Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103524**

ID профиля: **824254**

Вариант 20

Чистовик

№1

Дано: $S=\sum_{n=1}^{5} a_n$, $a_n\in\mathbb{Z}$, $a_6a_{11}>S+15$, $a_8a_9<S+39$, $a_k<a_{k+1}$

Найти: Возможные значения a_1

Решение:

$a_6a_{11}-15>S>a_8a_9-39$

$a_n=a_1+(n-1)d$

$S=\frac{a_1+a_5}{2}\cdot5=\frac{a_1+a_1+4d}{2}\cdot5=(a_1+2d)\cdot5$

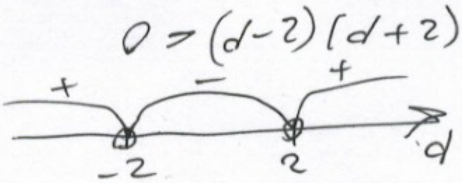
$a_6a_{11}=(a_1+5d)(a_1+10d)=a_1^2+5a_1d+10a_1d+50d^2$

$a_8a_9=(a_1+7d)(a_1+8d)=a_1^2+15a_1d+56d^2$

$$\begin{cases} a_1^2+15a_1d+50d^2>5a_1+10d+15 \\ a_1^2+15a_1d+56d^2<5a_1+10d+39 \end{cases}$$

$\cancel{a_1^2}+\cancel{15a_1d}+50d^2-15>\cancel{a_1^2}+\cancel{15a_1d}+56d^2-39$

$24>6d^2$ $\quad 4>d^2$ $\quad 0>(d-2)(d+2)$



$d\in(-2;2)$, но $d\in\mathbb{Z}$ и $d>0$, т.к. прогрессия возрастающая, то $d=1$, тогда

$$\begin{cases} a_1^2+15a_1+50>5a_1+10+15 \\ a_1^2+15a_1+56<5a_1+49 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0 \\ a_1^2+10a_1+7>0 \end{cases}$$

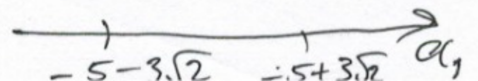
$a_1^2+10a_1+25=0$

$a_1=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\cdot25}}{2}=\frac{-10\pm0}{2}=-5$

$a_1^2+10a_1+7=0$

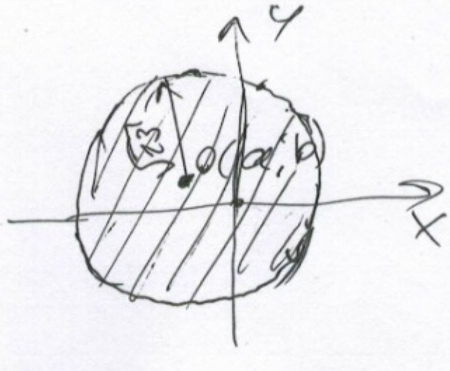
$a_1=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\cdot7}}{2}=-5\pm\sqrt{25-7}=-5\pm\sqrt{18}=-5\pm3\sqrt2$

$$\begin{cases} (a_1+5)^2>0 \\ (a_1+5+3\sqrt2)(a_1+5-3\sqrt2)>0 \end{cases}$$



№13

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b;13)\end{cases}$$

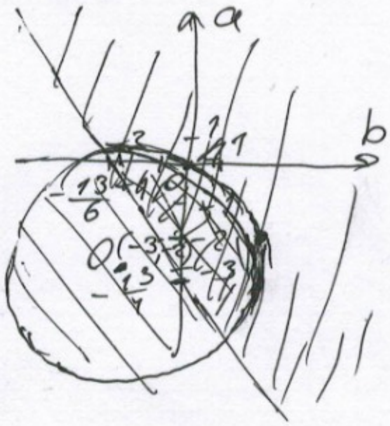


$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-4a-6b\le 13\\ a^2+b^2\le -4a-6b\end{cases}\\ \begin{cases}-4a-6b\ge 13\\ a^2+b^2\ge 13\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-4a-6b\le 13\\ (a+2)^2+(b+3)^2\le 13\end{cases} \quad (1)\\ \begin{cases}-4a-6b\ge 13 \quad (2)\\ a^2+b^2\le 13\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}$$

