Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103453**

ID профиля: **130690**

Вариант 20

① $S=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5a_1+10d$ Чистовик

$a_6\cdot a_{11} > S+15$

$a_8\cdot a_9 < S+39$

$\Big\}\ S+39+a_6\cdot a_{11} > S+15+a_8\cdot a_9$

$24+a_6\cdot a_{11} > a_8\cdot a_9$

$24+(a_1+5d)(a_1+10d) > (a_1+7d)(a_1+8d)$

$24+a_1^2+15a_1d+50d^2 > a_1^2+15a_1d+56d^2$

$24>6d^2 \Rightarrow 4>d^2$

Т.к. $\{a\}$ состоит из целых чисел то $a_n-a_{n-1}=d\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ d может быть 1 0 −1. Но прогрессия возрастающая $\Rightarrow$ подходит только 1.

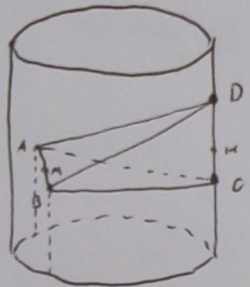
Ответ: 1.

Пример: $a_1=-6$, а $d=1$. $S=-20$

$a_6=-1$ $a_8=1$ $-4>-5$

$a_{11}=4$ $a_9=2$ $2<19$

②



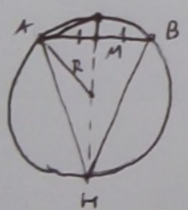
BD=AD=8

AB=2

AC=BC=7

Опустим из B на CD ⊥, также из A на CD они попадут в одну точку H, т.к. △ACD=△ABC $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $BH\perp CD$ и $AH\perp CD$ и $BH\cap AH=H \Rightarrow (ABH)\perp CD \Rightarrow$ $\Rightarrow (ABC)\perp$ оси цилиндра $\Rightarrow$ (ABH) образует в сечении окружность с радиусом цилиндра.

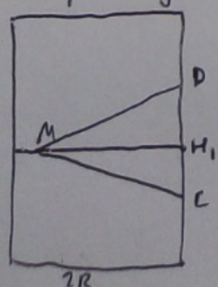
Рассмотрим это сечение. В окружности есть хорда длиной $2 \Rightarrow R\geq 1$.



Также но тетраэдр представляет из себя постоянные грани (ABD) и (ABC). Мы можем менять его, меняя CD, т.е. как будто открываем, закрываем „книжку" $\Rightarrow$ Можно ~~менять~~ только увеличивать, пока он не выродится в плоскость.

Опустим ⊥ из D на AB и из C на AB. Они попадут в одну точку M, т.к. △ABD и △ABC — равнобедр. $\Rightarrow$ высота из D — это и медиана из D. $AB\perp DM$, $AB\perp CM$, $CM\cap DM$ $\Big\}\Rightarrow$

$\Rightarrow (CMD)\perp AB$. Картинка симметрична относит. (MDC) $\Rightarrow$ сечение цилиндра (CMD) — это прямоугольник с одной из сторон 2R.



Расстоянием от M до стороны можно найти из пред. чертежа:

$R-\sqrt{R^2-1} \Rightarrow MH_1=2R-R+\sqrt{R^2-1}=R+\sqrt{R^2-1}$.

$MD=\sqrt{BD^2-BM^2}=\sqrt{63}$

$MC=\sqrt{48}$

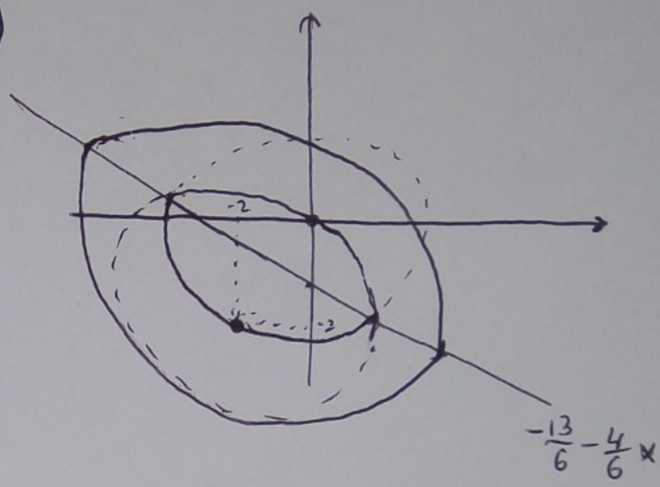
Так как нужен min R, а $R\geq 1$, то $R=1$, тогда $MH_1=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow DH_1=\sqrt{62}$ $CH_1=\sqrt{47} \Rightarrow CD=\sqrt{62}+\sqrt{47}$

