Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103382**

ID профиля: **162955**

Вариант 20

Чистовик.

N1. $a_1, a_2, \dots, a_{11}, \dots$ - возр. ар. прогрессия, причём все $a_i \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{d}$ - разность $\boxed{\in \mathbb{Z}}$. $\boxed{d \geq 1}$.

$a_6 = a_8 - 2d$

$a_{11} = a_9 + 2d$

$\Rightarrow$ $a_6 a_{11} = a_8 a_9 - 2d \cdot a_9 + 2d \cdot a_8 - 4d^2 = a_8 a_9 - 2d(\underbrace{a_9 - a_8}_{d}) - 4d^2 = a_8 a_9 - 6d^2$

$S = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = 5a_1 + 10d$

~~$a_8 a_9 - 39 < S < a_6 a_9$~~

$\boxed{a_8 a_9 - 39 < S < a_6 a_{11} + 15}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\cancel{a_8 a_9} - 39 < \cancel{a_8 a_9} - 6d^2 - 15$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $6d^2 < 24$ $\Leftrightarrow$ $d^2 < 4$

$\begin{cases} d^2 < 4 \\ d \geq 1 \\ d \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow d = 1$

Тогда $S = 5a_1 + 10$, $a_6 = a_1 + 5$, $a_{11} = a + 10$, $a_8 = a + 7$, $a_9 = a + 8$,

$a_6 a_{11} = a^2 + 15a + 50$, $a_8 a_9 = a^2 + 15a + 56$.

$\begin{cases} (a_1^2 + 15a_1 + 50) > (5a_1 + 10) + 15 \\ (a_1^2 + 15a_1 + 56) < (5a_1 + 10) + 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1 \in [-5 - 3\sqrt{2}; -5 + 3\sqrt{2}]. \end{cases}$

$-10 < -5 - 3\sqrt{2} < -9$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $10 > 5 + 3\sqrt{2} > 9$ $\Leftrightarrow$

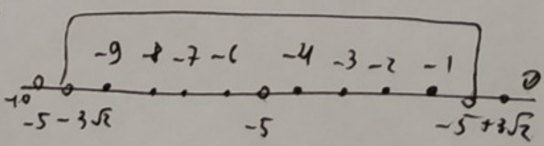
$\Leftrightarrow$ $5 > 3\sqrt{2} > 4$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\sqrt{25} > \sqrt{18} > \sqrt{16}$ V

$-1 < -5 + 3\sqrt{2} < 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $4 < 3\sqrt{2} < 5$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\sqrt{16} < \sqrt{18} < \sqrt{25}$ V



Ответ:

$a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

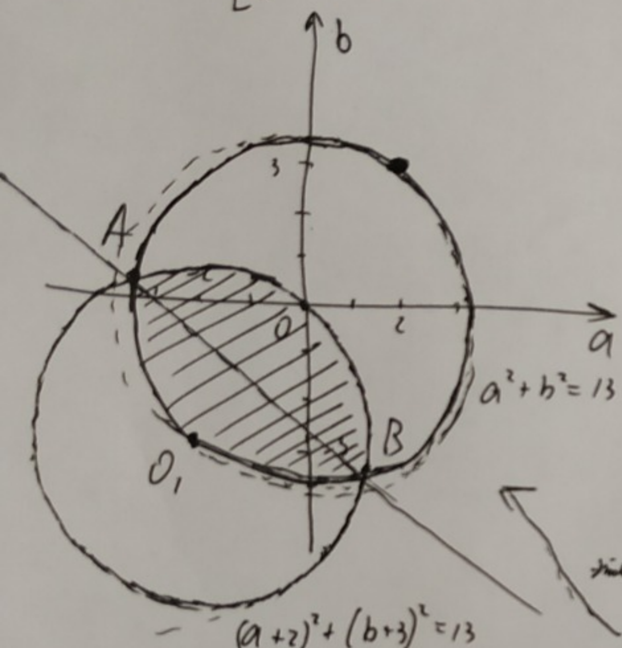
Чистовик.

№3. $a^2+b^2 \le \min(-4a-6b,\ 13) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \le -4a-6b \Leftrightarrow (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13 \\ -4a-6b \le 13 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 13 \\ -4a-6b \ge 13 \end{cases} \end{array}\right.$$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$ ← круг с центром в $(-2;-3)$ и рад. $\sqrt{13}$.

$a^2+b^2 \le 13$ ← круг с центром в начале координат и рад. $\sqrt{13}$



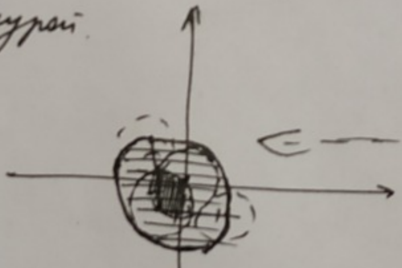
(можно заметить, что ограничивающие их окружности проходят через центр другого круга).

Пересекаются окружности по прямой $-4a-6b=13$.

Отсюда совокупность задаёт объединение равных сегментов кругов.

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$ — круг с центром в точке $(x;y)$ и радиусом $\sqrt{13}$.

У исходной системы есть решение $(a;b)$, если этот круг имеет общие(-ую) точки(-у) с этой фигурой.



Крайний случай — касание круга и этого „регби-мяча".

Круг касается верхней дуги, если центр его лежит на дуге окружности с центром в точке $(-2;-3)$ и радиусом $2\sqrt{13}$, ограниченной прямыми O_1A и O_1B.