(1) $-4a\le 13+6b$

$a\ge -\frac{13}{4}-\frac{6b}{4}$



$O(-3;-2)$ $r=\sqrt{13}$

$A(0;0)$ $OA=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$, то $A\in$ окр$(O;r)$

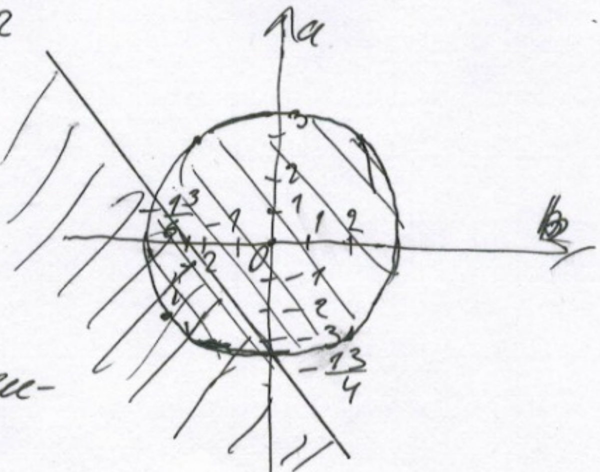
(2)

$a\le -\frac{13}{4}-\frac{6b}{4}$

$a^2+b^2\le 13$ $r=\sqrt{13}$ $O(0;0)$

Множество решений неравенства $a^2+b^2\le \min(-4a-6b;13)$ являются две зоны с перекрёстными штриховками, которые можно видеть на рисунках 1 и 2 ~~два полукруга~~

M – ~~круг~~ с радиусами $\sqrt{13}+\sqrt{13}$ и $\sqrt{13}+\sqrt{a^2+b^2}$, при $\sqrt{a^2+b^2}$ максимальном. ~~При $\sqrt{a^2+b^2}$~~



Черновик

$-4a-6b \le 13$

$\cancel{a_1}^2 + \cancel{15a_1d} + 50d^2 - 15 > \cancel{a_1}^2 + \cancel{15a_1d} + 56d^2 - 39$

$24 > 6d^2$

$d^2 < 4$

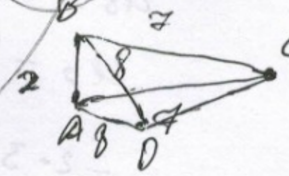
$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} =$

$= \frac{(a-b)^2}{2\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}\right)} \ge 0$

