Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103139**

ID профиля: **843502**

Вариант 20

Чистовик | Задача 1 | Лист номер 1

$S = \frac{a_1+a_5}{2} \cdot 5 = 5(a_1+2d) = 5a_1+10d$ d - разность

$a_6 a_{11} = (a_1+5d)(a_1+10d) = a_1^2+15a_1d+50d^2$

$a_6 a_{11} > S+15 \iff a_1^2+15a_1d+50d^2 > 5a_1+10d+15$;

$a_8 a_9 = (a_1+7d)(a_1+8d) = a_1^2+15a_1d+56d^2 < 5a_1+10d+39$

Теперь заменим $5a_1+10d$ на большее, неравенство, очевидно, будет выполняться:

$\cancel{a_1^2}+\cancel{15a_1d}+56d^2 < \cancel{a_1^2}+\cancel{15a_1d}+50d^2-15+39$

$6d^2 < 34$

т.к. d - целое, положительное число (из условия) то т.к. $\{a_n\}\uparrow$

$6d^2 < 34 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d=1 \\ d=2 \end{array}\right.$

~~Пусть сначала~~ Рассмотрим случай $d=1$; Можем записать систему:

$$\begin{cases} a_1^2+15a_1\cdot 1+50\cdot 1 > 5a_1+10\cdot 1+15 \\ a_1+15a_1\cdot 1+56\cdot 1 < 5a_1+10\cdot 1+39 \end{cases} \quad (1)$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0 \\ a_1^2+10a_1+7<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+5)^2>0 \\ a_1^2+10a_1+7<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2}) \end{cases}$$

но т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$ то $\begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1 \in [-9;-1] \end{cases}$ итого, нам подходят

~~$a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -5$~~ $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Рассмотрим случай $d=2$:

$$\begin{cases} a_1^2+30a_1+50\cdot 2^2 > 5a_1+25 \\ a_1^2+30a_1+56\cdot 2^2 < 5a_1+10+39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2+25a_1+175>0 \\ a_1+25a_1+175<0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$$

Все случаи d рассмотренны, получаем ответ:

Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

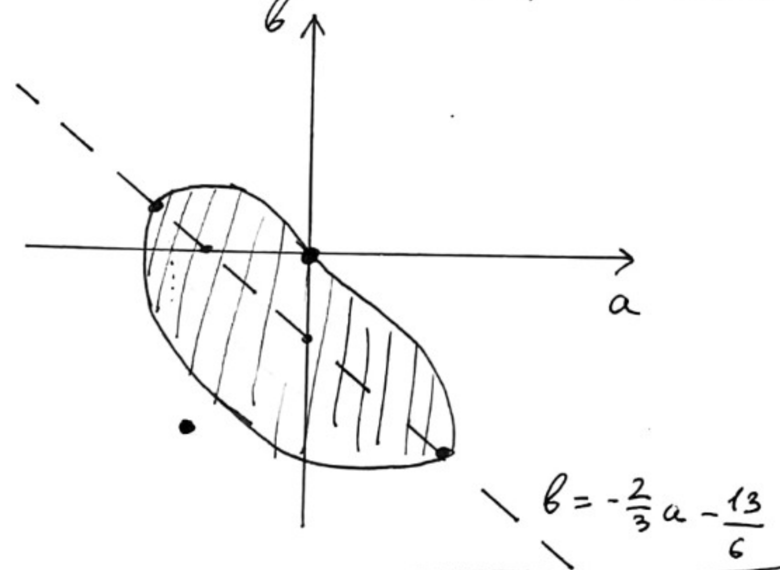
Чистовик | Задача 3

Первое нер-во задает круг, с радиусом $=\sqrt{13}$; центром $(a;b)$

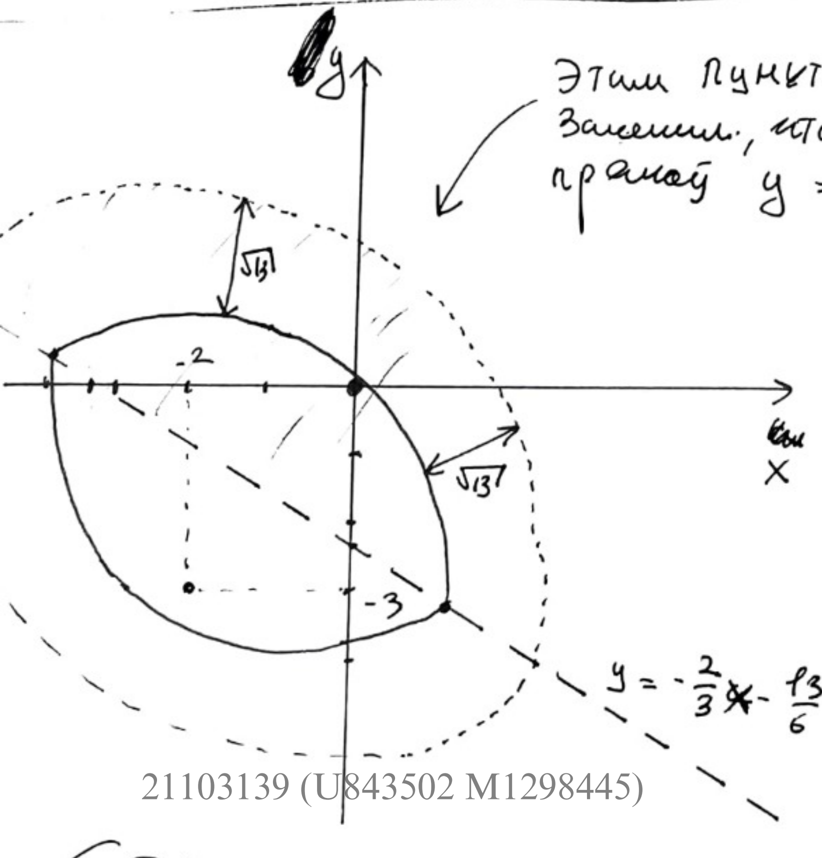
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 13 & (1)\\ a^2+b^2\leq \min(-4a-6b;13) & (2)\end{cases}$$

$$(2)\iff\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-4a-6b<13\\ a^2+b^2\leq -4a-6b\end{cases}\\ \begin{cases}-4a-6b\geqslant 13\\ a^2+b^2\leq 13\end{cases}\end{array}\right.\iff\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b>-\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}\\ (a+2)^2+(b+3)^2\leq 13\end{cases} \text{ - круг } ((-2;-3)\ R=\sqrt{13})\\ \begin{cases}b\leq -\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}\\ a^2+b^2\leq 13\end{cases}\end{array}\right.$$

Изобразим на графике aOb совокупность:



Мы изобразили множество точек $(a;b)$ из (2) нер-ва, теперь заметим, что это множество является множеством центров ~~нер~~ круга из (1) нер-ва.