〃 нижней дуги, если центр его лежит на дуге окр. с центром в $(2;3)$ и радиусом $2\sqrt{13}$, огр. прямыми OA и OB.

Наконец, кривая состоит ещё и из 2-х дуг окружностей с центрами в точках A и B и радиусом $\sqrt{13}$. Если $(x;y)$ лежит внутри или на этой кривой, решение есть, иначе решений нет.

Осталось найти площадь внутри этой кривой.

Черновик.

№1. – прогрессии, $\pm$ т.ч., $\pm$ оценка + пример.
№2 – стереометрия
№3 – ~параметр

№1. $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{11}$ – возр. ар. прогр.

$\forall i \; a_i \in \mathbb{Z}$. $\boxed{d \in \mathbb{Z}}$ $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ ✓

$d \geq 1$

$a_6 a_{11} > S + 15$

$a_8 a_9 < S + 39$

$a_8 = a_6 + 2d$

$a_{11} = a_9 + 2d$

□3

$\cancel{S+15} > a_6 a_{11} = a_8 a_9 + 2d \cdot a_8 - 2d \cdot a_9 - 4d^2$

$a_6 = a_8 - 2d$ ✓ □1

$a_{11} = a_9 + 2d$ ✓ □2

~~$S+15+39 > a_6 a_{11} + 39$~~

$a_8 a_9 + 2d(a_9 - a_8) - 4d^2 =$

$= a_8 a_9 - 2d \cdot d - 4d^2 = a_8 a_9 - 6d^2$

□4 $\boxed{a_6 a_{11} = a_8 a_9 - 6d^2}$

8кл

$S < a_6 a_9 - 15$

$S > a_8 a_9 - 39$

□6 $a_8 a_9 - 39 < S < a_6 a_9 - 15$

□7 $\boxed{a_8 a_9 - 39 < 5a_1 + 10d < a_8 a_9 - 6d^2 - 15}$

□5 $S = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = \frac{a_1 + a_1 + 4d}{2} \cdot 5 =$

$= (a_1 + 2d) \cdot 5 = 5a_1 + 10d$

□8 $\cancel{a_8 a_9} - 39 < \cancel{a_8 a_9} - 6d^2 - 15 \iff$

$\iff 6d^2 < 39 - 15 = 24 \iff$

□9

$\iff d^2 < 4 \iff d < 2 \iff d = 1$

□10 написать

$\boxed{d \in \mathbb{Z}}$

$\boxed{d \geq 1}$

$a_1 = a$

□11. $S = 5a_1 + 10$

□12 $a_6 = a_1 + 5$

$a_{11} = a + 10$

□13

$a_6 a_{11} = (a+5)(a+10) = a^2 + 15a + 50$

$a_8 = a + 7$

$a_9 = a + 8$

$a_8 a_9 = a^2 + 15a + 56$

$a \neq -5$ ✓

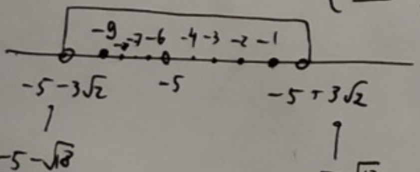
□16

$a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Check.

□14

$\begin{cases} a^2 + 15a + 50 > 5a + \underbrace{10 + 15}_{25} \\ a^2 + 15a + 56 < 5a + \underbrace{10 + 39}_{49} \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + 10a + 25 > 0 \iff (a+5)^2 > 0 \\ a^2 + 10a + 7 < 0 \end{cases}$



□15

$D/4 = 5^2 - 1 \cdot 7 = 25 - 7 = 18 = 3^2 \cdot 2$

$\left[\begin{array}{l} a = -5 + 3\sqrt{2} \\ a = -5 - 3\sqrt{2} \end{array} \right.$

