Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

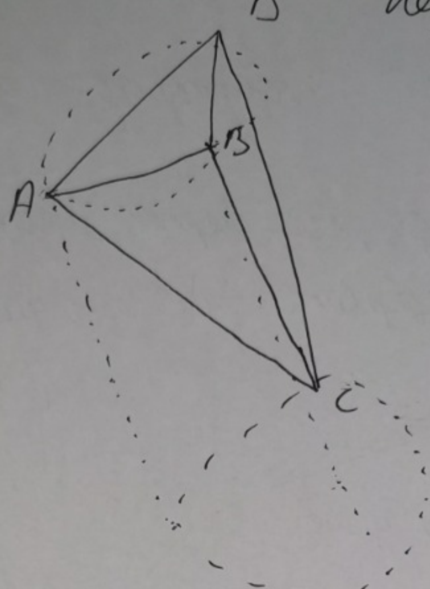
Шифр: **21103493**

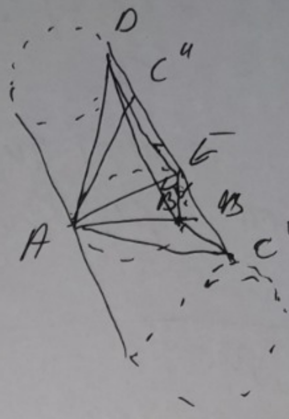
ID профиля: **159280**

Вариант 20

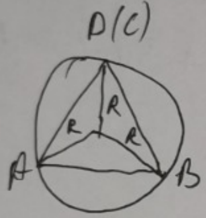
№2. Черновик.

AB = 2
AC = BC = 7
AD = DB = 8.





Рассмотрим вид со стороны ABD.



Наименьший радиус цилиндра будет если AB - диаметр. $\Rightarrow AB = 2R$

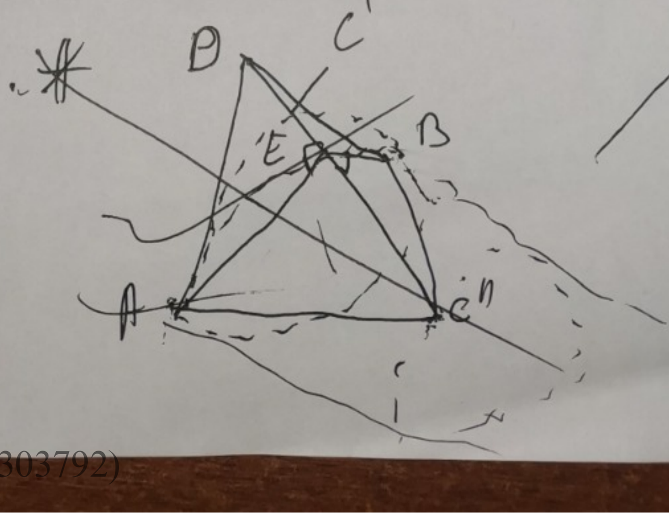
*E - проекция C и плоскость D на сечение цилиндра содержащую AB. Т.к. AB - диаметр, то $\triangle ADE \sim \triangle BDE$ (по катету и гипотенузе), то $AE = BE = \frac{AB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$DE = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{64-8} = \sqrt{58}$

Аналог. $CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$

Возможны 2 варианта расположения точки C: C' и C'' на рисунке. Тогда $CD = ED \pm EC$

$CD = \sqrt{58} \pm \sqrt{41}$



21103493 (U159280 M1303792)

Черновик.

№3.

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$ - окружность с центром в точк. $(a;b)$ и $R=\sqrt{13}$.

$a^2+b^2 \le \min(-4a; -6b, 13)$ - ~~окружн.~~ место располож. центра окружн. ограничено кругом $R=\sqrt{13}$ и условием $a^2+b^2 \le -4a-6b=13$

$a^2+b^2=13=-4a-6b$

$\left(\frac{13+4a}{6}\right)^2+a^2=13$

$169+16a^2+52a+36a^2=$
$=13\cdot 36$

$52a^2+52a+13(13-36)=0$

$3a^2+3a-23=0$

№1.

