Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103310**

ID профиля: **262088**

Вариант 20

Чистовик 1

① $S_5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = (a_1 + 2d)5$

$$\begin{cases} a_6 a_{11} > S + 15, \\ a_8 a_9 < S + 39; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > (a_1 + 2d) \cdot 5 + 15, \\ (a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < (a_1 + 2d)5 + 39 \quad ; \cdot(-1) \end{cases}$$

~~Вычтем:~~

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > (a_1 + 2d) \cdot 5 + 15, \\ -(a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2) > -(a_1 + 2d) \cdot 5 - 39 \end{cases}$$

Сложим неравенства в системе:

$(a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2) - (a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2) > -24$

$-6d^2 > -24$

$d^2 < 4$

$-2 < d < 2,$

т.к $\{a_n\}$ - возрастающая прогрессия, и $\{a_n\}$ - целые число, тогда $d = 1$.

$$\begin{cases} (a_1 + 5)(a_1 + 10) > (a_1 + 2) \cdot 5 + 15, \\ (a_1 + 7)(a_1 + 8) < (a_1 + 2)5 + 39; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 + 50 - 5a_1 - 25 > 0, \\ a_1^2 + 15a_1 + 56 - 5a_1 - 49 < 0; \end{cases}$$

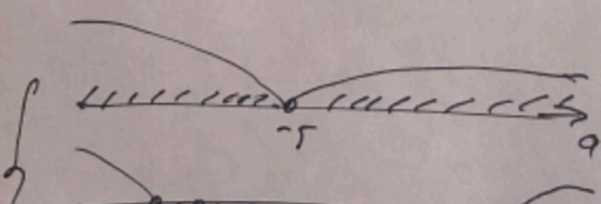
$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0, \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0; \end{cases}$$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 = 0.$

$\frac{D}{4} = 25 - 7, \quad \sqrt{\frac{D}{4}} = 3\sqrt{2}$

$a_{1,2} = -5 \pm 3\sqrt{2} \approx -5 \pm 5.1$

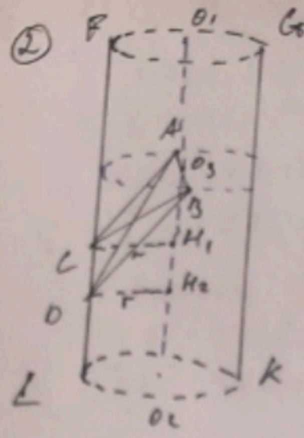
$a_1 \approx -10.1 \quad , \quad a_2 \approx 0.1.$



$a \in (-10,1; 0,1) / \{-5\}.$

Ответ: $-10; -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1; 0.$

②



Дано: ABCD - тетраэдр.
$AB = 2$, $AC = CB = 7$, $AD = DB = 8$.
FGKL - цилиндр, O_1O_2 - ось цил.
ABCD вписан в FGKL.
Найти: CD.

Решение.

1. т.к $CD \parallel O_1O_2$, $CD \perp$ основаниям цилиндра.

2. Чтобы ~~удовле~~ решение удовлетворяло условию, можно заметить, что ~~AB~~ т.A, т.B - должны лежать на окружности $\omega(O_3; r)$, так, что $\omega(O_3; r) \parallel \omega(O_1; r) \parallel \omega(O_2; r)$.

3. Чтобы r - был наименьшим, надо чтобы AB - был диаметром, $r = \frac{AB}{2} = 1$.

4. т.к $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ - равнобедренные $\Rightarrow$ CO_3 - высота $\triangle ABC$, DO_3 - высота $\triangle ABD$, а также их медианы $\Rightarrow AO_3 = \frac{AB}{2} = r$.

5. $CO_3 = \sqrt{AC^2 - AO_3^2} = \sqrt{49-1} = \sqrt{48}$
$DO_3 = \sqrt{AD^2 - AO_3^2} = \sqrt{64-1} = \sqrt{63}$.