$-5 + \sqrt{18} \vee -2 \iff$

$\iff \sqrt{18} \vee 3 = \sqrt{9}$

$-5 + \sqrt{18} > -1 \iff$

$\sqrt{18} > \sqrt{16}$ ✓

$\sqrt{18} - \sqrt{25} < 0$

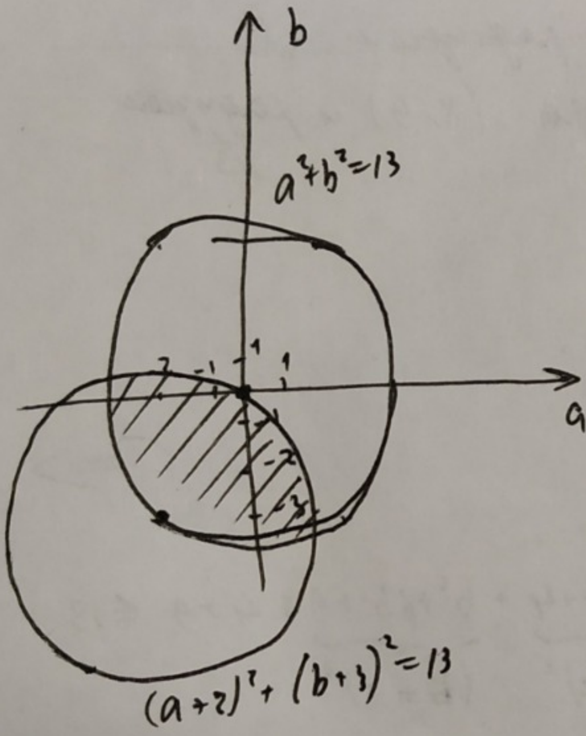
$-\sqrt{18} \vee 4$

$-5 - \sqrt{18} < -9$

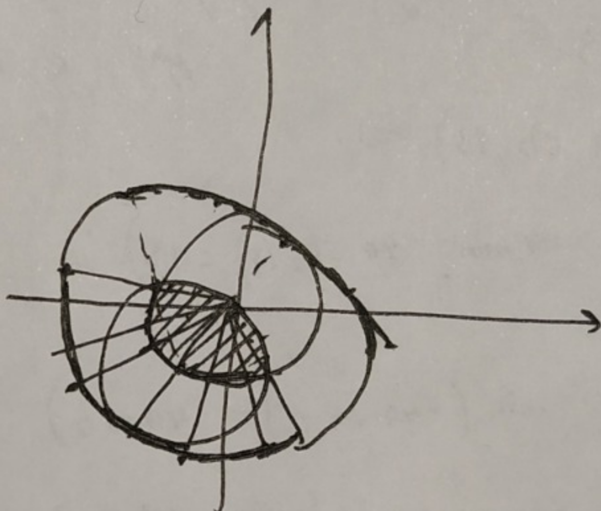
$\boxed{-10 < -5 - 3\sqrt{2} < -9} \iff 10 > 5 + 3\sqrt{2} > 9 \iff 5 > \sqrt{18} > 4 = \sqrt{16}$ ✓

$\sqrt{18}$

$\sqrt{25}$



черновик.



№3. $(x;y)\in\mathbb{R}^2:\ \exists (a;b)\in\mathbb{R}:$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13 \\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,\ 13)\end{cases} \Leftrightarrow$$

черновик.
~~круг с коорд. центра $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{13}$.~~
круг с коорд. центра $(x;y)$ и радиусом $\sqrt{13}$.

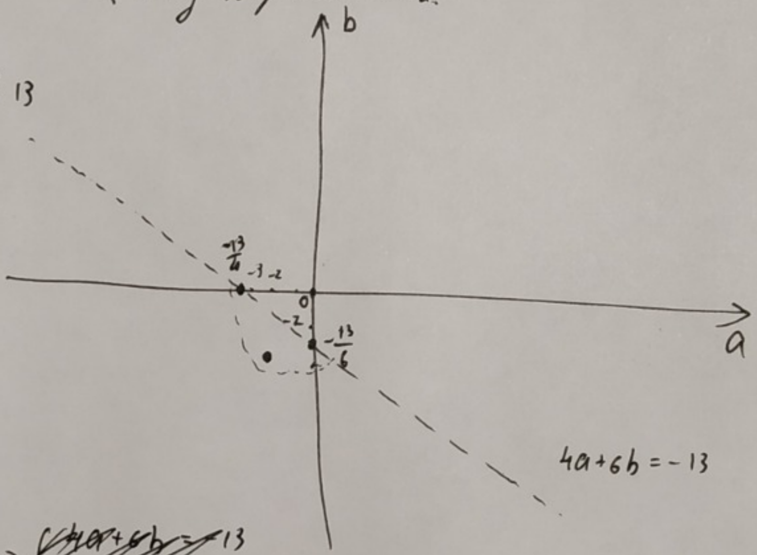
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-4a-6b\ge 13 \ (\Rightarrow \min(-4a-6b,13)=13) \\ a^2+b^2\le 13\end{cases} \\ \begin{cases}-4a-6b\le 13 \ (\Rightarrow \min(-4a-6b,13)=-4a-6b) \\ a^2+b^2+4a+6b\le 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$a^2+b^2+4a+6b\le 0 \Leftrightarrow a^2+4a+b^2+6b\le 0 \Leftrightarrow \underbrace{a^2+4a+4}_{(a+2)^2}+\underbrace{b^2+6b+9}_{(b+3)^2}\le 4+9\le 13$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4a+6b<-13 \\ a^2+b^2\le 13\end{cases} \\ \begin{cases}4a+6b\ge -13 \\ (a+2)^2+(b+3)^2\le 13\end{cases}\end{array}\right.$$

хочу нарисовать.

круг с центром в $(-2;-3)$ и рад. $\sqrt{13}$.



$4a+6b=-13$

$\underline{a=0} \Rightarrow \underline{b}=-\frac{13}{6}=\underline{-2\frac{1}{6}}$

$\underline{b=0} \Rightarrow \underline{a}=-\frac{13}{4}=\underline{-3\frac{1}{4}}$

$\begin{cases}4a+6b=-13 \\ a^2+b^2=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cancel{4a+6b=-13} \\ \cancel{a^2+4a}\end{cases}$

$a=\frac{-13-6b}{4}=-\frac{13}{4}-\frac{3b}{2}$

$\left(\frac{3b}{2}+\frac{13}{4}\right)^2+b^2=13 \Leftrightarrow \frac{9b^2}{4}+\frac{169}{16}+\frac{39b}{4}+b^2=13 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 169+36b^2+156b+16b^2=208 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 52b^2+156b-39=0 \quad |:13$

$4b^2+12b-3=0$

$\sqrt{13} \overset{>}{\vee} +\frac{13}{6} \Leftrightarrow 13 \overset{>}{\vee} \frac{13^2}{36} \Leftrightarrow 36 \overset{>}{\vee} 13$

$(-2)^2+(-3)^2=4+9=13$

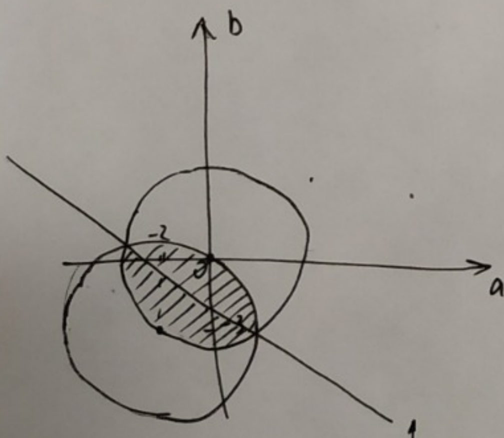
$\times\begin{array}{r}39\\4\\\hline 156\end{array}$ $\quad \times\begin{array}{r}16\\13\\\hline 48\\16\\\hline 208\end{array}$ $\quad |\cdot 16$

$b=-3$

$4\cdot 9+12\cdot(-3)-3\ne 0.$

Мда.

