Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103399**

ID профиля: **262314**

Вариант 20

№1. Чистовик. Вариант 10.

Прогрессия 5-ти членов возрастающей арифметической прогрессии: a_1; a_1+d; a_1+2d ... $a_1+d(n-1)$;

$$S=\frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5=\frac{2a_1+4d}{2}\cdot 5=5a_1+10d$$

$$a_6\cdot a_{11}=(a_1+5d)(a_1+10d)$$

① $(a_1+5d)(a_1+10d)>\frac{5}{2}(2a_1+4d)+15$

$a_1^2+15da_1+50d^2>5a_1+10d+15$

$a_8\cdot a_9<S+39$; $(a_1+7d)(a_1+8d)<5a_1+10d+39$

② $a_1^2+7da_1+8da_1+56d^2>5a_1+10d+39$

①-② $-6d^2>15-39$; $-6d^2>-24$

$6d^2<24$;

$d^2<4$

$d\in(-2;2)$, т.к. прогрессия возрастающая и все ее члены целые числа, то единственное d удовлетворяющее обоим условиям $\boxed{d=1}$

1) $a_1^2+15a_1+50>5a_1+10+15$

$a_1^2+10a_1+25>0$

$(a_1+5)^2>0$; $a_1\neq-5$;

2) $a_1^2+15a_1+56<5a_1+10+39$

$a_1^2+10a_1+7<0$

$D=100-7\cdot4=72=(6\sqrt{2})^2$

$a_1=\frac{-10\pm6\sqrt{2}}{2}=-5\pm3\sqrt{2}$

$-5-3\sqrt{2}<a_1<-5+3\sqrt{2}$

$-9\leq a_1\leq-1$

т.к. a_1 целые, то $a_1\in[-9;-1]$

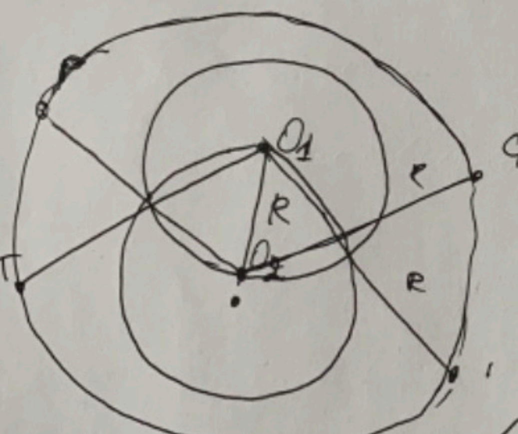
Ответ: $[-9;-1]$ ①

Шестовин Вариант 20.

№3

уравнение (a) $a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13)$ образует множество таких точек x и y, уе (x, y) - в кругу, которое находится от a до b (a; b) на расстоянии не больше $R = \sqrt{13}$ соответственно.

Нам множество решений это (x; y) на координатной оси (a; b), которые отдалены от O_2 не больше чем на R, т.е нужно найти



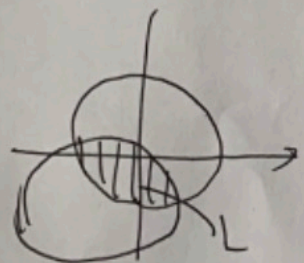
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b; 13) \end{cases}$$

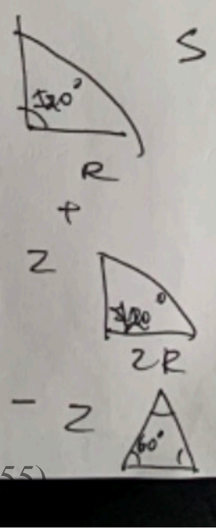
если $a^2+b^2 \le \min$

то $\begin{cases} a^2+b^2 \le -4a-6b \\ a^2+b^2 \le 13 \end{cases}$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$

Множество подходящих точек (a; b) можно отметить на рис (a) т.е. пересечение и L множество решений;





$S = \frac{1}{3}\pi R^2 + 2 \cdot \frac{1}{3}\pi(4R^2) - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 =$

$= \frac{1}{3}\pi R^2 + \frac{8}{3}\pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} R^2$

$= 13\sqrt{3}\left(\pi\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)$

Ответ: $13\sqrt{3}\left(\pi\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)$ 2 т.к. в прогрессии все члены целые,