$S=5a_1+10d$ $(d>0;$ целое$)$

~~$a_8 a_9$~~

$\begin{cases}(a_1+7d)(a_1+8d)<5a+10d+39\\(a_1+5d)(a_1+10d)>5a_1+10d+15\end{cases}$

$\begin{cases}a_1^2+15a_1d+56d^2<5a+10d+39\\a_1^2+15a_1d+50d^2>5a_1+10d+15\end{cases}$

~~$a_1^2+15a_1d-5a_1-10d<39$~~

$\begin{cases}a_1^2+15a_1d-5a_1-10d<39-56d^2\\a_1^2+15a_1d-5a_1-10d>15-50d^2\end{cases}$

$15-50d^2<39-56d^2$

$6d^2<24$

$d^2<4$

~~$d=\pm 1$~~ $d=1$

21103493 (U159280 M1303792)

Чистовик (3) Черновик.

№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13\\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;\ 13)\end{cases}$$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$ - окружность с центром в точке $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{13}$.

$a^2+b^2 \le \min(-4a;\ -6b;\ 13)$ - место расположения центра ограничено кругом $R=\sqrt{13}$ и условием: $a^2+b^2 \le -4a-6b \le 13$

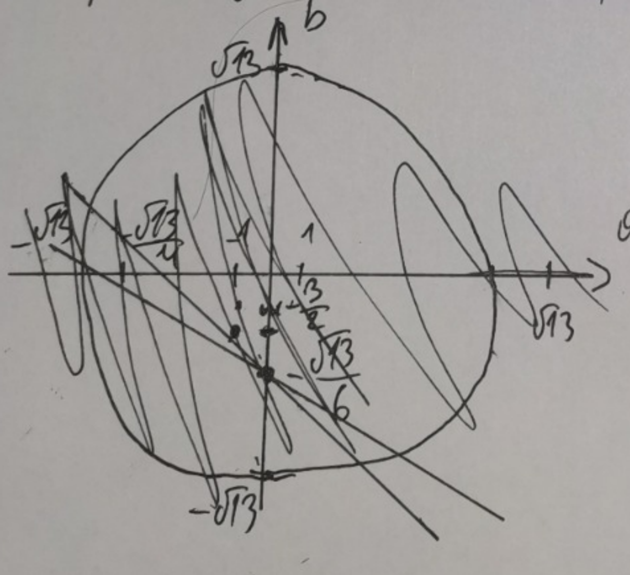
$a^2+b^2+4a+6b \le 0$, $a^2+b^2 \le 13$ - круг