$5a$

$a^2+b^2 \ge 2ab$

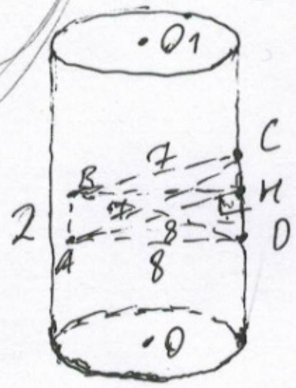
$a^2-5a-15$



$a^2 > 5a+15$

$a^2 = 5a+30$

$5a -$



$\sqrt{4 \cdot 8 - 1} + \sqrt{63 - 1} =$

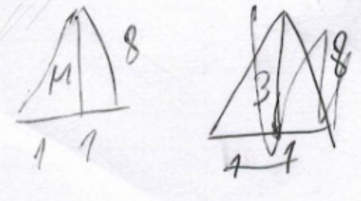
$= \sqrt{47} + \sqrt{62}$

$\frac{8}{\sin\angle ACD} = \frac{7}{\sin\angle ADC}$

$CD = OO_1$

$H = \sqrt{64-1} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$

~~$CD = 7+8$~~



$H = \sqrt{48} =$

$= 4\sqrt{3}$

$CD \to 4\sqrt{3} + 3\sqrt{7}$ или $CD \to$

$\to 3\sqrt{7} - 4\sqrt{3}$

$2R = \frac{2}{\sin\alpha}$

$R = \frac{1}{\sin\alpha}$

Черновик

$S = \frac{-7+4\cdot 1+(-7)}{2}\cdot 5 =$

$= (-7+2)\cdot 5 = -5^2 = -25$

~~an=~~

$a_1 = -7$

$a_6 = -7+5 = -2$

$a_{11} = -7+10 = 3$

$a_8 = -7+7 = 0$

$a_9 = -7+8 = 1$

-21

$-2\cdot 3-15 > -25 > -39$

$a^2+4a+4-4+b^2+6b+9-9 \le 0$

$(a+2)^2+(b+3)^2-13=0$

$b = -\frac{13}{6}$

$4+9$

Чистовик

$$\begin{cases} a_1 \neq -5 \\ -5-3\sqrt{2} < a_1 < -5+3\sqrt{2} \end{cases}$$

$16 < 18 < 25$

$4 < 3\sqrt{2} < 5 \quad | -5$

~~$-1 < 3\sqrt{2}-5 < 0$~~

$-1 < 3\sqrt{2}-5 < 0$

$-5 < -3\sqrt{2} < -4 \quad | -5$

$-10 < -5-3\sqrt{2} < -9$

~~$a_1 \neq -5$~~

~~$-9 < a_1 < -1$~~

$a \neq -5$

$-10 < a_1 < 0$

$a_1 \in \mathbb{Z}$, то

$a_1 = \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$

~~Відповідь: $a_1 = \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$.~~

Но $a_1 \neq -5$, то $a_1 = \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Відповідь: $a_1 = \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

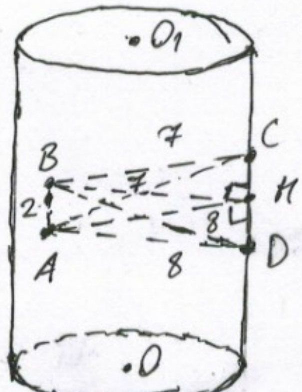
21103524 (U824254 M1299897)

Чистовик № 12

Дано: $ABCD$ — тетраэдр, $AB=2$, $AC=CB=7$, $AD=DB=8$, O, O_1 — центры окружностей, лежащих в основании цилиндра, описанного около $ABCD$, $CD \parallel OO_1$, A, B, C, D лежат на боковой поверхности цилиндра.

Найти: $CD=?$ при минимально возможном радиусе цилиндра.

Решение:

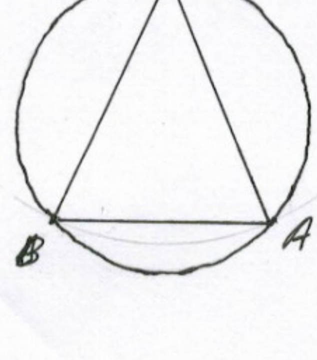


1) $CD \parallel OO_1$, то каждая точка отрезка CD равноудалена от прямой OO_1. Поскольку C и D удалены от OO_1 на расстояние радиуса цилиндра, то все остальные точки CD удалены также на расстояние радиуса от OO_1, а значит лежат на боковой поверхности цилиндра. Значит CD лежит на боковой поверхности цилиндра

2) $CA=BC=7$, $AD=BD=8$, CD — общая, то $\triangle ADC = \triangle BCD$

3) Пусть AH — высота $\triangle ACD$, BH_1 — высота $\triangle BCD$, т.к. $\triangle ADC = \triangle BCD$, то $CH=CH_1$, то точки H и H_1 совпадают.

4) $CD \perp BH$ и $CD \perp AH$, то $CD \perp (BAH)$ (плоскость), то $OO_1 \perp (BAH)$, то $\triangle BAH$ вписан в окружность с радиусом равным радиусу цилиндра.



5) По теореме синусов

$$\frac{BA}{\sin\angle BHA} = 2r$$

$BA=2$

$$\frac{1}{\sin\angle BHA} = r$$

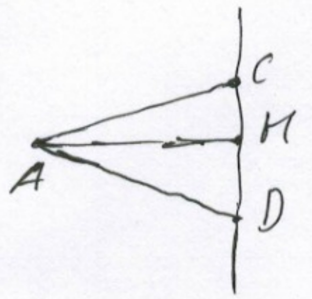
r наименьший, при $\sin\angle BHA$ наибольшем, то $\angle BHA = 90°$, т.к. $\sin 90° = 1$

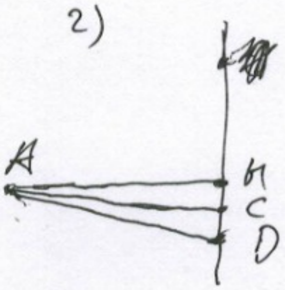
6) Если $\angle BHA = 90°$, то BA — диаметр окружности и

