Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103132**

ID профиля: **110670**

Вариант 20

Чистовик (20 вар.) ①

N1

$a_2 = a_1 + h;\ a_3 = a_1 + 2h \ldots$

$a_6 = a_1 + 5h,\ a_{11} = a_1 + 10h;\ a_8 = a_1 + 7h;\ a_9 = a_1 + 8h$

$S = a_1 + \ldots + a_5 = 5a_1 + \frac{(h+4h)\cdot\cancel{4}^{2}}{2} = \underline{5a_1 + 10h}$

$a_6\, a_{11} > S + 15$

$(a_1 + 5h)(a_1 + 10h) = a_1^2 + 15a_1h + 50h^2 > 5a_1 + 10h + 15$

$(a_1 + 7h)(a_1 + 8h) = a_1^2 + 15a_1h + 56h^2 < 5a_1 + 10h + 39$

$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1h + 50h^2 > 5a_1 + 10h + 15 \\ a_1^2 + 15a_1h + 56h^2 < 5a_1 + 10h + 39 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -6h^2 > -24$ (из большего вычитаем меньшее, а из меньшего большее, так что нер-во выполняется) $\Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 < 6.$

Т.к. все числа целые, то h тоже целое (если предполож. обратное, то после целого числа будет идти нецелое, что противоречит условию) $\Rightarrow h = \pm 1; \pm 2$. Прогрессия возраст. $\Rightarrow h > 0 \Rightarrow h = 1$ или $h = 2$.

Рассмотрим два этих случая.

1) $h = 1$

$\begin{cases} a_1^2 + \cancel{15a_1}^{10a_1} + \cancel{50}^{+25} > \cancel{5a_1}^{0} + 25 \\ a_1^2 + \cancel{15a_1}^{10a_1} + \cancel{56}^{7} < \cancel{5a_1}^{0} + 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \neq -5 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$D = 25 - 7 = 18 \Rightarrow a_1 = -5 \pm 3\sqrt{2} \Rightarrow a \in (-5 - 3\sqrt{2}; -5) \cup (-5; -5 + 3\sqrt{2})$

21103132 (U110670 M1297489)

Чистовик ②

2) $k=2$

$$\begin{cases} a_1^2 + \overset{25a_1}{\cancel{30a_1}} + \overset{165}{\cancel{200}} > \cancel{5a_1} + \cancel{20} + \cancel{15} \\ a_1^2 + \overset{25a_1}{\cancel{30a_1}} + \overset{165}{\cancel{274}} < \cancel{5a_1} + \cancel{20+30} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 25a_1 + 165 > 0 \\ a_1^2 + 25a_1 + 165 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

$a_1 \in (\underset{-9,\dots}{\underset{22}{-5-3\sqrt{2}}}; -5) \cup (-5; \underset{-0,\dots}{\underset{22}{-5+3\sqrt{2}}})$ ($\underbrace{\text{за } \sqrt{2} \text{ я беру}}_{\text{для приблизительной оценки}}$ 1,4)

Т.к. a_1 - целое (т.к. все чл. прогр. целые), то

$a_1 = \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$.

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$.

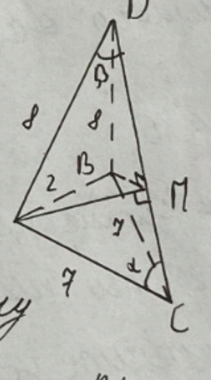
N 2

~~Решени~~ Решение.

Дано:
$ABCD$ - тетр.
$AB = 2$
$AC = CB = 7$
$AD = DB = 8$

$CD - ?$

1) Т.к. $\triangle ADC = \triangle BDC$ по 3-ём сл-ам, то высоты AM и BM, опущенные на CD, попадут в одну точку (пусть эт будет точка M)



2) Т.к. CD парал. оси цилиндра, то пл-ть (ABM) будет ей перпенд., а следовательно (ABM) парал. основ. цилиндр, значит рад. окр-ти, описанной вокруг ABM, равен радиусу цилиндра

3) Т.к. $AB = 2$, то диам. не может быть больше 2. Нам нужен наим. рад., он будет достиг. , когда AB - диам., то есть $\angle AMB = 90°$ (т.к. опир. на диам.)