$-\begin{array}{r}208\\169\\\hline 39\end{array}$ $\quad \times\begin{array}{r}12\\13\\\hline 36\\12\\\hline 156\end{array}$



Мда.

Для каких $(x;y)$ $\exists (a;b)$ из вот такого мн-ва, что X наоборот!

Задать все точки $(x;y)$: есть решение у системы

$\begin{cases}\text{мяч регион} \\ \text{круг с ц. в } (x;y) \text{ и рад. } \sqrt{13}.\end{cases}$

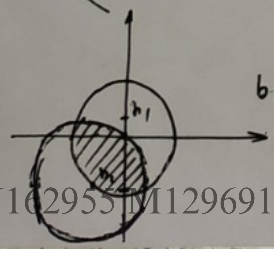
$b_2=\frac{-3-2\sqrt{3}}{2}$

$D/4=$

$6^2-4\cdot(-3)=$

$=36+12=48$

$\left[\begin{array}{l}b=\frac{-6+4\sqrt{3}}{4}=-\frac{3+2\sqrt{3}}{2} \\ b=\frac{-6-4\sqrt{3}}{4}=\frac{-3-2\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$



Чистовик.

N 2. Заметим, что точки D и C равноудалены от концов отрезка AB. $\Rightarrow$ CD лежит в пл-ти, проходящей через середину AB и $\perp$ ему. $\Rightarrow$ $\underline{CD \perp AB}$.

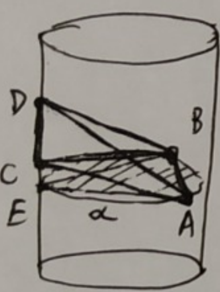
$CD \parallel$ оси цилиндра

$\Downarrow$

$AB \perp$ оси цилиндра.

$\Downarrow$

Можно провести α : плоскость $\parallel$ основаниям цилиндра, проходящую через AB.



картинка симметрична

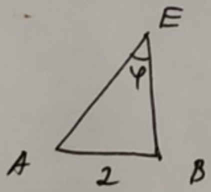
$\Downarrow$

пусть „D" выше „C" на образующей цилиндра.

$CD \cap \alpha = E$

Радиус цилиндра – радиус описанной окружности $\triangle ABE$.

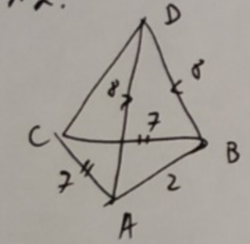
Этот радиус ≥ 1



$$R = \frac{AB}{2\sin\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi} \in [1; +\infty)$$

Итак, минимальный радиус цилиндра $= 1$.

№2.

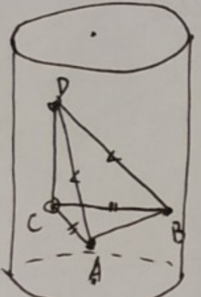


$AB = 2$

$AC = CB = 7$

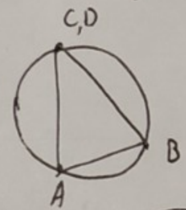
$AD = BD = 8$

Черновик.



$CD \parallel$ оси цил.

Минимизируем „ширину" цилиндра.



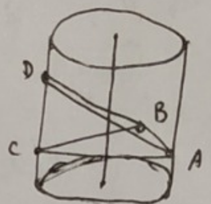
$CD = ?$

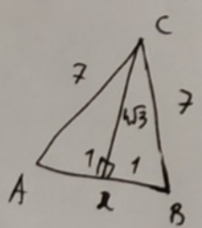
$CD \in$ сер. пер. пл-ти к AB

$\Downarrow$

$AB \perp CD$

$\boxed{AB \perp CD \parallel \text{оси}}$

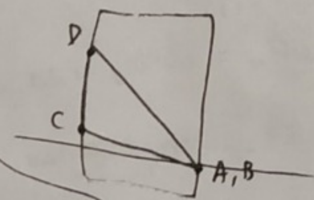




$\sqrt{49-1} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$\boxed{S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}}$

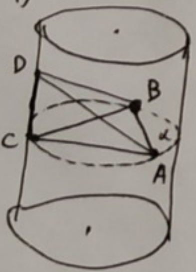
$R_{\Omega \triangle ABC} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 2}{4 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{49}{8\sqrt{3}}$



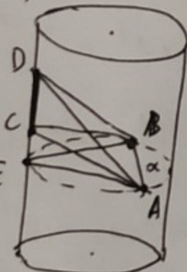
Проведём α: пл-ть $\parallel$ основаниям цилиндра, проходящую через AB.

1)

симметрично. Пусть D „выше".