Шуравлин но учитываю возможный вариант

$a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 10 + 15;$ $d = 1$

$a_1^2 + 15a_1 - 5a_1 + 50 - 10 - 15 > 0$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

~~D = 100~~

$(a_1 + 5)^2 > 0.$ $\quad a_1 \neq -5;$

$a_1^2 + 15 \cdot 1 a_1 + 56 \leq 5a_1 + 10 + 39$

$a_1^2 + 10a_1 + 56 - 10 - 39 \leq 0$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 \leq 0$

$56 - 49 = 7$

$D = 100 - 7 \cdot 4 = 72; = (6\sqrt{2})^2$

$100 - 28 = 72$

$a_1 = \frac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

– не целые числа;

$72 | 4$, 18; $72 | 36$

$-13, -12, -11$; $-5-3\sqrt{2}$; $-5+3\sqrt{2}$; $0, 1$

$2 - 10, 2$

$1,7 \cdot 1,7$; $1,4 \cdot 1,4 = 1,96$; $5,3$; $5,2$

Если $a_1 \in (-\infty; -5-3\sqrt{2})$

$a \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$ тогда $a_1 = -15;$

$a \in [-3; -1]$

1) Если ~~$a_1 \in (-5+3\sqrt{2}; +\infty)$~~

~~$a_2 = -16$~~

$a_3 = -14$

$\boxed{a_1 = 1}$

$a_2 = 2$

$\boxed{a_5 = 5}$

$\overline{a_5 = -19}$

$a_1 \in (-5; -3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$

$-10^2 + 100 + 7 < 0$

$81 - 90 + 7 \leq 0;$

Решение.

S - сумма первых 5-ти членов арифм. прогрессии

a_1, a_2, a_3 - члены прогр. $\quad a_6 a_{11} > S+15;$

$a_n = a_1 + d(n-1) = a_1 + 4d \quad\quad a_8 a_9 < S+39;$

$a_1 - ?$

$$S = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}(a_1 + a_5)$$
$$= \frac{5}{2}(a_1 + (4d + a_1))$$
$$= \frac{5}{2}(2a_1 + 4d)$$

$$a_6 \cdot a_{11} = (a_1 + 5d) \cdot (a_1 + 10d)$$

(1) $(a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) + 15$

$a_8 \cdot a_9 < S + 39.$

(2) $(a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < \frac{5}{2}(2a_1 + 4d)$

$$a_1^2 + 5da_1 + 10da_1 + 50d^2 > \frac{5}{2} \cdot 2a_1 + \frac{5}{2} \cdot 4d + 15$$

(1) $a_1^2 + 15da_1 + 50d^2 > 5a_1 + 10d + 15$

$a_1^2 + 7da_1 + 8da_1 + 56d^2 > 5a_1 + 10d + 39$

(2) $a_1^2 + 15da_1 + 56d^2 > 5a_1 + 10d + 39$

$\frac{39}{\frac{15}{24}}$

$$-6d^2 > 15 - 39$$
$$-6d^2 > -24 \quad (-1)$$
$$6d^2 < 24$$
$$d^2 < 4 \quad\quad d \in (-2; 2)$$

$d \in$ (-2 ... 2) т.к. прогрессия без неотрицат.

но $d \in (0; 2)$

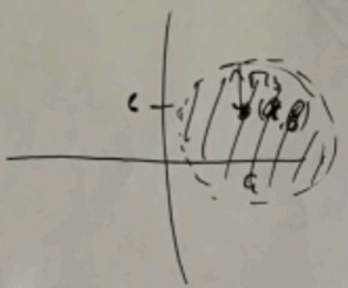
Шулевич.

№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b;13)\end{cases}$$

$a^2+b^2\le -4a-6b$, если

$-4a-6b<13$



$a^2+b^2+4a+6b\le 0$

$a^2+4a+6b+b^2\le 0$

$D=16-6\cdot b\cdot 4\cdot b^2$

$=16-24b^3$

$a=\frac{-4\pm\sqrt{16-24b^3}}{2}$

$=-2\pm 2\sqrt{4-6b^3}$

$(x-a)^2+(y-b)^2\le 13$

– окружность с центром в точке $(a;b)$, и радиусом $(\sqrt{13})$

$a^2+b^2+\cancel{4a+6}\le 13$, если

уравнение 2 определяет множество точек x, y, которые находятся от a до b не решением их точек.