4) $AM = MB$ (из рав-ва $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$) $\Rightarrow AM = MB = \sqrt{\frac{2^2}{2}} = \sqrt{2}$

4) Пусть $\angle ACM = \alpha$; $\angle ADM = \beta$, тогда ③ т.к. $\angle M = 90°$, то углы острые, следов. $\cos > 0$

$AM = 7 \cdot \sin\alpha$; $AM = 8 \cdot \sin\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{7} \\ \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{\sqrt{47}}{7} \\ \cos\beta = \frac{\sqrt{62}}{8} \end{cases}$

Распишем т. кос. для CD:

$CD^2 = 64 + 49 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos(180° - \alpha - \beta) = 113 + 112\cos(\alpha + \beta) =$

$= 113 + 112(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) =$

$= 113 + 112\left(\frac{\sqrt{47}}{7}\frac{\sqrt{62}}{8} - \frac{2}{56}\right) = 113 + 2\sqrt{2914} - 4 =$

$= 109 + 2\sqrt{2914}$

Ответ: $109 + 2\sqrt{2914}$.

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times\ 47 \\ \hline 434 \\ +\ 248 \\ \hline 2914 \end{array}$$

~~N 3~~

Чёрная ручка закончилась.

N3

$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 13 \\ a^2 + b^2 \le \min(-4a - 6b; 13) \end{cases}$

~~1) $\begin{cases} -4a - 6b < 13 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 13 \\ a^2 + b^2 \le -4a - 6b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 6b < 13 \\ x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 \le 13 \\ a^2 + b^2 \le -4a - 6b \end{cases}$~~

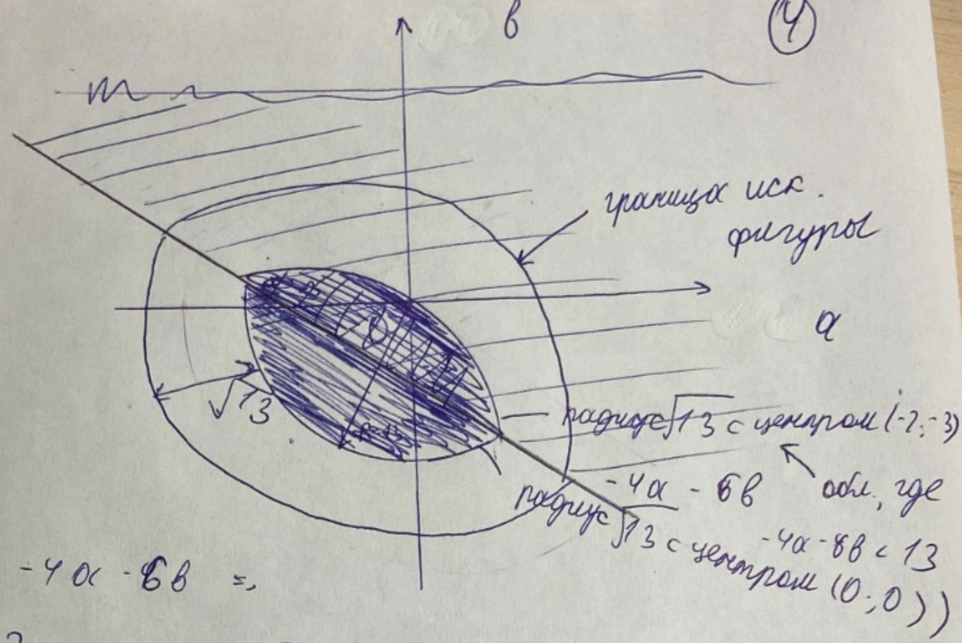
~~$x^2 + y^2 - 2ax - 2by - 4a - 6b \le 13$~~

Построим граф.: 1) $-4a - 6b < 13$; 2) $(a^2 + b^2) \le 13$ и

3) $a^2 + b^2 \le -4a - 6b$

③

21103132 (U110670 M1297489)



$a^2 + в^2 \le -4a - 6в \Rightarrow$

$\Rightarrow (a+2)^2 + (в+3)^2 \le 13$

В закрашенной области такие а и в будут существ. из каждой точки можно выпустить окр. с радиус $\sqrt{13}$, и у нас получится искомая фигура (большой печерч. круг.)