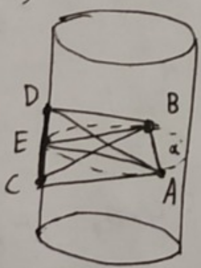


2)

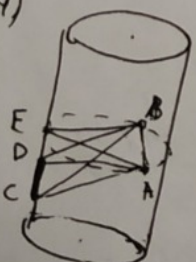


$\alpha \cap CD = E$

3)



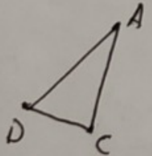
4)



$AC < AD$

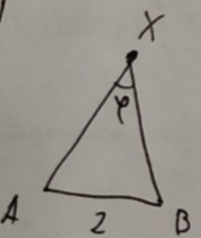
$\Downarrow$

$\boxed{\angle ADC < \angle ACD}$



4 случай не реализуется.

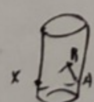
$r_ц = R_{\Omega \triangle ABE}$.



$\frac{AB}{\sin\varphi} = 2R_\Omega \Leftrightarrow R_\Omega = \frac{1}{\sin\varphi}$

$\sin\varphi \in (0; 1]$

$R_\Omega \in [1; +\infty)$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103382**

ID профиля: **162955**

Вариант 20

Чистовик.

№4.

$(a,b,c) := \text{НОД}(a;b;c)$

$[a,b,c] := \text{НОК}(a;b;c)$.

Воспользуемся каноническим разложением для чисел a, b и c.

$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots$

$b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots$

$c = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots$

Тогда

$(a,b,c) = p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\}} \cdot p_2^{\min\{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2\}} \cdot \ldots$

$[a,b,c] = p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\}} \cdot p_2^{\max\{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2\}} \cdot \ldots$

$(a,b,c) = 2^1 \cdot 5^1$

$[a,b,c] = 2^{17} \cdot 5^{16}$

(Можно отдельно заметить, что среди a, b и c нет единицы, т.к. $(1, n) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

Итак, $a = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2}$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 5^{\beta_2}$, $c = 2^{\gamma_1} \cdot 5^{\gamma_2}$, причём $\max\{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\} = 17$, $\min\{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\} = 1$;

$\max\{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2\} = 16$, $\min\{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2\} = 1$.

Тройки $(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$ и $(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$ рассмотрим по отдельности.

Кол-во троек $(a;b;c)$ = Кол-во троек $(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$ $\cdot$ Кол-во троек $(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$

I 1) Одно из чисел $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ равно 17 и одно равно единице. 6 способа ~~выбрать тройке~~ распределить „роли" между ними

17 n 1 Всего $16 - 2 + 1 = 15$ вариантов для 3-его числа.

$6 \cdot 15 = 90$ вариантов.

2) Одно – 17, два – 1. – 3 способа выбрать то, кот. = 17.

3) Два числа равны 17, одно равно 1: 3 способа выбрать то, кот. = 1.

В сумме $90 + 3 + 3 = 96$ вариантов.

II Аналогично для второй тройки:

1) одно = 16, одно = 1: $6 \cdot (15 - 2 + 1) = 6 \cdot 14 = 84$

2) одно = 17, два = 1: 3

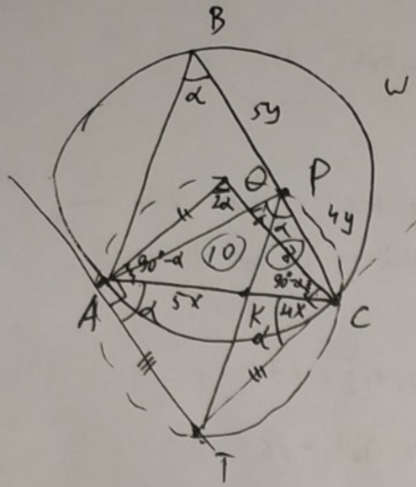
3) 3

$\Sigma = 90$ вар.

3

Ответ: 7560

Черновик.



$AT = TC$ $\quad$ $AOCT$ - дельтоид.

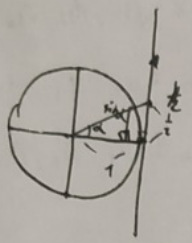
$AO = OC$ $\quad$ $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

$$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = \frac{AO}{\sin(90^\circ-\alpha)} = \frac{AO}{\cos\alpha}$$

$$\frac{AC}{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$AC = 2\sin\alpha \cdot AO$. Ида.

$$\frac{AT}{\sin\alpha} = \frac{AC}{2\sin\alpha\cos\alpha} \Leftrightarrow AC = 2AT\cdot\cos\alpha$$



$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+1^2} = \sqrt{1+\tfrac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \frac{\sqrt5}{2}$$

$$\frac{\frac{\sqrt5}{2}}{1} = \frac{\frac12}{\sin\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt5} = \frac{\sqrt5}{5}$$

$$\frac{\frac{\sqrt5}{2}}{1} = \frac{1}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt5} = \frac{2\sqrt5}{5}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt5}{5}}{\frac{2\sqrt5}{5}} = \frac12 \ \checkmark.$$

$$\boxed{S_{\triangle APB}} = \frac{5}{9}\cdot S_{\triangle ABC} = \frac{5}{9}\cdot\frac{81}{2} = \boxed{\frac{45}{2}}$$

$$\frac{45}{2} = \frac12\cdot AB\cdot\sqrt5 y\cdot\frac{1}{\sqrt5} \Leftrightarrow \boxed{AB\cdot y = 9\sqrt5}$$

$$AB^2 + 81y^2 \underbrace{-12\,AB\cdot y}_{-12\cdot 9\sqrt5} = AC^2$$

$$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 1 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{2x-8}}\left(\sqrt{2x-8}\right) \text{ ОДЗ}$$

$$\log_{(x-4)^2}(5x-26) = 1$$

$x - 4 = \sqrt{2x-8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 2x - 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 24 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \ \times \\ x=6 \end{array}\right.$

что будет.