$13<-4a-6b$

$13+4a+6b<0$

$4a+6b<-13$

$2a+3b<-\frac{13}{2}$

$R=\sqrt{13}$;

$$\frac{R^2}{3}\left(\pi+8\pi-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$=\frac{13}{3}\left(9\pi-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103399**

ID профиля: **262314**

Вариант 20

16. Цриевич

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$, $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$, $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

1) 1 = 2 ; 3 = 2 $\cancel{+}$ 1

2) 1 = 3 ; 2 = 3 $\cancel{+}$ 1

3) 3 = 2 ; 1 = 2 $\cancel{+}$ 1

$5x-26>0$

$5x>26$

$x>\frac{26}{5}$

$x>5\frac{1}{5}$

$\sqrt{5x-26}\neq 1$ $x\in\cancel{\left(\frac{26}{5};+\infty\right)}$

$5x-26\neq 1$

$5x\neq 27$ $x\neq\frac{27}{5}$

$x-4\neq 1$

$\boxed{x\neq 5}$

$x-4\neq 0;\ x\neq 4$

$x-4>0$

$x>4$

$\log_{2(x-4)^{\frac{1}{2}}}(x-4) = 2\log_{2(x-4)}(x-4)$

$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \frac{1}{2}\log_{|x-4|}(5x-26)$

$x\in\left(\frac{26}{5};\frac{27}{5}\right)\cup\left(\frac{27}{5};+\infty\right)$

1) $\frac{1}{2}\log_{|x-4|}(5x-26) = 2\log_{2(x-4)}(x-4)\ \Big|\cdot 2$

$\log_{|x-4|}(5x-26) = 4\log_{2(x-4)}(x-4)$

1) $\cancel{x\geq 4}$ $0<x-4<1$;

$0<x<5$

$\log_{(x-4)}(5x-26) = \frac{4}{\log_{(x-4)}2(x-4)}$

$\log_{(x-4)}(5x-26) = \frac{4}{\log_{(x-4)}2+\cancel{\log_{(x-4)}(x-4)}}$

$\log_{(x-4)}(5x-26) = \frac{4}{\log_{(x-4)}2+1}$

$\log_{(x-4)}(5x-26)\cdot\log_{(x-4)}2+\log_{(x-4)}(5x-26) = 4.$

$\log_{(x-4)}2(5x-26) + \log_{(x-4)}(5x-26) = 4$

21103399 (U262314 M1296856)

№6. Решение.

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$, $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$, $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$\frac{1}{\log_{(x-4)}(2x-8)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\log_{(x-4)}(2x-8)} = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

$\frac{4}{\log_{(x-4)}(2x-8)} = \log_{(x-4)}(5x-26)$ $x-4$

$\frac{\log_{(x-4)}(x-4)^4}{\log_{(x-4)}2+1} = \log_{(x-4)}(5x-26)$

$\log_{(x-4)}(x-4)^4 = \log_{(x-4)}(5x-26) + \log_{(x-4)}2\cdot\log_{(x-4)}(5x-26)$

$\cancel{\log}\ 4 = \log_{(x-4)}(5x-26)(1+\log_{(x-4)}2)$

$4 = \log_2 4\cdot(1+\log_2 2)$

$x=6$ $4=2\cdot2$

$\log_4(4) = \log_{\sqrt{4}}(2\cdot6-8) - 1$

$\cancel{\log}\ 1 = \log_2 4^2 - 1$

$\cancel{\log}\ 1 = 2-1$

$b=6$

№3. Решение.

$$\begin{cases} \text{НОД}(a, b, c) = 10 \\ \text{НОК}(a, b, c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \end{cases}$$

Понятно что можно выразить

a, b, c $\quad a = 2^{a_1} \cdot 5^{a_2}$

$b = 2^{b_1} \cdot 5^{b_2}$

$c = 2^{c_1} \cdot 5^{c_2}$

по определению нод и нок.