6. Возможны два случая, когда AD и BD - идут вверх и вниз:

1. когда вниз. 2 когда вверх
$CD = O_3H_2 - O_3H_1$ $CD = O_3H_1 + O_3H_2$.

$\triangle CO_3H_1$ и $\triangle CO_3H_2$ - прямоугольные (т.к $r \parallel O_2O_1$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow O_3H_2 = \sqrt{DO_3^2 - r^2} = \sqrt{63-1} = \sqrt{62}$.
$O_3H_1 = \sqrt{CO_3^2 - r^2} = \sqrt{48-1} = \sqrt{47}$.

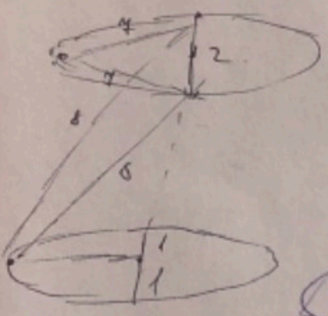
1. $CD = O_3H_2 - O_3H_1 = \sqrt{62} - \sqrt{48}$.
2. $CD = O_3H_2 + O_3H_1 = \sqrt{62} + \sqrt{48}$.

Ответ: $\sqrt{62} - \sqrt{48}$; $\sqrt{62} + \sqrt{48}$.

Черновик

(3) $(x-a)^2+(y-b)^2<13,$

$a^2+b^2\le \min(-4a-6b,13)$



72
36
18
9 26

$\sqrt{13}$ 56 49

$7,8$

$a_1-5b-15=0$

$D=25+60=85$

$a_1=\frac{5\pm\sqrt{85}}{2}$

$7\cdot 4=28$

100

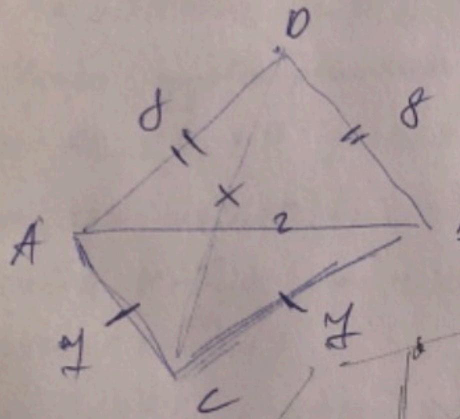
(2).

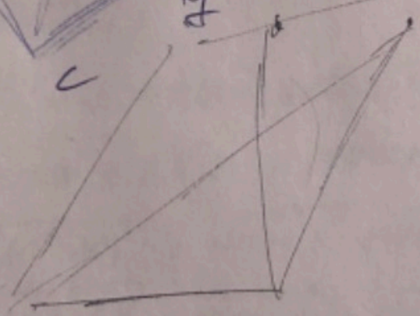
$\frac{D}{4}=25-17=9$, $\sqrt{D}=3\sqrt{2}$

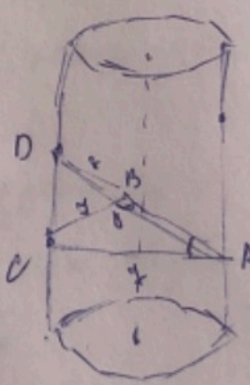
0 10.