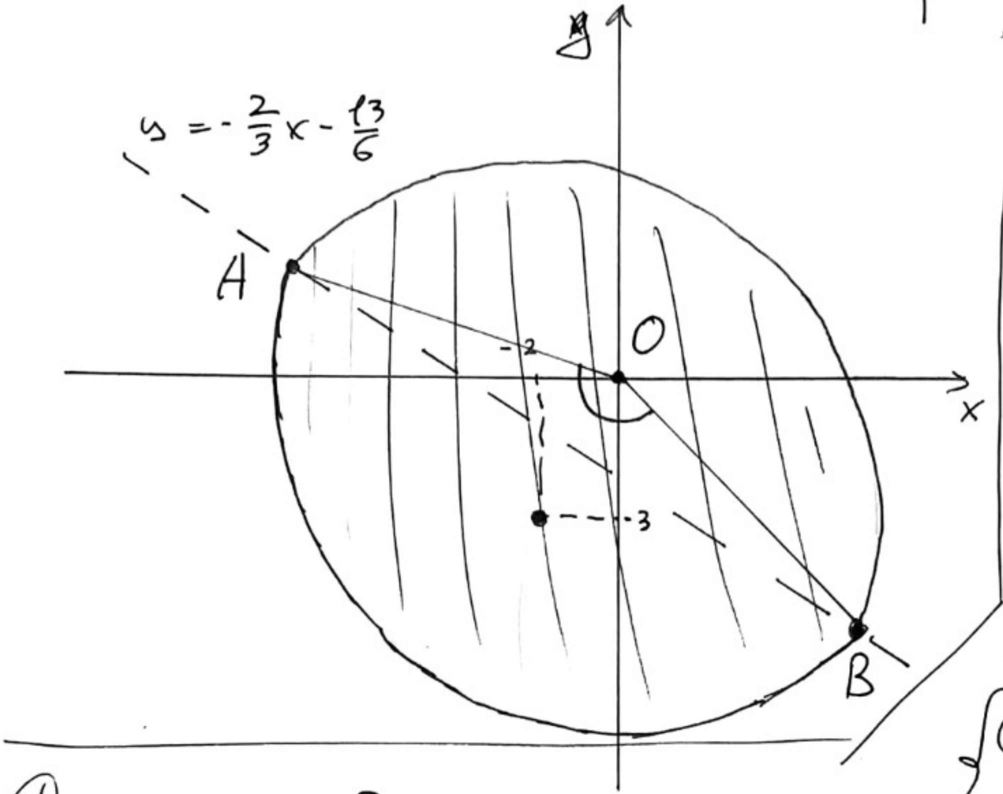
Этим пунктиром отмечена граница M. Заметим, что M - симметрично относ. прямой $y=-\frac{2}{3}x-\frac{13}{6}$;

Продолжение на странице №3

Страница 2

Чистовик Задача 3 (Продолжение) Лист № 3

Мы поняли как выглядит фигура M:



Эти две обрезанные части окружностей одинаковы по площади.

Одна часть M образована:

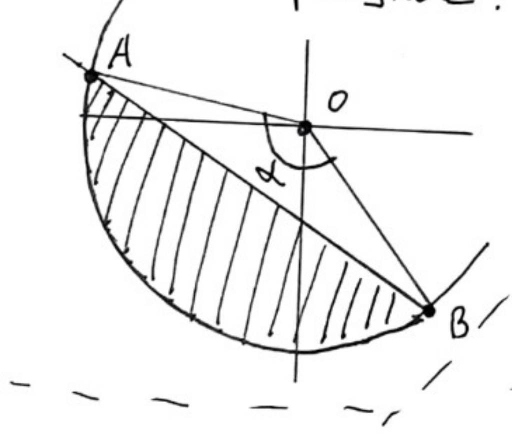
$$\begin{cases} x^2+y^2 \le (2\sqrt{13})^2 \\ y \le -\frac{2}{3}x - \frac{13}{6} \end{cases} \quad (*)$$

Другая:

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-3)^2 \le (2\sqrt{13})^2 \\ y \ge -\frac{2}{3}x - \frac{13}{6} \end{cases}$$

Для того чтобы найти S_M, нужно посчитать всего одну часть: Для удобства, будем считать площадь „Нижней" половинки, образованой (*).

Упростим рисунок:



$$S_M = \pi \cdot 4 \cdot 13 + \pi \cdot 4 \cdot 13 -$$

$$-2\,\frac{\pi \cdot 2\sqrt{13}}{2} \qquad \cancel{2\pi \cdot 4 \cdot 13 - 13\,2\pi \arccos\frac{7}{8}}$$

~~Ответ: $S = 104\pi - 2 \cdot 13 \cdot \pi - \arccos\left(-\frac{7}{8}\right)$~~

~~Ответ $S = 104\pi - 2 \cdot 13 \cdot 2\pi \cdot \arccos\left(\frac{7}{8}\right)$~~

~~Ответ $S = 104\pi - 2 \cdot 13 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \arccos\left(\frac{7}{8}\right)$~~

Ответ: $104\pi - 2 \cdot \left(2 \cdot 13 \arccos\left(\frac{7}{8}\right) - \frac{13\sqrt{15}}{4}\right)$