$-4a-6b \le 13$

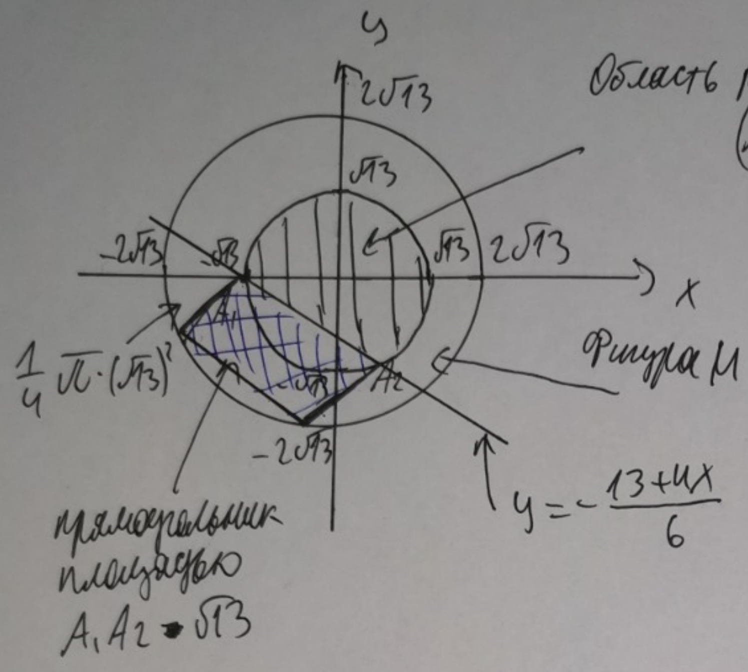
$b \le -\dfrac{13+4a}{6}$

Эта прямая делит плоскость $(a;b)$ на 2 части.

a	0	-1		
b	$-\frac{13}{6}$	$-\frac{3}{2}$		



Шитовик (4).
Продолжение №3.



$$A_1\left(\frac{-3-\sqrt{285}}{6};\ -\frac{11}{6}+\frac{1}{9}\sqrt{285}\right)$$

$$A_2\left(\frac{-3+\sqrt{285}}{6};\ -\frac{11}{6}-\frac{1}{9}\sqrt{285}\right)$$

$$(A_1A_2)=\left(\frac{2}{6}\sqrt{285};\ \frac{2}{9}\sqrt{285}\right)$$

$$A_1A_2=\sqrt{285}\left(\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{81}}\right)=\sqrt{285}\cdot\sqrt{\frac{40}{81}}=\frac{\sqrt{285}\cdot 2}{9}\cdot\sqrt{10}$$

21103493 (U159280 M1303792)

Чистовик 3

№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \text{ – окружность с центром в } \sout{\text{точках}} \text{ точке } (a;b) \text{ и радиусом } \sqrt{13}. \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13) \text{ – место расположения центра, ограниченного} \\ \text{кругом } R=\sqrt{13} \text{ и условием: } a^2+b^2 \le -4a-6b \le 13\end{cases}$$

$a^2+4a+b^2+6b \le 0$ Найдем ГМТ центра окружности: ~~Иа~~

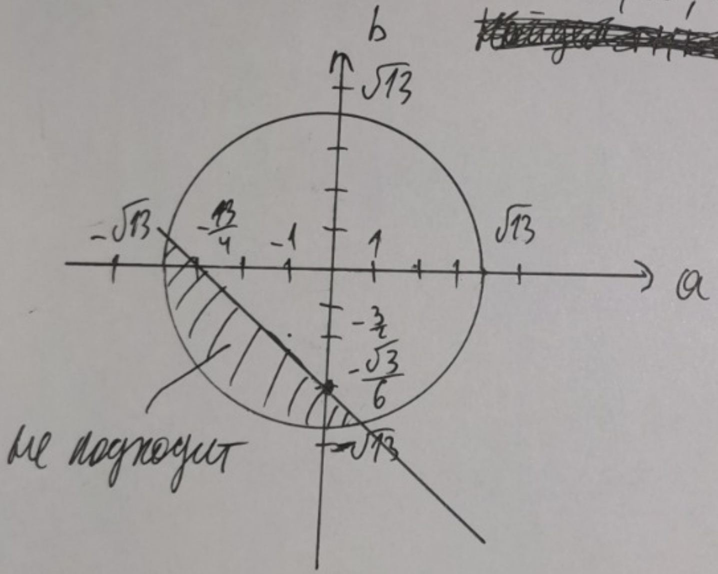
$a^2+b^2 \le 13$ – круг

$-4a-6b \le 13$

$b \ge -\frac{13+4a}{6}$

Эта прямая делит плоскость $(a;b)$ на 2 части.