Ответ: $\sqrt{62}+\sqrt{47}$

Чистовик.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 13\\ a^2+b^2\leq \min(-4a-6b;13)\end{cases}$$



$-4a-6b<13$

$4a+6b>-13$

$6b>-13-4a$

$b>-\frac{13}{6}-\frac{4}{6}a$

когда $-4a-6b>13$, то

$a^2+b^2\leq 13$ - ур-ние круга в точке $(0;0)$

$a^2+b^2\leq -4a-6b$

$(a+2)^2+(b+3)^2\leq 13$

Теперь ~~из~~ в каждой точки фигуры надо нарисовать ~~окруж~~

$(x-a)^2+(y-b)^2\leq 13$

черновик

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 =$

$= 5a_3$

$a_6 \cdot a_{11} > S + 15$

$a_8 \cdot a_9 < S + 39$

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_9 = a_1 + 8d$

$\cancel{a_1^2} + 15d a_1 + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15$

$a_1^2 + 15d a_1 + 56d^2 < 5a_1 + 10d + 39$

$5a_1 + 10d + 39 > \cancel{a_1^2} + 15d a_1 + 56d^2$

$24 > 6d^2 \Rightarrow d^2 < 4$

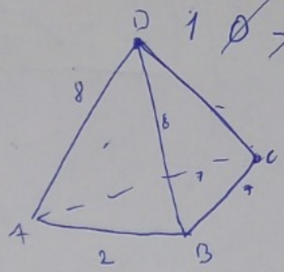
1 2 3 4 5 6

1 ~~0~~ ~~-1~~

66 > 30

72 <

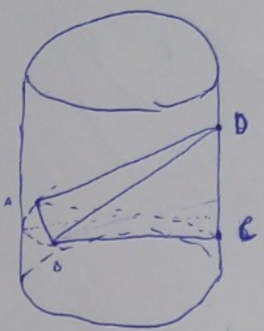
$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 13 \\ a^2 + b^2 \le \min(-4a - 6b; 13) \end{cases}$$

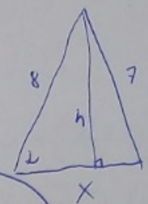


$a_1^2 + 10a + 25 > 0$

$(a_1 + 5)^2 > 0$

$R - \sqrt{R^2 - 1}$



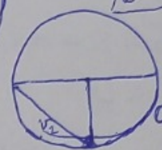


$\sqrt{64 - h^2} + \sqrt{49 - h^2} = x^2$

$\sqrt{4R^2 - x^2} = 1 + R$

$4R^2 - x^2 = \cancel{1} + R^2 + R^2 - \cancel{1} - 2R\sqrt{R^2 - 1}$

$2R^2 - x^2 = -2R\sqrt{R^2 - 1}$



$a_1^2 + 15a + 56 < 5a + 49$

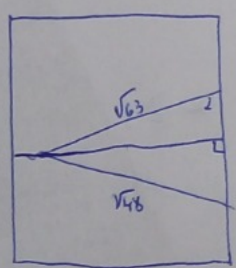
$a_1^2 + 10a + 7 < 0$

$100 - 28 = 72 = 9 \cdot 8$

$\frac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

$\sqrt{R^2 - 1} + R$

$x^2 =$



$x^2 = R^2 - 1 + R^2 + 2R\sqrt{R^2 - 1} + 1 =$

$= 2R^2 + 2R\sqrt{R^2 - 1} = 2R(R + \sqrt{R^2 + 1})$

$-x^4 + 226x^2 - 225 \quad (x^2 - 1)(x^2 - 225)$

$R - \sqrt{R^2 - 1}$

$x^2 = 1 \quad x^4 - 226x^2 + 225$

$x^2 = 225$

$\cos\alpha = \frac{64 - 49 + x^2}{16x} = \frac{15 + x^2}{16x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{225 + 30x^2 + x^4}{256x^2}} =$