$BA^2 = AH^2 + BH^2 = 2AH^2$ $\quad AH = \frac{BA}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = BH$ (т.к. $\triangle ACD = \triangle BCD$)

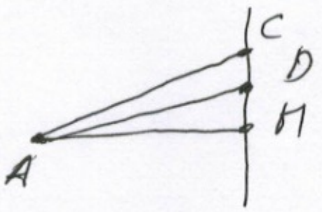
Чистовик

7) Существует 2 варианта взаимного расположения точек C, H, D:

1) 

2) 

Точка D не может лежать между точками C и H, т.к. тогда $\angle ACD \Rightarrow \angle ADC = 90^\circ + \angle DAH$, но



$\angle ACH + \angle CHA + \angle CAH =$
$= 180^\circ + \angle DAH + \angle CAH > 180^\circ$, что невозможно

8) 1 случай $\cancel{CH = AC^2 - AH^2}$ $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} =$
$= \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$ $\quad HD = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{64-2} = \sqrt{62}$

$CD = CH + HD = \sqrt{47} + \sqrt{62}$

2 случай $\cancel{CD = CH - DH}$ $CD = HD - CH = \sqrt{62} - \sqrt{47}$

Ответ: $CD = \sqrt{47} + \sqrt{62}$, $CD = \sqrt{62} - \sqrt{47}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103524**

ID профиля: **824254**

Вариант 20

Черновик

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 \quad (1) \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \quad (2) \end{cases}$$

Из уравнения (2) числа a, b и c можно представить так $a=2^{a_1}\cdot 5^{a_2}$ $b=2^{a_3}\cdot 5^{a_4}$ $c=2^{a_5}\cdot 5^{a_6}$, где

$$\begin{cases} a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathbb{Z} \text{ и неотрицательные} \\ \max(a_1;a_3;a_5)=17 \\ \max(a_2;a_4;a_6)=16 \end{cases}$$

так как, если $\max(a_1;a_3;a_5)=t>17$, или $\max(a_2;a_4;a_6)=p>16$, то

$$\frac{НОК(a;b;c)}{a}=\frac{2^{17}\cdot 5^{16}}{2^{a_1}\cdot 5^{a_2}}=2^{17-a_1}\cdot 5^{16-a_2} \notin \mathbb{Z} \quad (a_2=p)$$

а если $t<17$ или $p<16$ то

$$НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{p} \neq 2^{17}\cdot 5^{16} \text{ (при } a_2=p)$$

Из уравнения (1) следует, что

$$\begin{cases} \min(a_1;a_3;a_5)=1 \\ \min(a_2;a_4;a_6)=1 \end{cases}$$

В итоге, получается, что

$$\begin{cases} \max(a_1;a_3;a_5)=17 \\ \min(a_1;a_3;a_5)=1 \\ \max(a_2;a_4;a_6)=16 \\ \min(a_2;a_4;a_6)=1 \end{cases}$$

То есть для a_1, a_3, a_5 верно:

$$\left[\begin{array}{lll} a_1=17 & a_3=1 & a_5\in[2;16] \\ a_1=17 & a_3=1 & a_5=17 \\ a_1=17 & a_3=1 & a_5=1 \end{array}\right.$$

или любые другие их комбинации

21103524 (U824254 M1299898)

Чистовик

Комбинаций чисел $a_1; a_3; a_5$ всего 6 (при условии, что числа разные)

$a_1 \ a_3 \ a_5$

$a_1 \ a_5 \ a_3$

$a_3 \ a_5 \ a_1$

$a_3 \ a_1 \ a_5$

$a_5 \ a_1 \ a_3$

$a_5 \ a_3 \ a_1$

При чём в каждой комбинации прячется ещё 15 комбинаций, т.к. $a_5 \in [2;16]$

Если $a_1 = a_5$, то 3 комбинации

17 1 17

17 17 1

1 17 17

Аналогично для $a_5 = a_3$

1; 1; 17

1; 17; 1

17; 1; 1

Значит всего комбинаций $a_1; a_3, a_5$ $n_1 = 15 \cdot 6 + 6 = 16 \cdot 6 = 96$

Аналогичные рассуждения можно провести для $a_2; a_4; a_6$, то $n_2 = 14 \cdot 6 + 6 = 15 \cdot 6 = 90$, т.к. ~~$a_6 \in [2;15]$~~ $a_6 \in [2;15]$

$N = n_1 \cdot n_2 = 96 \cdot 90 = 8640$

Ответ: $N = 8640$.