a	0	-1	$-\frac{13}{4}$
b	$-\frac{13}{6}$	$-\frac{3}{2}$	0



Найдем точки пересечения прямой и окружности

$a^2+b^2=13=-4a-6b$

$\left(\frac{13+4a}{6}\right)^2+a^2=13$

$169+16a^2+52a+36a^2=13\cdot 36$

$52a^2+52a+13\cdot(13-36)=0$

$3a^2+3a-23=0$

$D=285$

$a_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{285}}{6}$

$b=-\left(\frac{13}{6}+\frac{4}{6}\cdot\left(-\frac{3}{6}\right)+\frac{4}{36}\sqrt{285}\right)$

$b_{1,2}=-\left(\frac{13}{6}-\frac{2}{6}\pm\frac{1}{9}\sqrt{285}\right)=$

$=-\frac{11}{6}\pm\frac{1}{9}\sqrt{285}$

21103493 (U159280 M1303792)

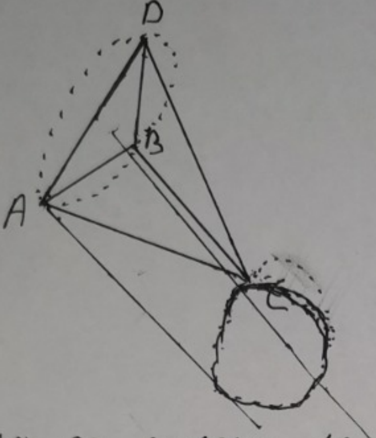
Чистовик 1

№2.

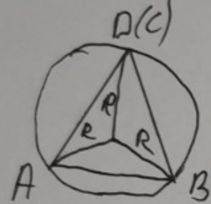
$AB=2$

$AC=BC=7$

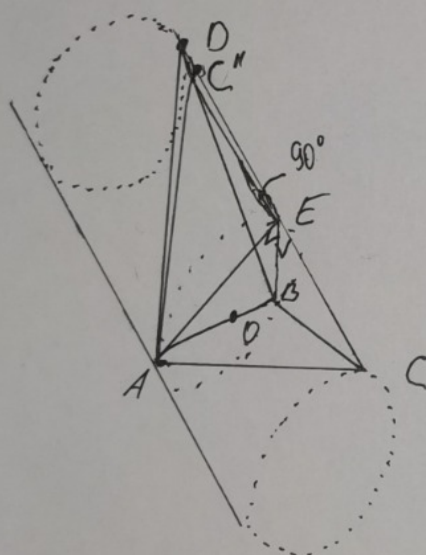
$AD=DB=8$



Рассмотрим вид со стороны ABD:



Наименьший радиус цилиндра будет если AB - диаметр $\Rightarrow AB=2R$



E - проекция CD на плоскость сечения цилиндра, содержащую AB.

Т.к. AB - диаметр, то $\angle AEB=90°$

Т.к. $\triangle ADE=\triangle BDE$ (по катету и гипотенузе),

то $AE=BE=\frac{AB}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}$

$DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=\sqrt{64-8}=\sqrt{56}$

Аналогично $CE=\sqrt{AC^2-AE^2}=\sqrt{49-8}=\sqrt{41}$

Возможны 2 варианта расположения точки C: C' и C'' на рисунке. Тогда $CD=ED\pm EC$

$\boxed{CD=\sqrt{56}\pm\sqrt{41}.}$ - ответ.

№1. Чистовик 2

$S = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = 5a_1+d+2d+3d+4d = 5(a_1+2d) \Rightarrow d$ - целое и больше 0

$$\begin{cases} a_8 \cdot a_9 < S+39 \\ a_6 \cdot a_{11} > S+15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+7d)(a_1+8d) < 5a+10d+39 \\ (a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1+10d+15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+15a_1d-5a_1-10d < 39-56d^2 \\ a_1^2+15a_1d-5a_1-10d > 15-50d^2 \end{cases}$$

$$15-50d^2 < 39-56d^2$$

$$6d^2 < 39-56d^2$$

$$6d^2 < 24$$

$$d^2 < 4$$

$$d = 1$$

$$\begin{cases} a_1^2+10a_1 < -7 \\ a_1^2+10a_1 > -25 \end{cases}$$

$$a_1^2+10a_1+7 < 0$$

$$D = 72$$

$$a_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{72}}{2} = -5 \pm \sqrt{18}$$