Его площадь будет: $2\pi r^2 \cdot R$, часть, которую мы отсекли $= 2\pi(\ldots) R.$

$2\pi \cdot 4 \cdot 13 = \underline{8 \cdot 13\pi \cdot R} = 104\pi \cdot R$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times \; 8 \\ \hline 104 \end{array}$$

21103132 (U110670 M1297489)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103132**

ID профиля: **110670**

Вариант 20

Чистовик

10 вариант

(1)

N1

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

Пусть $a=10\cdot a'$; $b=10\cdot b'$; $c=10\cdot c'$; дальше будем работать с a'; b'; c'

$\underline{a'b'c' \vdots 2^{16}\cdot 5^{15}}$

Чтобы условие с НОД и НОК выполнялись, одно из чисел должно иметь макс. степень двойки (наприме $a'=2^{16}\cdot 5^{\dots}$), а одно минимальную (нампример $b'=2^{0}\cdot 5^{\dots}$). Оставшееся число может иметь любую степень (от 0 до 16 для двойки, и от 0 до 15 для пятерки).

~~Рассмотрим общее кол-во случаев~~

~~$(3\cdot 2\cdot 17)\cdot(3\cdot 2\cdot 16)=9\cdot 4\cdot 17\cdot 16=9792$~~

~~Ответ: 9792.~~

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 16 \\ \hline 102 \\ 17\ \ \\ \hline 272 \\ \times\ 36 \\ \hline 1632 \\ 816\ \ \\ \hline 9792 \end{array}$$

Для удобства отдельно посчитаем случаи, когда оставшееся число имеет различную от макс. и мин. степень, и когда нет.

$(3\cdot 2\cdot 15+3+3)$

оставш. число

для двоек

вар. для числа с макс. степенью

с мин. степенью

два числа с макс/мин. степенями

Общее кол-во случаев:

$(3\cdot 2\cdot 15+6)(3\cdot 2\cdot 14+6)=96\cdot 90=8640$

Ответ: $\underline{8640}$.

=)

Чистовик

№2

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$; $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$; $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$ =

ОДЗ: $\begin{cases} 2x-8>0 ; \neq 1 \\ x-4>0 \\ 5x-26>0 ; \neq 1 \\ 2x-8>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>4 ; \neq \frac{9}{2} \\ x>\frac{26}{5} ; \neq \frac{27}{5} \end{cases} \Rightarrow x>\frac{26}{5} ; \neq \frac{27}{5}$

$2\log_{2x-8}(x-4)$; $\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$;
$2\log_{5x-26}(2x-8)$

Пусть $(x-4)=(2x-8)^{a}$; $(5x-26)=(x-4)^{b}=$
$=(2x-8)^{ab}$; $\log_{(x-8)^{ab}}(2x-8)=\frac{1}{ab}$

$2a$; $\frac{1}{2}ab$; $\frac{1}{ab}$

Рассмотрим 3 случая:

1) $2a=\frac{1}{2}ab \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ \begin{cases} a\neq 0 \\ b=4 \end{cases} \end{array}\right.$ - не подходит, т.к. тогда $2x-8=1$

$\frac{1}{ab}=2a+1 \Rightarrow \frac{1}{4a}=2a+1 \Rightarrow 8a^2+4a-1=0 \Rightarrow$
$\Leftarrow$, $D=4+8=12$

$a=\frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{4}$

2) $2a=\frac{1}{ab} \Leftrightarrow 2a^2b=1$

$\frac{1}{2}ab=2a+1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2a}\right)=2a+1 \Rightarrow \frac{1}{4a}=2a+1 \Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

21103132 (U110670 M1297490)

Чистовик (3)