$x = 6 \Rightarrow \log_4(4) = 1 \ \checkmark$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = \log_4(4) = 1 \ \times$

$C = 1 = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = \log_{\sqrt{5x-26}}\sqrt{5x-26} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 8 = \sqrt{5x-26} \Leftrightarrow 4x^2 - 32x + 64 = 5x - 26 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 37x + 90 = 0 \ +$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2 = \log_{\sqrt{2x-8}}(2x-8) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 4 = 2x - 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 4 \ \times.$

$B = 1 = \log_{(x-4)^2}(5x-26) = \log_{(x-4)^2}(x^2-8x+16) \Leftrightarrow 5x - 26 = x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 13x + 42 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=7 \end{array}\right.$

$A = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{14-8}} 3 = \log_{\sqrt6} 3$

$C = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = \log_{\sqrt{35-26}}(\underbrace{14-8}_{6}) = \log_3 6$

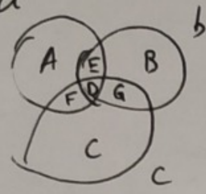
Черновик.

4. Т.ч. + комба
5. Алгебра
6. Планим.

№4.

НОД $(a;b;c) =: (a; b; c)$

НОК $(a;b;c) =: [a; b; c]$.



$$a = A \cdot E \cdot F \cdot D$$
$$b = B \cdot E \cdot D \cdot G$$
$$c = C \cdot G \cdot F \cdot D$$

$$\boxed{a = A \cdot \frac{(a,b)}{(a,b,c)} \cdot \frac{(a,c)}{(a,b,c)} \cdot (a,b,c) = \frac{A \cdot (a,c), (a,b)}{(a,b,c)}}$$

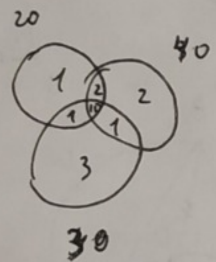
$$\boxed{b = B \cdot \frac{(a,b)}{(a,b,c)} \cdot \frac{(b,c)}{(a,b,c)} \cdot (a,b,c) = \frac{B \cdot (a,b) \cdot (b,c)}{(a,b,c)}}$$

$$c = C \cdot \frac{(a,c)}{(a,b,c)} \cdot \frac{(b,c)}{(a,b,c)} \cdot (a,b,c) = \boxed{\frac{C \cdot (a,c) \cdot (b,c)}{(a,b,c)}}$$

20, 40, 30

2, 4, 3

120



$$abc = \frac{ABC \cdot (a,c)^2 \cdot (b,c)^2 \cdot (a,b)^2}{(a,b,c)^3}$$

$[a,b,c]$: ...

Сложно.

№5: $A = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$, $B = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$, $C = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

ОДЗ:
$$\begin{cases} 2x-8>0 \\ 2x-8 \neq 1 \\ x-4>0 \\ (x-4)^2 \neq 1 \\ 5x-26>0 \\ 5x-26 \neq 1. \end{cases}$$

$$ABC = \cancel{4}\,2 \log_{2x-8}(x-4) \cdot \cancel{\tfrac{1}{2}}\,\tfrac{1}{2} \cdot \log_{x-4}(5x-26) \cdot \cancel{\tfrac{1}{2}}\,2 \log_{5x-26}(2x-8) =$$

$$= \cancel{\tfrac{1}{2}}\,2 \cdot \frac{\log_{2x-8}(x-4)}{\log_{2x-8}(5x-26)} \cdot \log_{x-4}(5x-26) = \cancel{\tfrac{1}{2}}\,2 \cdot \log_{5x-26}(x-4) \cdot \log_{x-4}(5x-26) =$$

$$= \boxed{2}$$

Два равны t, третий равен $t+1$.

$$t^2(t+1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t^3 + t^2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2t^3 + 2t^2 - 1 = 0$$

$t = \frac{1}{2}$?

$$\frac{1}{8} + \frac{2}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8} - \frac{4}{8} \neq 0.$$

$t = -\frac{1}{2}$? $\quad -\frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2} \neq 0$. ООФ.

$$\begin{cases} x>4 \\ x \neq 4{,}5 \\ x>4 \\ x-4 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 5 \\ x-4 \neq -1 \Leftrightarrow x \neq 3 \\ x > \frac{26}{5} = 5{,}2 \\ x \neq \frac{27}{5} = 5{,}4 \end{cases}$$

$\frac{26}{5}$ $\quad \frac{27}{5}$

$x \in \left(\frac{26}{5}; \frac{27}{5}\right) \cup \left(\frac{27}{5}; +\infty\right)$ — ОДЗ.

$x > 4$

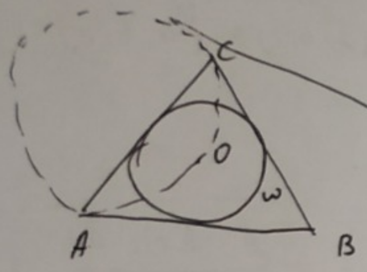
$$t^2(t+1) = 2 \Leftrightarrow t^3 + t^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t^2 + 2t + 2 = 0 \\ \underbrace{t^2 + 2t + 1}_{(t+1)^2} = -1 \quad X \end{array}\right.$$