$= \sqrt{\frac{226x^2 - 225 + x^4}{256x^2}}$

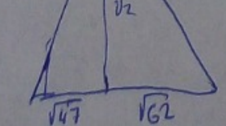
$h = 8 \cdot \sqrt{\frac{226x^2 - 225 + x^4}{256x^2}} =$

$= \frac{\sqrt{226x^2 - 225 - x^4}}{2x}$

$\frac{15 + x^2}{2\sqrt{63} \cdot x} \quad \frac{15 + x^2}{2x}$

$\frac{226x^2 - 225 - x^4}{4x^2} = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - 1}$

$218x^2 - 225 - x^4$



$\frac{\sqrt{2}}{8} \quad \frac{\sqrt{62}}{8}$

$x - \frac{15 + x^2}{2x} = \frac{2x^2 - 15 - x^2}{2x} = \frac{x^2 - 15}{2x}$

$48 - \left(\frac{x^2 - 15}{2x}\right)^2 = \left(R + \sqrt{R^2 - 1}\right)^2$

$\frac{x^2 - 15}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{15}{2x}$

$47 = \left(\frac{x^2 - 15}{2x}\right)^2$

$\frac{1}{2} + \frac{15}{2x^2}$

$D = 47 + 15 = \sqrt{62}$

$\sqrt{47} = \frac{x^2 - 15}{2x} \quad x^2 - 2x \cdot \sqrt{47} - 15$

$x = \sqrt{47} + \sqrt{62}$

21103453 (U130690 M1303904)

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 =$

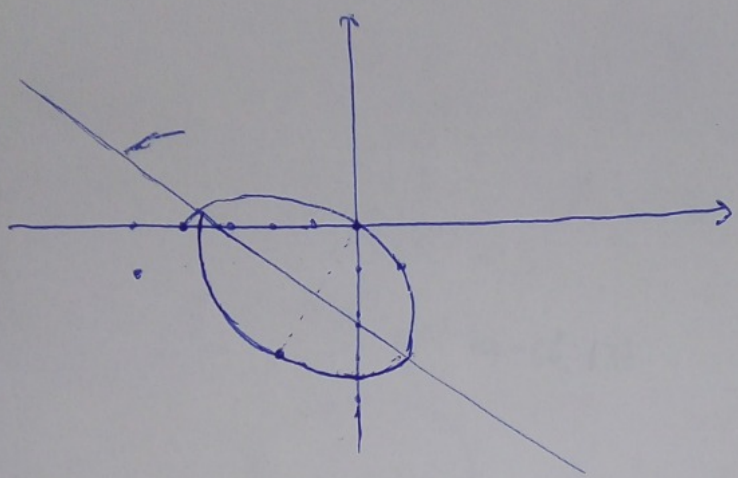
$= 5a_3$

Черновик

$a_6 \cdot a_{11} > S+15$

$a_8 \cdot a_9 < S+39$

Черновик



$a^2+b^2 \le 13$

$a^2+b^2+4a+6b+4+9 \le 13$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$

$a^2+b^2 \cancel{=13}$

$b = -\frac{13}{6} - \frac{4}{6}a$

$6b = -13-4a$

$-4a-6b < 13$

$4a+6b > -13$

$6b > -13-4a$

$b > -\frac{13}{6} - \frac{4}{6}a$

$36a^2+36b^2 = 36 \cdot 13$

$36a^2 + (-13+4a)^2 = 36 \cdot 13$

$36a^2 + 13^2 + 16a^2 + 104a = 36 \cdot 13$

$52a^2 + 104a - 23 \cdot 13 = 0$

$6b+18 = 5-4a$

$230+69=299$

$36(a+2)^2 + (5-4a)^2 \le 13 \cdot 36$

$36a^2+72a+144+25+16a^2-40a \le 13 \cdot 36$

$52a^2+32a+169-13 \cdot 36 \le 0$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le(\min -4a-6b;13)\end{cases}$$