$b = \underline{8 \pm 4\sqrt{3}}$

$\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{3+1-2\sqrt{3}}{16} = \frac{2-\sqrt{3}}{8}$

$\frac{1\cdot 84}{2(2-\sqrt{3})} = 4(2+\sqrt{3})$

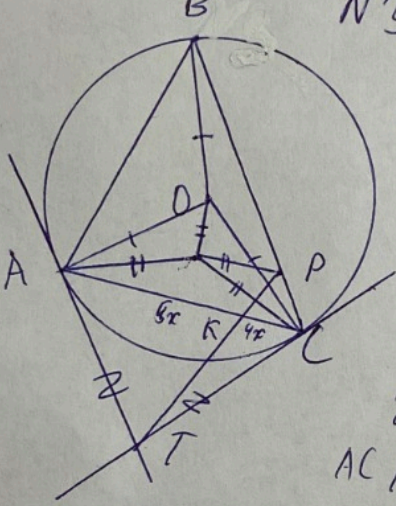
$= 8+4\sqrt{3}$

аналогично с минус.

3) $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{ab} \Rightarrow ab = \sqrt{2}$

$2a = \frac{1}{2}ab + 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \\ a = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \end{array}\right.$

N3



Решение:

1) $\frac{S(APK)}{S(CPK)} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{5}{4}$ (т.к. треуг. имеют общ. высоту)

2) По т. синусов:

$AC / \sin\angle ABC = R$ (рад. опис. окр. вокруг $\triangle ABC$)

$AC / \sin\angle AOC = r$ (рад. опис. окр. вокруг $\triangle AOC$)

3) $\sin\angle AOC = \sin 2\angle ABC = 2\sin\angle ABC \cdot \cos\angle ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{AC}{2\sin\angle ABC \cos\angle ABC} = \frac{R}{2\cos\angle ABC} \Rightarrow \frac{R}{r} = 2\cos\angle ABC$

Черновик

(1)

N 4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=10 \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

$a=10\cdot a'$ $\quad a'\cdot b'\cdot c' = 2^{16}\cdot 5^{15}$

$b=10\cdot b'$

$c=10\cdot c'$

$\cancel{\frac{17\cdot 17}{2}}$ $\quad \cancel{\frac{16\cdot 16}{2}}$

$$\left(17+\frac{17\cdot\cancel{16}^{8}}{2}\right)\left(16+\frac{\cancel{16}^{8}\cdot 15}{2}\right)=$$

$$=17\cdot 9\cdot 16\cdot 9 = 22032$$

$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot$

$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot$

N 5

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$; $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$;

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$2\log_{2x-8}(x-4)$; $\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$;

$2\log_{5x-26}(2x-8)$

Пусть $(x-4)=(2x-8)^{\alpha}$; $(5x-26)=(x-4)^{b}=(2x-8)^{\alpha b}$

2α; $\frac{1}{2}\alpha b$; $\frac{1}{\alpha b}$

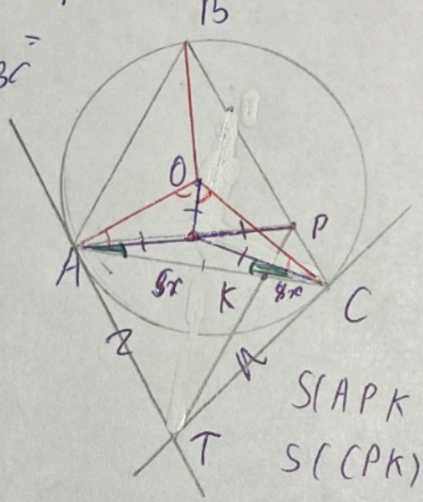
$\log_{(2x-8)^{\alpha b}}(2x-8)=\frac{1}{\alpha b}$

~~Черновик~~ Ч~~истовик~~
Черновик

②

$R = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$; $r = \frac{AC}{2 \sin \angle ABC \cos \angle ABC} =$

$= \frac{R}{2 \cos \angle ABC}$



$S(APK) = 10$
$S(CPK) = 8$