$\max(a, b, c) = 17$

$\max(a_2, b_2, c_2) = 16$

$\min(a_1, b_1; c_1) = 1$

$\min(a_2; b_2, c_2) = 1$

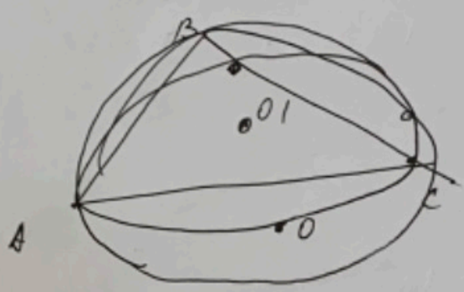
Рассмотрим тройку $(a_1; b_1; c_1)$ для степени 2; Мы можем выразить max и min значения из (a_1, b_1, c_1) — 6-ю способами, оставшийся член может принимать значения от 1 до 17, всего $6 \cdot 17 = 102$ вариантов;

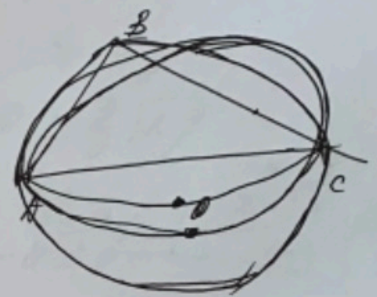
$\begin{array}{r} 17 \\ \cdot\, 6 \\ \hline 102 \end{array}$

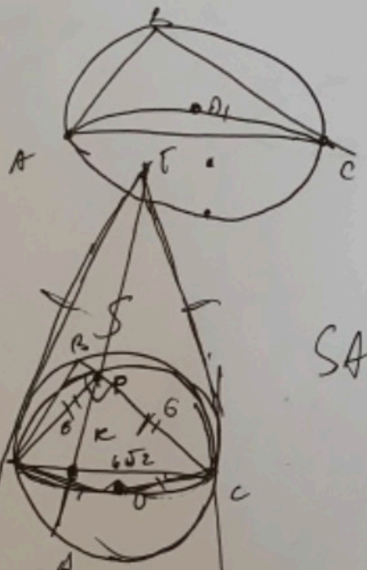
Аналогично для степени 5: $6 \cdot 16 = 96$

Всего $9.6 \cdot 102 = 9792$ вариантов троек (a, b, c)

№6.



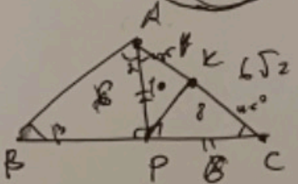




$O_K < AC$;

$S_{APK} = 10$

$S_{CPK} = 8$;



а) $AB - C$?

$AC = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

$AP = PC$;

$S_{\Delta PC} = \frac{1}{2} \cdot x^2$ $\angle APC = 90°$, т.к. опис окружность;

$18 = \frac{1}{2} x^2$

$36 = x^2$

$x = 6$

вокруг $APOC$ и $\angle AOC = 90°$ т.к. AC – диаметр.

$\Rightarrow \angle APC = 180 - 90 - 90$

$10 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 6 \cdot y$

$10 = \frac{\sqrt{2} \cdot 6}{4} y$

$\frac{40}{6\sqrt{2}} = y$ $\quad \frac{20}{3\sqrt{2}}\, y$

$\angle B = 90°$

B ... $= 10$

$\frac{10\sqrt{2}}{6}$ ... $\frac{\sqrt{2}}{3}$

Чистовик 20В

№1.

$\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$

(a,b,c) можно выразить

$a=2^{a_1}\cdot 5^{a_2}$

$b=2^{b_1}\cdot 5^{b_2}$

$c=2^{c_1}\cdot 5^{c_2}$

По определению НОК и НОД

$\max(a_1,b_1,c_1)=17$

$\max(a_2,b_2,c_2)=16$

$\min(a_1,b_1,c_1)=1$

$\min(a_2,b_2,c_2)=1$.

Рассмотрим тройку для степени 2-ки. (a_1,b_1,c_1). Мы можем выразить max и min значение из тройки $(a_1;b_1;c_1)$ - 6ю способами, а оставшийся член может принимать значение от 1-ого до 17-ти.

Всего: $6\cdot 17=102$ варианта.

Аналогично для степени 5-ки; (a_2,b_2,c_2) - 6ю способами, а оставшийся член принимает значение от 1-ого до 16-ти

$\Rightarrow$ всего: $6\cdot 16=96$ вариантов.

