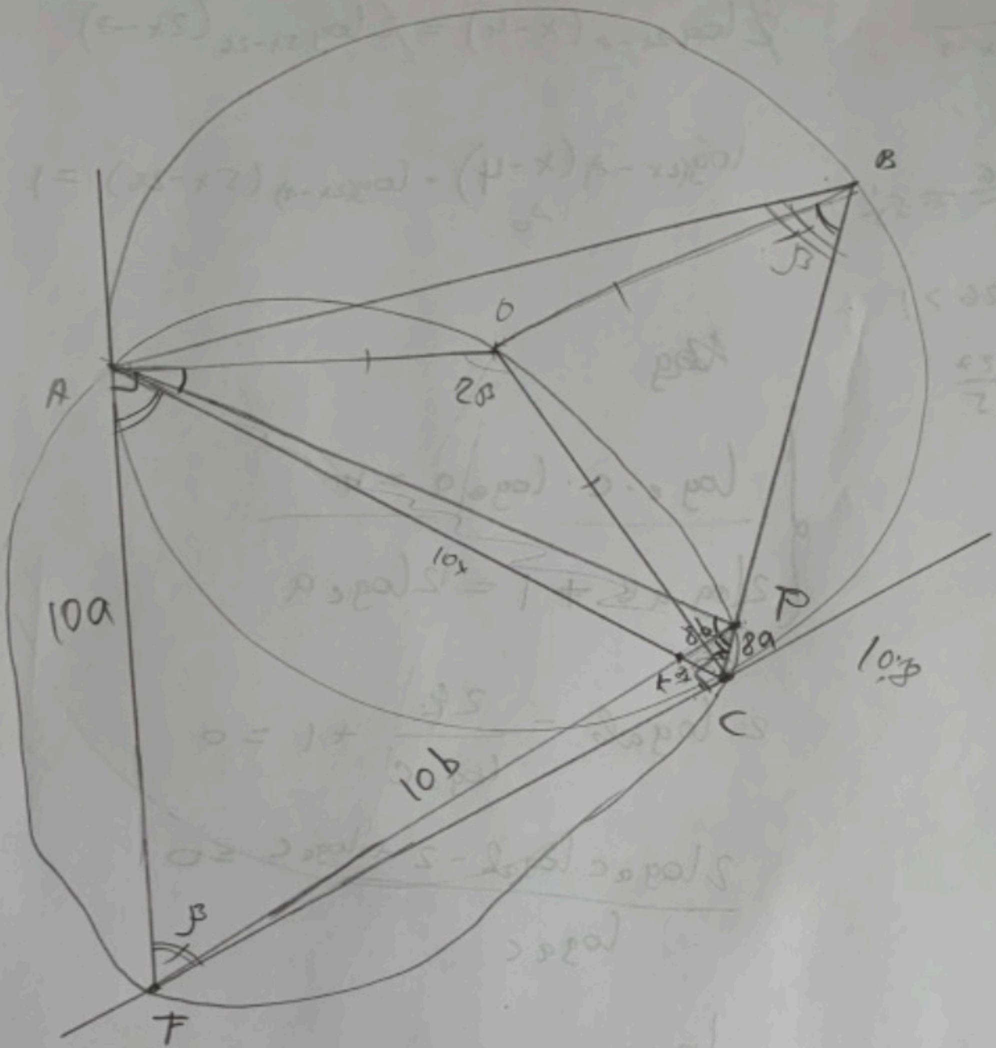
$$\begin{cases} \log_{c} c \cdot \log_{b} a = 4 \\ 2\log_{a} b + 1 = 2\log_{c} a \end{cases}$$

$2\log_a b - \frac{2}{\log_a c} + 1 = 0$

$\frac{2\log_a c \log_a b - 2 + \log_a c}{\log_a c} = 0$

$\log_a$

21103572 (U861692 M1300626)



21103572 (U861692 M1300626)

$5 \quad 5^{16} \quad 5^2$

a $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$

b $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

c $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

1) $a = b$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)}$

$2\log_a b$

$\frac{1}{2}\log_b c$ $\quad 2\log_a b = \frac{1}{2}\log_b c$

$2\log_c a$ $\quad 4\log_a b = \log_b c$

$\log \quad \frac{1}{\log_c b}$

$\frac{5}{72} < x$

$< 92 - x$

$\frac{5}{92}$

$8 - x \geq$

21103572 (U861692 M1300626)

$$\left.\begin{array}{l}\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) \\ \log_{(x-4)^2}(5x-26) \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)\end{array}\right)$$

$\log_{2x-8}(x-4) = \log_{5x-26}(2x-8)$

$\exists\ x-4=a \quad 5x-26=b$

$5x-26$

$x-4$

$5(x-4)+6$

$\log_{2a} a = \log_b 2a$

$$\frac{1}{\log_a 2+1} = \log_b 2 + \log_b a$$

$1 = \log_b$

$t = x-4$

$2\log_{2t} t = \log_{5t+6}(2t)$

$x<6$

$\underbrace{2\log_{2t} t \cdot \log_{2t}(5t+6)}_{\nearrow} = 1$

$t<2$

$t=2$

$\frac{3}{2}$

$\log_2 2 = 4.$

$\log_4 2 \cdot \log_4 16 = 1$

$1 \quad 2$

$\frac{1}{2}\log_t(5t+6) = 1 + 2\log_{2t} t$

$\frac{1}{2}$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(\underline{5x-26})$

$2\log_{2t} t = \frac{1}{2}\log_t(a)$

$\cancel{4} = \log_t a \log_t 2t$

$\frac{\log_2 a}{\log_2 t} \cdot \frac{\log_2 2t}{\log_2 t} =$

$4(\log_2 t)^2 = \log$

21103572 (U861692 M1300626)

$$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$$

$$\frac{\log_2(x-4)}{\log_2\sqrt{2x-8}} = \frac{\log_2(2x-8)}{\log_2\sqrt{5x-26}}$$

$$2\log_2(x-4)\log_2\sqrt{5x-26} = (\log_2(2x-8))^2$$

$$\cancel{1+\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)}$$

$$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$$

$$\frac{\log_2 5x-26}{\frac{1}{2}\log_2(x-4)^2} = \frac{\log_2(2x-8)}{\log_2\sqrt{5x-26}}$$

$$(\log_2 5x-26)^2 = 2\log_2(x-4)\log_2(2x-8)$$

$$2(\log_2(x-4))^2 + \log_2(x-4)$$

572 (U861692 M1300626)