$a_1 \in (-5-\sqrt{18}; -5+\sqrt{18})$

$$\begin{cases} -5-\sqrt{18} < a_1 < -5+\sqrt{18} \\ a_1 \neq -5 \end{cases}$$

a_1 может быть от $-5-4=-9$ до $-5+4=-1$

Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$

21103493 (U159280 M1303792)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103493**

ID профиля: **159280**

Вариант 20

Чистовик. ②

Продолжение №5

Тогда $b=1$; $c=2$

$$\frac{2}{1+\log_{(x-4)}2}=1$$

$$1+\log_{(x-4)}2=2$$

$$x-4=2$$

$x=6$ - входит в ОДЗ

Проверка:

$a=\log_{\sqrt{4}}2=1$

$b=\log_4 4=1$

$c=\log_2 4=2$

Верно!

II Пусть $a=c$. Тогда $b=a+1$

$a^3+a^2=2$

Аналогично пункту (I) $a=1$; $b=2$; $c=1$

III Пусть $b=c$. Тогда $a=b+1$

$b^3-b^2-2=0$

$b=1$; $c=1$; $a=2$

$b=1 \Rightarrow \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)=1$

$\log_{(x-4)}(5x-26)=2$

$5x-26=x^2-8x+16$

$x^2-13x+42=0$

$D=1$

$x_{1,2}=\frac{13\pm1}{2}=6;7.$ ($x=6$ подходит, это уже доказано)

При $x=7$:

$a=\log_{\sqrt{6}}3\neq2 \Rightarrow$ неверно!!!

Ответ: $x=6$

21103493 (U159280 M1303793)

Чистовик ①

№5.

$a = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$

$b = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$c = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

Два числа равны, а третье больше их на 1.

$$(*):\begin{cases}\sqrt{2x-8} \neq 1\\ 2x-8>0\\ (x-4)^2 \neq 1\\ 5x-26>0\\ \sqrt{5x-26} \neq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 4{,}5\\ x>4\\ x\neq 3;\ x\neq 5\\ x>5{,}2\\ x\neq 5{,}4\end{cases}$$

Итого имеем: $x \in (5{,}2;\ 5{,}4) \cup (5{,}4;\ +\infty)$

1) $a = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \dfrac{1}{\log_{(x-4)}\sqrt{2x-8}\ \cdot 0{,}5} = \dfrac{2}{\log_{(x-4)}2 + \log_{(x-4)}(x-4)} = \dfrac{2}{1+\log_{(x-4)}2}$

2) $b = \log_{(x-4)^2}(5x-26) = \dfrac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

3) $c = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2\log_{(5x-26)}(2(x-4)) = 2(\log_{(5x-26)}2 + \log_{(5x-26)}(x-4)) =$

$= 2\log_{(5x-26)}2 + 2\log_{(5x-26)}(x-4)$

Заметим следующее:

$b\cdot c = \dfrac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)\cdot(2\log_{(5x-26)}2 + 2\log_{(5x-26)}(x-4)) =$

$= \log_{(x-4)}(5x-26)\cdot\log_{(5x-26)}2 + 1 = \dfrac{\log_{(5x-26)}2}{\log_{(5x-26)}(x-4)} + 1 = \log_{(x-4)}2 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\log_{(x-4)}2 = bc-1}$. Значит, $a = \dfrac{2}{1+bc-1} = \dfrac{2}{bc}$

$a\cdot b\cdot c = 2$

I. Пусть $a=b$, тогда $c = a+1$

$a\cdot a\cdot(a+1) = 2$

$a^3 - 1 + a^2 - 1 = 0$

$(a-1)(a^2+a+1) + (a-1)(a+1) = 0 \Rightarrow (a-1)(a^2+2a+2) = 0$

$\boxed{a=1}$ или $a^2+2a+2=0$
$D = 4-8<0$

21103493 (U159280 M1303793)

Чистовик 4 №4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

Т.к. НОД=10, то пусть a кратно 2^1, а b – 5^1, т.е. в одном из чисел степень должна быть 1.