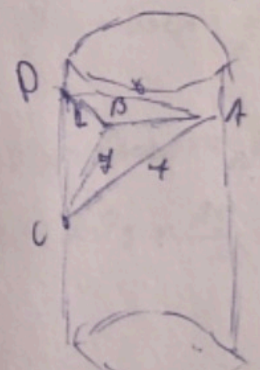
$3\sqrt{2}$

$3\cdot 1,7=5,1$







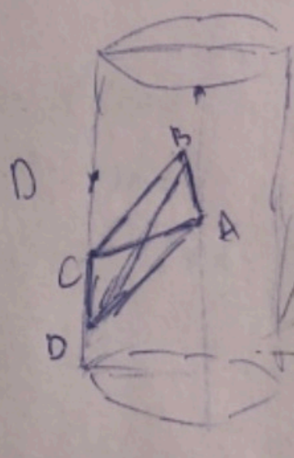


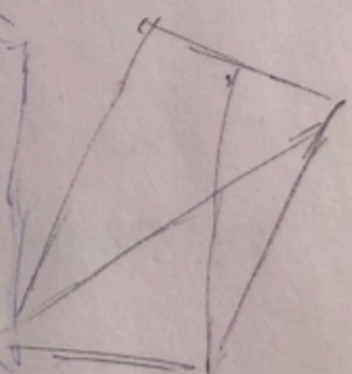
$x+2>x+1.$

$x+4>x+1.$

$2x+6>2x+2.$

$x+3>x+1.$





$(a_1\pm 5)^2>0.$

Ответ:

S_5.

черновик.

$a_6 a_{11} > S + 15$

$a_8 a_9 < S + 39.$

$(a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1 + 10d + 15$

$(a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1 + 10d\ 39$

39
15

$(a_1+5d)(a_1+10d) - 15 > 5a_1 + 10d$

$-(a_1+7d)(a_1+8d) + 39 > -5a_1 - 10d$

$(a_1+5d)(a_1+10d) - 15 - (a_1+7d)(a_1+8d) + 39 > 0$

$a_1^2 + 10a_1d + 5a_1d + 50d^2 - 15 - (a_1^2 + 7a_1d + 8a_1d + 56d^2) > 0.$

$a_1^2 + 15a_1d + 50d^2 - 15 - a_1^2 - 15a_1d - 56d^2 + 39 > 0.$

$D_1 = 25 + 40$

65

$-6d^2 + 24 > 0.$

$4 - d^2 > 0.$ $\qquad -d^2 > -4$

$0 \le d < 2.$ $\qquad d^2 < 4.$

при 0. $\qquad$ при 2.

$a_1 \cdot a_1 > 5a_1 + 15$ $\qquad (a_1+10)(a_1+20) > 5a_1 + 20 + 15$

$a_1^2 - 5a_1 - 15 > 0.$ $\qquad a_1^2 + 30a_1 + 200 - 5a_1 - 35 > 0$

$a_1 + 25a_1 + 165 > 0.$

$100 - 4 \cdot 28 = 100 - 28$

$= 72.$

$a_{1,2} = 5 \pm 3\sqrt{2}.$

$6\sqrt{2}.$ $\qquad 8 \cdot 9$

$\sqrt{2 \cdot 4 \cdot 9}.$

чистовик

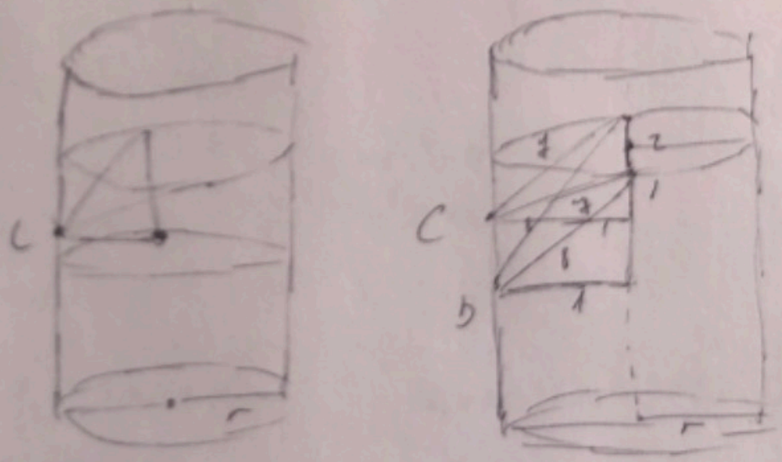
Черновик

$(x-a)^2+(y-b)^2<13$

$a^2+b^2<\min(-4a-6b,13)$

$0<-4a-6b<13$

$0<-2a-3b<6.5$



$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$ Черновик.