$-4a-6b<13$ $\quad 6b>-13-4a$

$4a+6b>-13$ $\quad b>-\frac{13}{6}-\frac{2}{3}a$

$\sqrt{13}$ $\quad \frac{13}{4}$

$a^2+b^2\le -4a-6b$

$a^2+4a+4-4+b^2+6b-9+9\le 0$

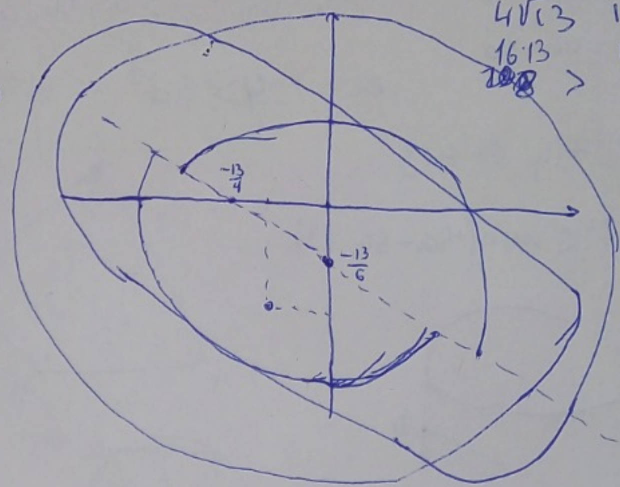
$(a+2)^2+(b+3)^2\le 13$

$4\sqrt{13}$ $\quad 13$

$16\cdot 13$ $\quad 169$

$208>$

160



$(a+7)(a+8)<5a+10+39$

$a^2+15a+56<5a+49$

$a^2+10a+7<0$

$-5\pm 3\sqrt{2}$

$-9\ -8\ -7\ -6\ -5\ \dots\ -2.$

$-6\quad -5\quad -4\quad -3\quad -2\quad -1\quad 0$

$S=-20,$ $\quad -1\cdot 4>$ $\quad 1\cdot 2<19$

$-4>-5$

21103453 (U130690 M1303904)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103453**

ID профиля: **130690**

Вариант 20

Чистовик

(4)
$$\begin{cases} НОК(a;b;c)=10 \\ НОД(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

Это система показывает, что среди чисел a, b, c: 1) есть число, в которое входит 1 степень 2.
2) есть число, в которое входит 1 степень 5.
3) есть число со степенью 2 – 17
4) есть число со степенью 5 – 16
5) Каждое число $\vdots 10$.

	a	b	c
2^n	1	x	17
5^n	1	y	16

Вместо вопросов могут стоять числа от 1 до 17 (во 2-й строке до 16)

1) $x \neq 1$ $y \neq 1$ $x \neq 17$ $y \neq 16$

Тогда есть 15 ~~[illegible]~~ наборов степеней двойки и 14 ~~способов~~ наборов степеней 5-ки.

Так повторяющихся чисел в строчках нет, то можно спокойно менять строчки. У нас есть 15 наборов (2^n) и 14 наборов (5^n), также можем переставлять числа в строчках. Одна строка $3!=6$ способов $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ способов будет: $15\cdot 14\cdot 6\cdot 6 = 210\cdot 6\cdot 6 = 1260\cdot 6 = 7560$.

2) ~~[illegible]~~
Когда ~~[illegible]~~ только один из x, y равен своей границе. Тогда в какой строке будет два одинаковых числа.
Меняя 6 способами строку 5^n относит. 2^n. Мы будем считать каждый способ 2 раза, потому надо поделить на 2. В итоге получим 3 набора чисел. ~~[illegible]~~

Умножим на 6 перестановок, 18. Это случай, когда например x – на границе, а y нет. На y может быть 14 чисел, а на x – 2. Аналогично наоборот, тогда $18\cdot 14\cdot 2 + 18\cdot 15\cdot 2 = 36\cdot 29$

3) И y, и x принимают значение на границе.

т.е.

1 1 17	1 17 17	1 1 17	1 17 17
1 1 16	1 1 16	1 16 16	1 16 16

Посчитаем один случай, остальные аналогично.

1	1	17
1	1	16
16	1	1
1	16	1

1) 1-1 1-1 17-16 – 3 перестановки, т.к. два равных числа
2) 1-16 1-1 17-1
3) 1-1 1-16 17-1
одинаковый набор 6 перест.

Итого: 3+6=9.

$7560 + 36\cdot 29 + 9\cdot 4 = 36(210+29+1) = 240\cdot 36$

Ответ: 8640.