$a=2\cdot 5^y$ $y\geq 1$

$b=5\cdot 2^x$ $x\geq 1$; $c=2^{x_c}\cdot 5^{y_c}$; $x_c\geq 1$; $y_c\geq 1$

Тогда $НОК(a;b;c)=5^y\cdot 2^x$

$x=17$; $y=16$

$x_c\in(1.....17)$; $y_c\in(1.....16)$

Число возможных вариантов $16\cdot 17$

~~Т.к. a, b и c могут быть переставлены местами, то таких вариантов будет 16·17·6=1632~~

~~Ответ: 1632~~

~~(abc) (acb) (bac) (bca) (cab) (cba)~~

~~17·16=102+17=272; 272·6=1632~~

Но варианты повторяются

с a:	с b:
$a=2^1\cdot 5^{16}$	$a=2^{17}\cdot 5^1$
$b=5^1\cdot 2^{17}$	$b=5^{16}\cdot 2^1$
повторы $c_1=2\cdot 5^{16}$	$c_3=2^1\cdot 5^{16}$
$c_2=5\cdot 2^{16}$	$c_4=2^{17}\cdot 5^1$

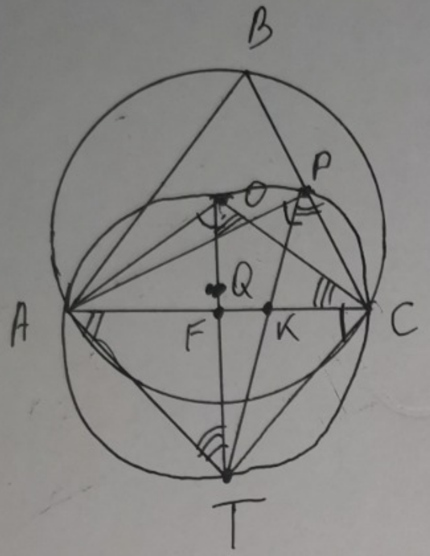
abc
acb
bac
bca
cab
cba } 6 вариантов.

$16\cdot 17\cdot 6=1632$

~~1632-4=1628~~ $1632-6=1626$

Ответ: ~~1628~~ 1626

Чистовик (3)
№6.



Q - центр второй окружности

$AT \perp OA$; $CT \perp OC$

Т.к. A, O и C лежат на второй окружности, то и T лежит на ней и OT - диаметр

Т.к. $\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{10}{8}$, то $\frac{AK}{CK} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

$\angle AOT = \angle APT = \angle ACT$ (опираются на AT)

$\angle TAC = \angle TOC = \angle TPC$ (опираются на CT)

$\angle ATO = \angle ACO$

$\angle ACT + \angle ACO = 90°$

F - точка пересечения AC и OT

$\triangle AFT \sim \triangle OFC$ (по 2-м углам)

$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$

$\triangle AKP \sim \triangle TKC$ (по 2-м углам)

$\frac{AK}{KT} = \frac{PK}{KC} = \frac{AP}{TC} \Rightarrow \frac{5x}{KT} = \frac{PK}{4x}$

$\angle OTP = \angle OCP = \angle AOP$

$\triangle AKT \sim \triangle CKP$

$S_{APK} = 10$

$S_{CPK} = 8$

AT = CT (по свойству касательных)

$AK = 5x$

$CK = 4x$

$\frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot \sin C}{\frac{1}{2} PC \cdot AC \cdot \sin C} = \frac{BC}{PC}$; $\frac{S_{ABC}}{10+8} = \frac{BC}{PC} = K$

$S_{ABC} = 18K$

21103493 (U159280 M1303793)

~~[illegible]~~ Черновик.