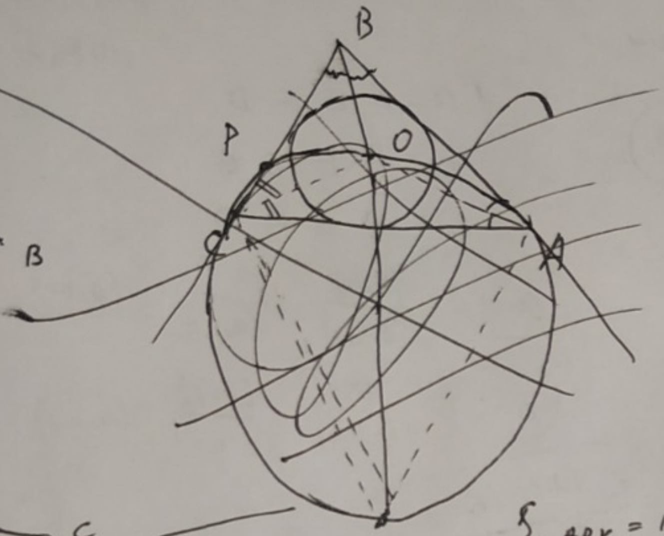
$$(t-1)(t^2 + 2t + 2)$$

$t = 1$.

21103382 (U162955 M1296912)

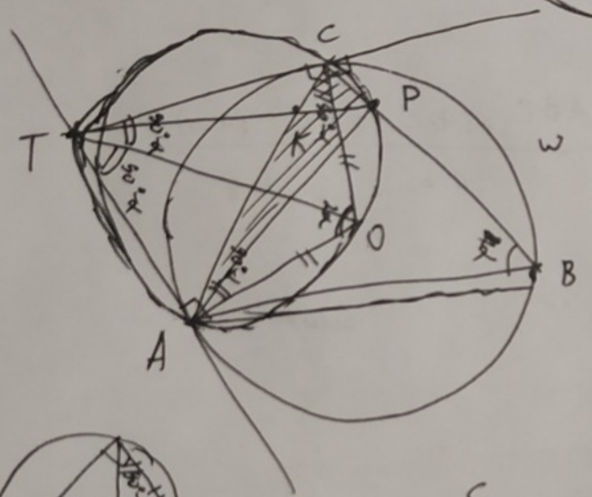
Черновик.





$S_{\triangle APK} = 10$ a) $S_{\triangle ABC} = ?$

$S_{\triangle CPK} = 8$



$\Omega_{\triangle OCA} = \Omega.$

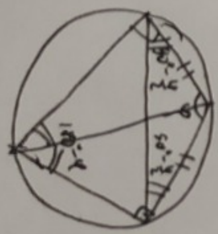
$T \in \Omega.$

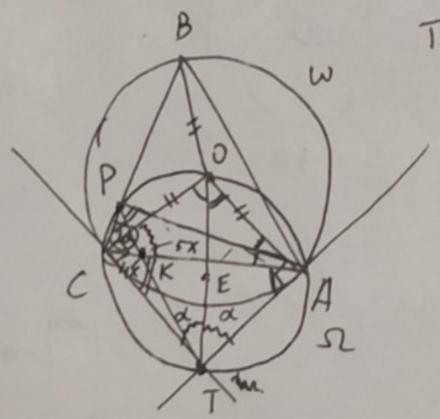
$\Uparrow$

$\angle OCT + \angle OAT =$
$= 180°.$

E- центр Ω.

$E \in OT.$

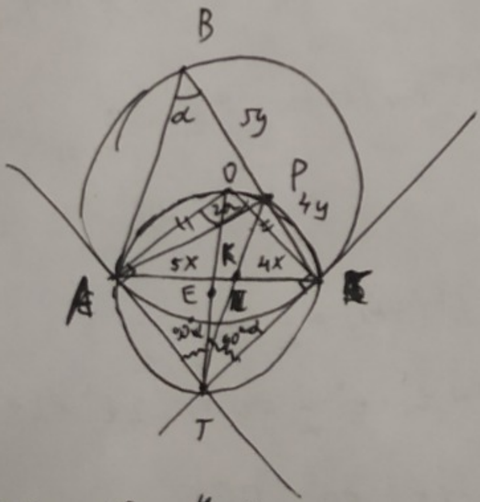




$S_{\triangle APC} = 18.$

$$\frac{S_{\triangle CKP}}{S_{\triangle PKA}} = \frac{CK}{KC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$CK = 4x$
$KC = 5x$



? $\angle BAC = \angle PKC.$

$\angle AOC = 2\alpha$

$\triangle AOC$ - равноб $\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA =$

$= \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha = \angle OTC = \angle OTA$

$\Downarrow$

$\boxed{\angle AOT = 90° - \angle OTA = = \alpha = \angle TOC.}$

now.

$\angle TOC = \angle TPC = \alpha$

$\Downarrow$

$AB \parallel TP \Rightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{5}{4}.$ $BP = 5y,$ $PC = 4y$

$S_{\triangle APC} = 18 = \frac{4}{9} S_{\triangle ABC} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{S_{\triangle ABC} = \frac{2 \cdot 81}{4} = \frac{81}{2}}$ ✓

Чистовик.

N5. $A = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$, $B = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$, $C = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$.