$\begin{array}{r} 102 \\ \times\ 96 \\ \hline 612 \\ 918\ \ \\ \hline 9792 \end{array}$

Итого: $96\cdot 102=9792$ троек $(a;b;c)$

Ответ: 9792

1

Чистовик 20 В

№5

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4),\ \log_{(x-4)}(5x-26),\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

I решение

1) ① = ②, ③ = ② + 1

2) ① = ③ ; ② = ③ + 1

3) ③ = ② ; ① = ② + 1

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(2x-8)} = 2\log_{(x-4)}(5x-26)$$

$$\frac{\log_{(x-4)}(x-4)^4}{\log_{(x-4)}2+1} = \log_{(x-4)}(5x-26)$$

$$4 = \log_{(x-4)}(5x-26)(1+\log_{(x-4)}2)$$

Пусть $x=6$, тогда

$4 = \log_2(4)(1+\log_2 2) = 4$; $x=6$ – удовл.

тогда и $\log_{\sqrt{(5\cdot6)-26}}(2\cdot6-8) = \log_{(2)^2}(4)+1$

$\log_2 4 = 1+1$; $2=2$ => $\boxed{x=6}$

2) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$2\log_{(2x-8)}(x-4) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$\cancel{\frac{1}{2\log_{(x-4)}(2x-8)}} \cancel{=} \cancel{\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)}$

$$2\log_{(2x-8)}(x-4) = \frac{1}{\log_{(2x-8)}\sqrt{5x-26}}$$

$$2\log_{(2x-8)}(x-4)\log_{(2x-8)}\sqrt{5x-26} = 1.$$

Остальные варианты где x с условием что $5x-26>0$; нет.

Ответ: $x=6$.

②

Шилвик №1

II способ решения:

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=y_1$; $\log_{(x-4)^2}(5x-26)=y_2$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=y_3$;

$(2x-8)^{\frac{y_1}{2}}=x-4$

$(x-4)^{2y_2}=5x-26$

$(5x-26)^{\frac{1}{2}y_3}=2x-8$; $(2x-8)^{\frac{y_1}{2}\cdot 2y_2\cdot\frac{1}{2}y_3}$

$=2x-8$; $\Rightarrow$ $y_1\cdot y_2\cdot y_3=2$.

$t^3+t^2=2$; $t=1$; $\boxed{y_1=y_2=1}$,

$\boxed{y_3=2}$

$(x-4)^2=5x-26$

$x^2-8x+16=5x-26$

$x^2-13x+42=0$; $D=1$; $\sqrt{D}=1$;

$x=\frac{13\pm1}{2}=6$; $x=7$

— не удовл.

$\Rightarrow$ $\boxed{x=6}$

Ответ: $x=6$.

3

Шрловели

① $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$2\log_{(2x-8)}(x-4) = 2\log_{(5x-26)}(2x-8)$

$\log_{(2x-8)}(x-4) = \frac{1}{\log_{(2x-8)}(5x-26)}$

$\log_{(2x-8)}(x-4) \cdot \log_{(2x-8)}(5x-26) = 1$

$x=8;\ \log_8(4) \cdot \log_8(14)$

$\boxed{x=6}$

$\log_{4}2 \cdot \log_4 4 = 1.$

$\log_4 2 \cdot \log_2 4$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \cdot 1$

$\log_{(2x-8)}(x-4) = \frac{1}{2}$

$x-4 = (2x-8)^{\frac{1}{2}}$

$\boxed{4 = x}$

$2x-8>0$

$2x>8$

$x>4$

$x<4$ $\quad \log_0 0 \cdot \log_0$ $\quad x>5.$

~~$x=6.\ \log_2(1)$~~

$x-4 = (2x-8)^2$

$x-4 = 4(x-4)^2$

$1 = 4(x-4)$

$\frac{1}{4} = x-4$

$x = \frac{1}{4}+4$

$= \frac{17}{4}$

$x=26;$

$\log_{(2x-4)}(5x-26) = \log(2x-4)$

$5x-26 = 2x-4$

$3x = -4+26$

$3x = 22$

$x = \frac{22}{3}$

$\log_{(\frac{44}{3}-8)}(\frac{22}{3}-4) \cdot \log_{(\frac{44}{3}-8)}(\frac{5\cdot 22}{3}-26)$

$\log_{(\frac{11}{3})}(\frac{10}{3}) \cdot \cancel{\log_{\frac{11}{3}}(\frac{32}{3})}$

$\log_{(2\cdot\frac{17}{4}-8)}(\frac{17}{4}-4) = \log_{(2\cdot\frac{17}{4}-8)}(5\cdot\frac{17}{4}-26)$

$\log_{(\frac{1}{2})}(\frac{1}{4}) \cdot \log_{(\frac{1}{2})}($