Часть 2

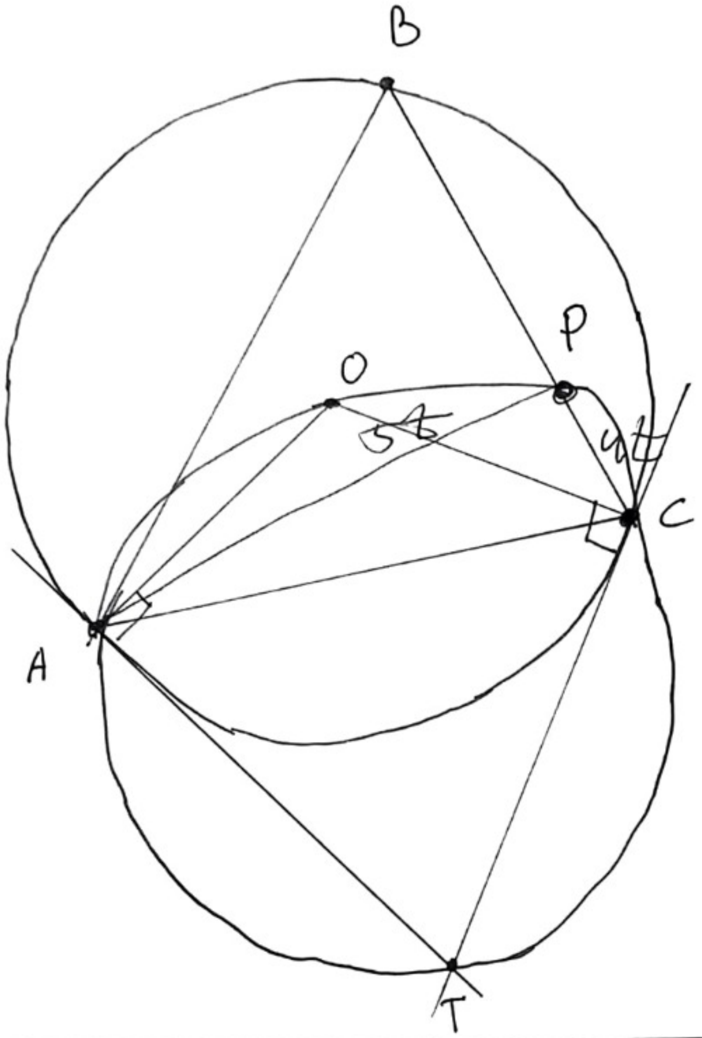
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103139**

ID профиля: **843502**

Вариант 20

Чистовик ~~Ака~~ Задача 6 Лист 1



Решение:

а) $\angle AOC = 2\alpha$, тогда $\angle ABC = \alpha$

но $\triangle AOC$ – р/б $\Rightarrow \angle ACO = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACT = \alpha$, т.к. $OC \perp TC$, но

$TC = AT \Rightarrow \angle CAT = \alpha \Rightarrow \angle ATC =$

$= 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow AOCT$ лежит

на I окр.

$\angle APT = \alpha$, т.к $\angle AOT = \angle APT$

$\angle TPC = \alpha$ аналогично $\Rightarrow PK$ – биссект

$\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{CKP}} = \frac{5\cdot 2}{4\cdot 2} = \frac{5}{4}$

$\exists\ AP = 5t$, тогда $PC = 4t$

Заметим, что $\angle KPC = \alpha =$

$= \angle ABC \Rightarrow$ Заметим что

$\angle KPC = \alpha = \angle ABC \Rightarrow PK \parallel AB \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{CK}{KA} = \frac{4}{5} = \frac{4t}{x} \Rightarrow PB = 5t$; $CB = 9t$; $CP = 4t$

$AC = 9x$ $CK = 4x$; $\frac{S_{CPK}}{S_{ABC}} = \frac{4\cancel{t}\cdot 4\cancel{x}\cdot \cancel{\frac{1}{2}}\cdot \cancel{\sin\alpha}}{9\cancel{t}\cdot 9\cancel{x}\cdot \cancel{\frac{1}{2}}\cdot \cancel{\sin\alpha}} =$