$a^2+b^2 \le (\min, 13)$ $\min(-4a-6b, 13)$

$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2 \le 13$

$a^2+b^2 \le 13$ $x^2-2ax+y^2-2by \le 0$

$x^2+y^2-2(ax+by) \le 0$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$

$a^2+b^2 \le -4a-6b$

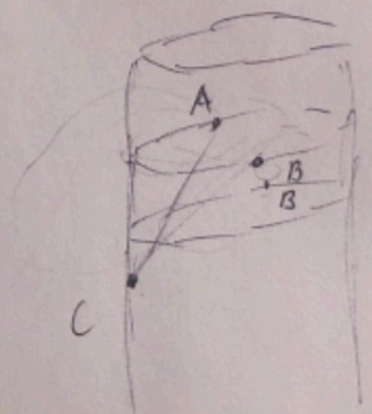
$a^2+b^2 \le -(4a+6b)$

$a^2+4a+b^2-6b \le 0$

$a(a+4)+b(b-6) \le 0$

$a^2+b^2 \le 4a+6b$

$x^2+y^2+a^2+b^2-2ax-2by \le 13$



Черновик

1). ~~q~~ S_5.

$S+15 < a_6 a_{11}$

$S+39 < a_8 a_9$

$a_6 a_{11} > S+15$

$a_8 a_9 < S+39$

~~$S = a_1 + 4d$~~

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_7 = a_1 + 6d$.

$S = \frac{2a_1+4d}{2} \cdot 5$

$d > 0$.

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > \frac{2a_1+4d}{2}\cdot 5 + 15 \\ (a_1+7d)(a_1+6d) < \frac{2a_1+4d}{2}\cdot 5 + 39. \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ 15 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1d + 5a_1d + 25d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \\ a_1^2 + 7a_1d + 6a_1d + 42d^2 < 5a + 10d + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1d + 25d^2 > 5a_1 + 10d + 15 \\ a_1^2 + 13a_1d + 42d^2 < 5a_1 + 10d + 39 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ -25 \\ \hline 17 \end{array}$$

$a_1^2 + 15a_1d + 25d^2 - 15 > 5a_1 + 10d$

$a_1^2 + 13a_1d + 42d^2 - 39 < 5a_1 + 10d$.

$a_1^2 + 13a_1d + 42d^2 - 39 < a_1^2 + 15a_1d + 25d^2 - 15$

$-2a_1d + 17d^2 < 24$.

$17d^2 - 2a_1d < 24$.

$d(17d - 2a_1) < 24$.

21103310 (U262088 M1299919)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103310**

ID профиля: **262088**

Вариант 20

⑤ 1) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2\frac{\log_2(x-4)}{\log_2(x-4)+1}$ чистовик 1 ОДЗ: 1) $\begin{cases} x-4>0 \\ 2x-8\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>4 \\ x\neq 4,5 \end{cases}$

2) $\log_{(x-4)^2} 5x-26 = \frac{\log_2(5x-26)}{2\log_2(x-4)}$ 2) $\begin{cases} 5x-26>0 \\ (x-4)^2\neq 1 \\ x-4\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>\frac{26}{5} \\ x\neq 5 \\ x\neq 3 \\ x\neq 4 \end{cases}$

3) $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2\frac{\log_2(x-4)+1}{\log_2(5x-26)}$ 3) $\begin{cases} x-4>0 \\ 5x-26>0 \\ 5x-26\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>\frac{26}{5} \\ x\neq \frac{27}{5} \end{cases}$

Пусть $\log_2(x-4)=a$, и $\log_2(5x-26)=b$, тогда

1) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \frac{2a}{a+1}$

2) $\log_{(x-4)^2} 5x-26 = \frac{b}{2a}$

3) $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = \frac{2(a+1)}{b}$

I (п.1 = п.2).