1 из 2

⑤ Заметим, что

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)\cdot\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)\cdot\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=2$

$\frac{2}{2}\cdot\log_{x-4}(2x-8)\cdot 2\log_{(2x-8)}(x-4)=2$

Пусть эти числа a a $a+1$, тогда

$a^2(a+1)=2$

$a^3+a-2=0$

$(a-1)(a^2+a+2)=0$

$a^2+a+2>0 \Rightarrow a=1$. Тогда наши числа 1 1 2.

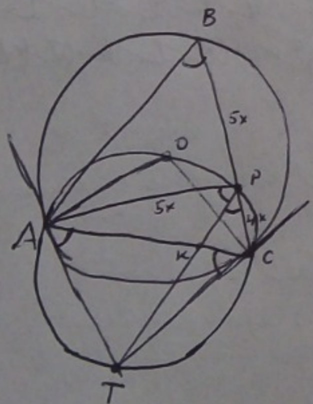
$\left[\begin{array}{l} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=2 \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=2 \\ * \begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1 \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=2x-8 \\ 2x-8=5x-26 \\ \begin{cases} x^2-8x+16=2x-8 \\ 4x^2-32x+64=5x-26 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=6 \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=6 \end{array}\right. \\ 4x^2-37x+90=0 \end{cases} \end{array}\right.$

* проверять $\log_{(x-4)^2}(5x-26)=2$ сложно поэтому сравним остальные 1-цами

$\begin{cases} x=4 \text{ не подх, т.к. } x-4=0, \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) \text{ не определен} \\ x=6 \text{ подходит} \\ \text{Подставим числа из I-ур-ния во II-ое: } 64-148+90\neq0;\ 144+90-222\neq0 \end{cases} \Rightarrow$

Ответ: $x=6$

⑥



Для начала заметим, что AOCT — вписанный, т.к. $\angle OAT=\angle OCT=90^\circ \Rightarrow$ (.) T лежит на описан. окружн. $\triangle APC$.

$\angle ACT=\frac{1}{2}\overset{\smile}{AC}=\angle ABC=\angle CAT$.

APCT — вписан. $\Rightarrow \angle ACT=\angle APT$ и $\angle TAC=\angle TPC \Rightarrow$

$\Rightarrow PT \parallel AB$, тогда $\triangle KPC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{\triangle KPC}}{S_{\triangle ABC}}=k^2$, а

$k=\frac{CK}{AC}$. $\frac{S_{CPK}}{S_{APK}}=\frac{h\cdot CK}{h\cdot AK}=\frac{CK}{AK}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5} \Rightarrow AK=\frac{5}{4}CK \Rightarrow AC=\frac{9}{4}CK \Rightarrow$

$=k=\frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_{\triangle KPC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{16}{81} \Rightarrow S_{\triangle ABC}=\frac{81}{16}\cdot 8=\frac{81}{2}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt5}{5}$

$\cos\alpha=\frac{2\sqrt5}{5}$

$BC=9x$

$AP=5x \Rightarrow AB=2\sqrt5 x$

Также $S_{APK}+S_{CPK}=18=\frac{5x\cdot 2\cdot\frac{4}{5}x}{2}... =6x^2 \Rightarrow x=\sqrt3$.

$AC^2=20x^2+64x^2-2\cdot\frac{2\sqrt5}{5}\cdot2\sqrt5x\cdot8x=$

$=84x^2-64x^2=20x^2=60 \Rightarrow AC=\sqrt{60}=2\sqrt{15}$

Ответ: а) $\frac{81}{2}$

б) $2\sqrt{15}$

2 из 2

21103453 (U130690 M1303905)

$$\begin{cases}\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1 \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1\end{cases}$$ черновик

$$\begin{cases}\text{НОД}(a;b;c)=10 \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16}\end{cases}$$

a b c   1 1 2

25

$$\left[\begin{array}{l}\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=2 \\ \log_{(x-4)^2}(5x-26)=2 \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=2\end{array}\right.$$