21103524 (U824254 M1299898)

Чистовик 15

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4),\ \log_{(x-4)^2}(5x-26),\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$$\left[\begin{array}{l} \log_{\sqrt{2x-8}}(\cancel{x}-4)=\log_{(x-4)^2}(5x-26)=\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)+1 \\ \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=\log_{(x-4)^2}(5x-26)+1 \\ \log_{(x-4)^2}(5x-26)=\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)+1 \end{array}\right.$$

Поскольку ~~т~~ аргумент функции логарифма всегда >0, то

$$\begin{cases} x-4>0 \\ 5x-26>0 \\ (1) \\ \left[\begin{array}{l} 2\log_{2(x-4)} x-4=\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)=2\log_{5x-26}(2x-8)+1 \\ 2\log_{2x-8} x-4=2\log_{5x-26}(2x-8)=\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)+1 \\ \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)=2\log_{5x-26}(2x-8)=2\log_{2x-8}(x-4)+1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$\cancel{2\log_2(x-4)+}\ 2\log_{2(x-4)}(x-4)=\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$

$\dfrac{2}{\log_{x-4}(2(x-4))}=\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$

$2(x-4)\neq 1 \qquad x\neq \frac{1}{2}+4=\frac{9}{2}$

$\cancel{\dfrac{2\cdot 2}{\log_{x-4}2+1}=\log_{x-4}(5x-26)}$

$\cancel{4=\log_{x-4}(5x-24)+\log_{x-4}}$

$\cancel{4=\log_{x-4}((5x-26)\cdot 2(x-4))}$

$4=\log_{x-4}(5x-26)$

21103524 (U824254 M1299898)

3

Числовик

921 $4\log_{2(x-4)}(x-4) = \log_{x-4}(5x-26)$

$5x-26=(x-4)^{4\log_{2(x-4)}x-4}$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=a$

$\sqrt{2x-8}^{\,a}=x-4$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)=a$

$(x-4)^{2a}=5x-26$

~~$\log_{\sqrt{5x-26}}$~~

$\sqrt{5x-26}^{\,a+1}=2x-8$

$\log_{\sqrt{5x-26}}2x-8=a+1$

$(x-4)^{2a\cdot\frac{1}{2}(a+1)}=2x-8$

$x-4^{a(a+1)}=2x-8$

$x-4^{a(a+1)}=2(x-4)$

$a(a+1)=\log_{x-4}(2(x-4))$

$\log_{x-4}\cancel{+}1=a(a+1)$

$\log_{x-4}2=a(a+1)-1$

~~$x-4=2^{a(a+1)-1}$~~

$2=(x-4)^{a^2+a-1}$

$x=4+2^{-a^2-a+1}$

черновик

$4 = \log_{x-4}(5x-26) \cdot \log_{x-4}(2(x-4))$

~~№4~~ Два числа точно будут равны, при

$$\begin{cases} \sqrt{2x-8} = (x-4)^2 \\ x-4 = 5x-26 \end{cases}$$

$4x = 22$

$x = \frac{11}{2}$

$\sqrt{\frac{11}{2} \cdot 2 - 8} = \left(\frac{11}{2} - 4\right)^2$ неверно.

Черновик

$\log_2 8 = 3$

$\log_4 8 = \frac{3}{2}$

$\log_2(2\cdot 3) =$

$\log_{2\cdot 3}$

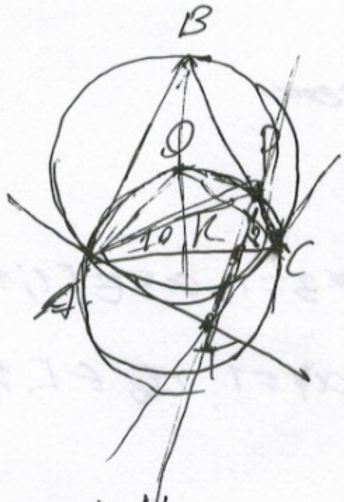
$\log_{ab} n = \frac{1}{\log_n ab} = \frac{1}{\log_n a + \log_n b}$