$$\begin{cases} \frac{2a}{a+1} = \frac{b}{2a} \\ \frac{2(a+1)}{b} = \frac{2a}{a+1}+1 \\ \frac{2(a+1)}{b} = \frac{b}{2a}+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{4a^2}{a+1} \\ \frac{2(a+1)^2}{4a^2} = \frac{2a}{a+1}+1 \\ \frac{2(a+1)}{b} = \frac{b}{2a}+1 \end{cases}$$

$$\frac{2(a+1)^2}{4a^2} = \frac{3a+1}{a+1}$$

$$2(a+1)^3 = (3a+1)4a^2$$

$$(a+1)^3 = 2a^2(3a+1)$$

$$a^3+3a^2+3a+1 = 6a^3+2a^2$$

$$5a^3-a^2-3a-1=0$$

Чистовик 2

$a > 1$

	5	-1	-3	-1
1	5	4	1	0

$(a-1)(5a^2+4a+1)=0.$

$a-1=0 \qquad 5a^2+4a+1=0$

$a=1 \qquad \frac{D}{4}=4-5<0.$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=\frac{4a^2}{a+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2(x-4)=1 \\ \log_2(5x-26)=2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-4=2 \\ 5x-26=4 \end{cases}$$

$x=6.$

II (п.2 = п.3)

$$\begin{cases} \frac{b}{2a}=\frac{2(a+1)}{b} \\ \frac{2a}{a+1}=\frac{b}{2a}+1 \\ \frac{2a}{a+1}=\frac{2(a+1)}{b}+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2=4a(a+1) \\ \frac{b}{2a}=\frac{2a}{a+1}-1. \\ \frac{2(a+1)}{b}=\frac{2a}{a+1}-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2=4a(a+1) \\ \frac{b}{2a}=\frac{a-1}{a+1} \\ \frac{2(a+1)}{b}=\frac{a-1}{a+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2=(a+1)4a \\ b=\frac{2(a-1)a}{a+1} \\ b=\frac{2(a+1)^2}{a-1} \end{cases}$$

$\frac{a(a-1)}{a+1}=\frac{(a+1)^2}{(a-1)}$

$a(a-1)^2=(a+1)^3$

$a^3-2a^2+a=a^3+3a^2+3a+1$

$5a^2+2a+1=0.$

$D=4-20=-16<0$ — решений нет.

III. (п.1 = п.3)

$$\begin{cases} \frac{2a}{a+1}=\frac{2(a+1)}{b} \\ \frac{b}{2a}=\frac{2a}{a+1}+1 \\ \frac{b}{2a}=\frac{2(a+1)}{b}+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=\frac{(a+1)^2}{a} \\ \frac{b}{2a}-1=\frac{2a}{a+1} \\ \frac{b}{2a}-1=\frac{2(a+1)}{b} \end{cases}$$

Чистовик 2

Чистовик 3

$$\begin{cases} b = \frac{(a+1)^2}{a} \\ \frac{2}{a+1} = \frac{2(a+1)a}{(a+1)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 1. \\ b = \frac{(a+1)^2}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2(x-4) = 1 \\ \log_2(5x-26) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-4 = 2 \\ 5x-26 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ 5x = 42 \end{cases}$$

$\varnothing$

Ответ: 6.

Чистовик 7

Чистовик 4

4) 1) Пусть x - max, y, d - другие два число

2) x - max., всегда есть в каждой тройке

$x = 2^{17} \cdot 5^{16} = 10^{16} \cdot 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y, d$ - может быть равно от 10 до $10^{16} \cdot 2$.

Кол-во таких чисел $\frac{10^{16} \cdot 2 - 10}{2} + 1 = 10^{15} \cdot 2$

3) кол-во перестановок y, d — $(10^{15} \cdot 2)^2 = 10^{30} \cdot 4$

4) кол-во перестанов внутри тройки $(a, b, c) = 3! = 6$

5) Общее кол-во: $6 \cdot 4 \cdot 10^{30} = 24 \cdot 10^{30}$

Ответ: $24 \cdot 10^{30}$.