a b c
5 2

2·5

a b c

2 6 24

$2^{16}\cdot 5^{15}$

2 2·3 2·2·2·3

1 . . . . 16·15 . . . . = 240

$x-4=2x-8$

$\cancel{4=x}$

НОД=2

НОК=24

$x-4=\sqrt{2x-8}$

$2x-8=\sqrt{5x-26}$

$x=4$

$x=6$

$64+90=154-148=6$

144+90−222 12 2 2 . . . 2

2 | 2 2

5 | 5 5 5 5 5 . . . 5

$$\begin{cases}x^2-8x+16=2x-8 \\ 4x^2-32x+64=5x-26\end{cases}$$

$\log_{5x-26}2x-8=1$

$x^2-10x+24=0$

$4x^2-37x+90=0$

$5x-26=(x-4)^4$

$2x-8=5x-26$

$18=3x \Rightarrow x=6$

2 | 2 2 2

5 5 5 5

15·14=210

15 2 | 2 2 2 2 2 2 2 2 2 . . . 2

14. 5 | 5 5 5 5 5 5 5 5 5 . . . 5

$a^3+a=1$

$a^3+a-1=0$

1 1 2

~~15·14=210~~

15·14·6=90·14=1260

$$\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)\cdot 2\log_{5x-26}(2x-8)=$$

$$=\log_{x-4}(2x-8)\cdot 2\cdot\log_{2x-8}(x-4)=2.$$

$a^3+a-2=0$

$(a-1)(\dots)=0$

$a=1.$

$a^3+0a^2+a-2 \;|\; a-1$

$a^3-a^2 \quad\quad a^2+a+2$

a^2+a

a^2-a

$2a-2$

1−8=7.

$x^4-4\cdot 4x^3+6\cdot 4^2x^2-4\cdot 4^3\cdot x+4^4=$

$=5x-26$

$x^4-16x^3+96x^2-256x+256-5x+26=0$

$x^4-16x^3+96x^2-231x+282=0$

Чернетка

$НОК(a;b;c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$

$НОД(a;b;c) = 10$

2 2^{17}

5 5^{16}

1 1 17
16 16 1
16 1 16
1 16 16

$\frac{4}{5}$ $\frac{3}{5}$

$\frac{15x^2 \cdot \frac{4}{5}}{2} =$
$= 6x^2 = 18 = x = \sqrt{3}$

1…17
1…16

1 1 17
1 16 16

1 1 17
1 1 16

2… 16 15
2… 15 N

1 3 17
1 5 16

1 1 17
1 5 16
5 1 16
16 5 1
5 16 1
1 16 5
16 1 5

15·14·6·6

7560 + 27·4 =
= 7668

36·240

36
240
144
72
8640

18·4
9·4

1-16 1-16 17-1
1-16 1-1 17-16
1-1 1-16 17-16

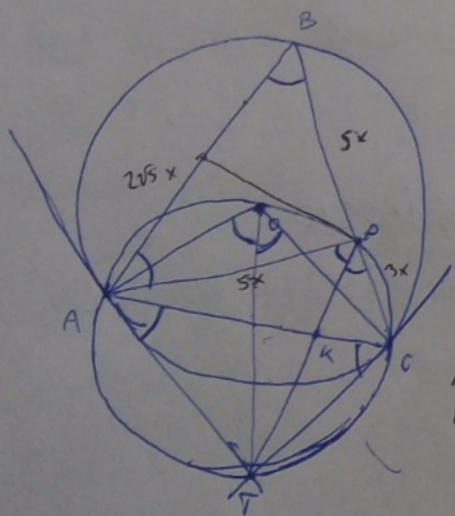
16 1 1 1 17
1 16 1
3

1-1 1-1 17-16
2(16-1 1-1 17-1
1-1 1-16 17-1

6

1 17 17
1 1 16
1 16 16

1 17 17
1 1 16
16 1 1
1 16 1
1-1 17-1 17-16
1-16 17-1 17-1
1-1 ~~17~~ 16 17-1



$\frac{APK}{CPK} = \frac{10}{8}$

1 1 17
1 16 16
16 1 16
16 16 1

$\sqrt{17x} - x = 2x$

$\frac{h \cdot AK}{h \cdot CK} = \frac{10}{8} \Rightarrow \frac{AK}{CK} = \frac{5}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow AK = \frac{5}{4} CK$
$\Rightarrow AC = \frac{9}{4} CK$

$\frac{CK}{AK} = \frac{4}{9} = k$

$\frac{S_{KPC}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{16}{81} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{81}{2} = 40{,}5$

1-1 1-16 17-16
1-16 1-1 17-16
1-16 1-16 17-1

$\frac{2tg}{1+tg^2} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\sin\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$
$4\sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

21103453 (U130690 M1303905)