Все три числа $\exists$ при
$$\begin{cases} 2x-8>0 \\ \sqrt{2x-8} \neq 1 \\ x-4>0 \\ (x-4)^2 \neq 1 \\ 5x-26>0 \\ \sqrt{5x-26} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ x \neq \frac{9}{2} \\ x>4 \\ x \neq 5 \\ x \neq 3 \\ x > \frac{26}{5} \\ x \neq \frac{27}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \underline{x \in \left(\frac{26}{5}; \frac{27}{5}\right) \cup \left(\frac{27}{5}; +\infty\right)}.$$

$$\boxed{A \cdot B \cdot C} = \cancel{2} \cdot \log_{2x-8}(x-4) \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \log_{x-4}(5x-26) \cdot 2 \cdot \log_{5x-26}(2x-8) =$$

$$= 2 \cdot \log_{x-4}(5x-26) \cdot \frac{\log_{2x-8}(x-4)}{\log_{2x-8}(5x-26)} = 2 \cdot \log_{x-4}(5x-26) \cdot \log_{5x-26}(x-4) = 2$$

По условию два числа равны t, а третье равно $t+1$.
$$t \cdot t \cdot (t+1) = 2 \Leftrightarrow t^3 + t^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+2t+2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{t=1}$$

Итак, ~~условие~~ необходимо решить совокупность
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} A = B = 1 \\ C = 2 \end{cases} \text{ I} \\ \begin{cases} A = C = 1 \\ B = 2 \end{cases} \text{ II} \\ \begin{cases} B = C = 1 \\ A = 2 \end{cases} \text{ III}. \end{array}\right.$$

$$\boxed{A = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 1} \underset{\text{на ОДЗ}}{=} \log_{\sqrt{2x-8}}(\sqrt{2x-8}) \overset{\text{на ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow x-4 = \sqrt{2x-8} \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 2x - 8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \ \times \\ x=6 \end{array}\right. . \quad \boxed{x=6.}$$

$A = 1 \Leftrightarrow x = 6$.

Подставим $x=6$ в B и C. $\boxed{B = \log_{(x-4)^2}(5x-26) = \log_4(4) = 1.}$

$C = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = \log_{\sqrt{4}} 4 = 2$ ✓.

Мы разобрали случай I и показали, что случай II не реализуется.

$$\boxed{B = \log_{(x-4)^2}(5x-26) = 1} = \log_{(x-4)^2}(x-4)^2 \overset{\text{на ОДЗ}}{\Leftrightarrow} 5x-26 = x^2-8x+16 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 13x + 42 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \leftarrow \text{было.} \\ x=7 \end{array}\right.$$

Подставим $x=7$ в A и в C.

$A = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{6}} 3 \neq 2$. Не подходит. Это заканчивает исследование совокупности.

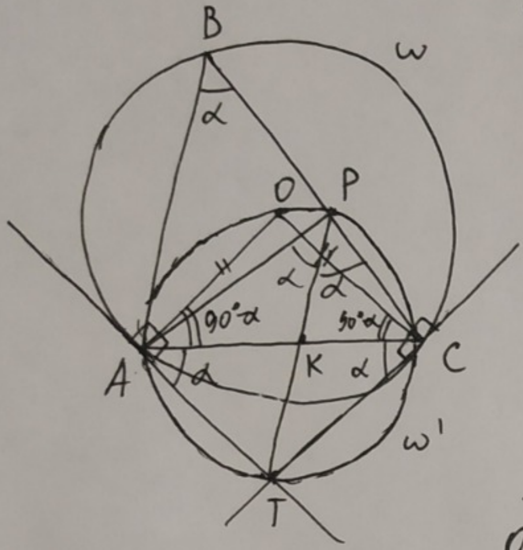
Ответ: $x \in \{6\}$.

21103382 (U162955 M1296912)

1

Чистовик.

N6.



а) OA и OC - радиусы ω => OA = OC.

Касательные к ω в точках A и C - - ⊥-ры, восстановленные к прямым OA и OC в точках A и C соответственно.

$\angle OAT + \angle OCT = 180° \Rightarrow OATC$ - впис. 4-х угольн.

Тогда $T \in \omega'$, где ω' - опис. окр. Δ ACO.

Пусть $\angle ABC = \alpha$. ~~Тогда~~ => $\angle AOC = \underline{2\alpha}$ (центральный угол окружн.).

$\angle OAC = \angle OCA = \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha$.

Отсюда $\underline{\angle CAT} = 90° - (90° - \alpha) = \underline{\alpha = \angle TCA} =$

$= \underline{\angle APT} = \angle CPT$. $\angle CPT = \angle CBA \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{PT \parallel BA}$ (секущая BC, соотв. ∠-и).

$\frac{S_{\Delta AKP}}{S_{\Delta KCP}} = \frac{10}{8} = \boxed{\frac{5}{4}} = \frac{AK}{KC} \overset{\text{(т. Фалеса)}}{=} \boxed{\frac{BP}{PC}}$, т.е. $BP = 5x$, $PC = 4x$.

$S_{\Delta ACP} = 18 = \frac{4}{9} S_{\Delta ABC} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{81}{2}$. Ответ: $\frac{81}{2}$.

2

21103382 (U162955 M1296912)

$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots$

$b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots$

$c = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots$

$(a, b, c) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}} \cdot p_2^{\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}} \cdot \ldots$

Черновик.

$[a, b, c] = p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}} \cdot p_2^{\max\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}} \cdot \ldots$

$(a, b, c) = 2^1 \cdot 5^1$

$[a, b, c] = 2^{17} \cdot 5^{16}$

Никто не : на что-то, кроме 2-ек и 5-ок.

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}$

$b = 2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}$

$c = 2^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}$

$\max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = 17$

$\max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = 16$

$\min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = 1$

$\min\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = 1$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$

$\alpha_1 \& \alpha_2, \alpha_2 \& \alpha_3, \alpha_3 \& \alpha_1$

$\cancel{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$

$$\begin{array}{r} 84 \\ \times\ 90 \\ \hline 7560 \end{array}$$

21103382 (U162955 M1296912)