$НОД(a;b;c)=10$

$НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16}$

Т.к. $НОД=10$, то пусть a кратно 2^1, а $b - 5^1$, т.е.

$a=2\cdot 5^y$ $y\geq 1$

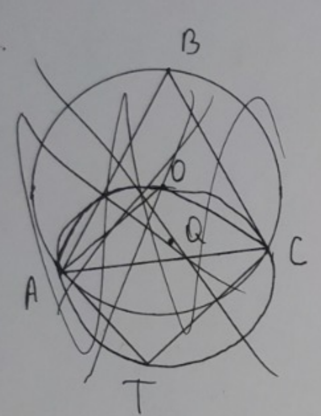
$b=5\cdot 2^x$ $x\geq 1$; $c=2^{x_c}\cdot 5^{y_c}$; $x_c\geq 1$; $y_c\geq 1$

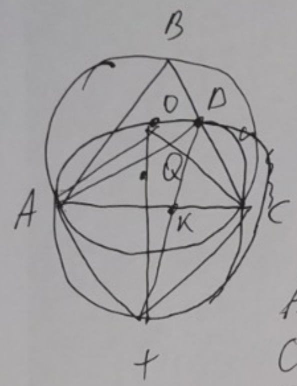
$НОК(a;b;c)=2^x\cdot 5^y$, если $x>x_c$ и $y>y_c$ или

$НОК(a;b;c)=2^{x_c}\cdot 5^y$ ~~[illegible]~~ $=2^{x_c}\cdot 5^{y_c}=2^x\cdot 5^{y_c}$

21103493 (U159280 M1303793)

~~Чистовик~~ Черновик.
№6.





$AT \perp OA$
$CT \perp OC$
$\frac{S_1}{S_2} = \frac{10}{8}$.
$\frac{AK}{KC} = \frac{5}{4}$

$\angle AOT = \angle APT = \angle ACT$ (опираются на AT
$\angle TAC = \angle TOC = \angle TPC$ (опираются на CT)
$\angle ATO$ ~~ни~~ $= \angle ACO$
$\angle ACT$ ~~+~~ $\angle ACO = 90°$
F – точка пересечения AC и OT
$\triangle AFT \sim \triangle OFC$ (по 2-м углам)

~~Чистовик~~ Черновик.
№5.

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \frac{1}{2}\log_{2x-8}(x-4) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\log_{x-4}(2x-8)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\log_{x-4}2}$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\log_2(x-4)}$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2\log_{5x-26}(2x-8) = 2\cdot\frac{1}{\log_{5x-26}2(x-4)} = \frac{2\cdot 1}{\log_{5x-26}2+\log_{5x-26}}$

$= \frac{2\cdot 1}{\log_{5x-26}2+\log_{5x-26}(x-4)}$

$x \neq 4{,}5$
$x > \frac{8}{2} = 4$
$x \neq 3{,}5$
$x > \frac{26}{5} = 5{,}2$
$5x \neq 27 \Rightarrow x \neq 5{,}$

$x \in (5{,}2;\, 5{,}4) \cup (5{,}4;\, +\infty)$

$a = \frac{2}{\log_{(x-4)}2+\log_{(x-4)}(x-4)} = \frac{2}{\log_{(x-4)}2+1} = a$

$b = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

$c = 2(\log_{(5x-26)}2 + \log_{(5x-26)}(x-4)) = 2\log_{(5x-26)}2 + 2(\log_{(5x-26)}$

$b\cdot c = \log_{(x-4)}(5x-26)\cdot\log_{5x-26}2+1 = \log_{(x-4)}2+1$

$a = \frac{2}{bc} \Rightarrow abc = 2$

21103493 (U159280 M1303793)