$= \frac{16}{81} = \frac{8}{S_{ABC}} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{81}{2}$

Ответ на пункт а) $S_{ABC} = \frac{81}{2} = \frac{81}{2}$

Продолж на листе 5

Чистовик / Задача 5 / Лист 2

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > \frac{26}{5} \\ x \neq \frac{9}{2} \\ x \neq \frac{27}{5} \end{cases}$$

Запишем ~~систему~~ совокупность из условия:

$$\left[\begin{array}{l}
\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26) \quad (1) \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)+1 \end{cases} \\[2ex]
\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) \quad (1) \\ \log_{(x-4)^2}(5x-26) = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)+1 \end{cases} \\[2ex]
\begin{cases} \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = \log_{(x-4)^2}(5x-26) \quad (1) \\ \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)+1 \end{cases}
\end{array}\right.$$

Рассмотрю произведение:

$$\log_{2x-8}(x-4)^2 \cdot \log_{(x-4)^2}(5x-26) = 2\log_{2x-8}\sqrt{5x-26}$$

$$\Downarrow$$

$$\log_{\sqrt{5x-26}} 2x-8 = \frac{2}{\log_{2x-8}(x-4)^2 \cdot \log_{(x-4)^2}(5x-26)}$$

Аналогично:

$$\log_{2x-8}(x-4)^2 = \frac{2}{\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) \cdot \log_{(x-4)^2}(5x-26)}$$

Продолжение на листе № 3

Чистовик // Задача 5 / лист 3 /

Аналогично:

$$\log_{(x-4)^2} 5x-26 = \frac{2}{\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)\cdot\log_{(2x-8)}(x-4)^2}$$

Подставлю в совокупность:

$$\frac{2}{\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)\cdot\log_{2x-8}(x-4)^2} = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)+1$$

т.к. $\log_{2x-8}(x-4)^2 = \log_{5x-26} 2x-8$;

$$\frac{2}{\left(\log_{2x-8}(x-4)^2\right)^2} = \log_{2x-8}(x-4)^2+1$$

$\log_{2x-8}(x-4)^2 = t$ (Аналогично для $\log_{(x-4)^2} 5x-26$; $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$)

$\frac{2}{t^2} = t+1$; $2 = t^3+t^2$; $t^3+t^2-2=0 \Rightarrow (t-1)((t+1)^2+1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t=1$; $(t+1)^2 \neq -1$; Теперь решу каждое из уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 5x-26=(x-4)^2 \\ 2x-8=\sqrt{5x-26} \\ (x-4)^2 = 2x-8 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{12}=6,7 \\ x_{12}\in\varnothing \\ x_{12}=4,6 \end{array}\right.$$

Подставляю каждый x в соотв систему и проверю, чтобы в (1) всё было верно

21103139 (U843502 M1298446)

Продолжение на листе 4

Чистовик // Задача 5 // Лист 4

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$! $x=6$ => $\log_2 2 = \log_4 4$ V верно

$x = 6$ — решение:

$x = 7$

$\log_{\sqrt{6}} 3 \neq \log_9 9$?! не подходит.

Подставляю в другие ур-ия только $x = 7$, т.к. $x = 6$ уже решение: а $x = 4 \notin$ ОДЗ

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$ $x = 7$:

$\log_{\sqrt{6}} 3 \neq \log_3 6$?! не подходит.

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$ $x = 7$:

$\log_3 6 \neq \log_9 9$?! не подходит

значит $x = 7$ — не подходит т.к. не явл. решен.

Ответ: $x = 6$

Чистовик / Задача 6 Лист 5

б) $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ $\quad \angle APC = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

$S_{APC} = 5t \cdot 4t \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow t = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$PC = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6 \Rightarrow AP = \cancel{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$.

T. cos!

$AC^2 = (6)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 - 2 \cdot 6 \cdot \frac{15}{2} \cdot \cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$

$\Downarrow$

$AC = \frac{3\sqrt{17}}{2}$

Ответ: $AC = \frac{3\sqrt{17}}{2}$.