$\log_{kc} k = a$

$(kc)^a = k$

$\angle APB = \angle ATC$

$AT = TC$



$\log_2(2\cdot 3) =$

$\cancel{=10}$

$\log_2 10 = 3$

$\log_{2\cdot 3} 2 = k$

$\log_2(x-4)$

$(2\cdot 3)^k = 2$

$\cancel{\log_3 2}$

$2^k \cdot 3^k = 2$

$k = \log_3 \frac{2}{2^k} =$

$= \log_3 2^{1-k} =$

$= (1-k)\log_3 2$

$\log_{ab} n$

$k(1+\log_3 2) = 1$

$\log_{2\cdot 3} 2 = \frac{1}{1+\log_3 2}$

$\log_a n - \log_b n$

$\log_{2\cdot 3} 8 = 3\log_6 2 = 3\log_2 2 + 3\log_3 2$

$\frac{AC}{AB} = \frac{TC}{AP}$

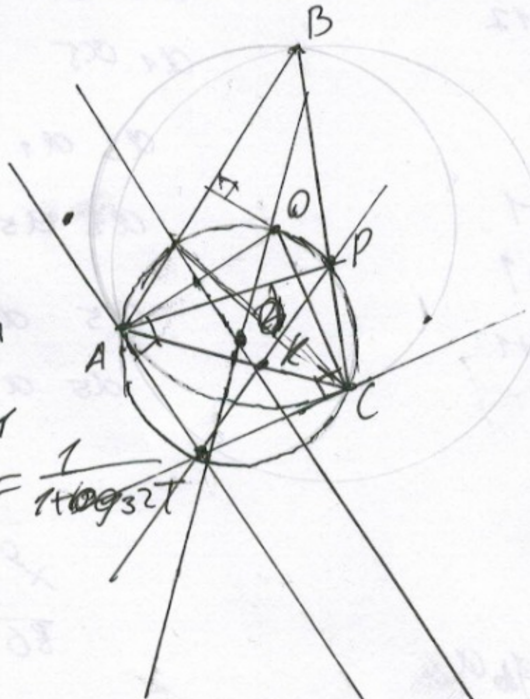
$3\log_6 6 : 2 =$

$= 3\log_6 6 - 3\log_6 2 =$

$= 3 - 3$

$\angle PAC = \angle PCA =$

$= \angle APB$



$\log_k k + \log_k c = a$

$\log_n ab = \log_n a + \log_n b$

$ab = n^{\log_n a} \cdot n^{\log_n b} = ab$

$\log_{ab} n = p$

$\cancel{n = p^{ab}}$

$n = (ab)^p$

21103524 (U824254 M1299898)

$\cancel{ab^{\log_a n}}$

$\log_k kc = a$

$\cancel{\log\ kc = a^k}$

$kc = k^a$

$c = k(k^{a-1} - 1)$

$a - 1 = \log_k \frac{c+1}{k} =$

$\frac{c+1}{k} = k^{a-1}$

$= \log_k (c+1$

Черновик

$НОД(a; b; c) = 10$

$НОК(a; b; c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$

Среди делителей есть

$a_1 = 17 \quad a_3 = 1 \quad a_5 \in [1; 17]$

$a_2 = 16 \quad a_4 = 1 \quad a_6 \in [1; 16]$

17 1 1

17 17 1

1 1 17

$$\begin{cases} a = b = c+1 \\ a = c = b+1 \\ b = c = a+1 \end{cases}$$

$a^{\log_b a}$

$\times\begin{array}{r}15\\6\\\hline 90\end{array}$ $\quad \times\begin{array}{r}14\\6\\\hline 84\\+3\\\hline 87\end{array}$

83

2 16

$a_1 \; a_3 \; a_5$

~~$a_3 \; a_1 \; a_5$~~

$a_1 \; a_5 \; a_3$

$a_3 \; a_1 \; a_5$

$a_3 \; a_5 \; a_1$

$a_5 \; a_1 \; a_3$

$a_5 \; a_3 \; a_1$

$\times\begin{array}{r}96\\90\\\hline 8640\end{array}$

21103524 (U824254 M1299898)