Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103114**

ID профиля: **316878**

Вариант 20

Чистовик

$\boxed{1}$

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$a_6 a_{11} > S + 15$

$a_8 a_9 < S + 39$

$a_1 - ?$

$d > 0$

$a_1 \in \mathbb{Z}$

$d \in \mathbb{Z}$

Решение

$S = 5a_1 + 10d$

(a_1 – первый член, d – разность)

$a_6 a_{11} = (a_1 + 5d)(a_1 + 10d)$

$a_8 a_9 = (a_1 + 7d)(a_1 + 8d)$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 5a_1 + 10d + 15 < a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 \\ 5a_1 + 10d + 39 > a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 \end{cases}$$

$\Downarrow$

1) если $a_1 \geq 5 \Rightarrow 5a_1 \leq a_1^2$; $10d < 15a_1 d$; $39 < 56d^2$

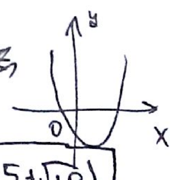
$\Rightarrow 5a_1 + 10d + 39 < a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2$

(противоречие) $\Rightarrow \boxed{a_1 < 5}$

2) $$\left.\begin{cases} 5a_1 + 10d + 39 > a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 \\ -5a_1 - 10d - 15 > -a_1^2 - 15a_1 d - 50d^2 \end{cases}\right| + \Rightarrow 24 > 6d^2$$

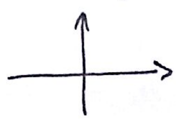
$$\left.\begin{cases} d^2 < 4 \\ d > 0 \text{ (возраст.)} \end{cases}\right| \Rightarrow \underline{d \in \{1; 2; 3\}}$$

3) (1): $\underline{d = 1} \Rightarrow \begin{cases} 5a_1 + 10 + 15 < a_1^2 + 15a_1 + 50 \Rightarrow a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -5 \\ 5a_1 + 10 + 39 > a_1^2 + 15a_1 + 56 \Rightarrow a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \Rightarrow \end{cases}$



корни: $a_1 = \dfrac{-10 \pm \sqrt{72}}{2} = -5 \pm \sqrt{18} \Rightarrow$ $\boxed{a_1 \in (-5 - \sqrt{18}; -5 + \sqrt{18})}$

(2) $\underline{d = 2}$ $\begin{cases} 5a_1 + 20 + 15 < a_1^2 + 30a_1 + 200 \Rightarrow a_1^2 + 25a_1 + 165 > 0 \\ 5a_1 + 20 + 39 > a_1^2 + 30a_1 + 224 \Rightarrow a_1^2 + 25a_1 + 165 < 0 \end{cases}$ || $\boxed{\text{нет реш}}$



Чистовик

$\boxed{1}$ (продолжение)

3) (3): $\underline{d=3}$: $\begin{cases} 5a_1 + 30 + 15 < a_1^2 + 45a_1 + 450 \\ 5a_1 + 30 + 39 > a_1^2 + 45a_1 + 504 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 40a_1 + 405 > 0 \\ a_1^2 + 40a_1 + 435 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} D_1 = 1600 - 1620 < 0 \Rightarrow a_1 \text{ - люб} \\ D_2 = 1600 - 1600 - 140 < 0 \Rightarrow \text{нет реш.} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{нет реш.}}$

$\left[\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}\right. \Rightarrow a_1 \in (-5-\sqrt{18}; -5+\sqrt{18})$; $5 > \sqrt{18} > 4 \Rightarrow$ т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$:

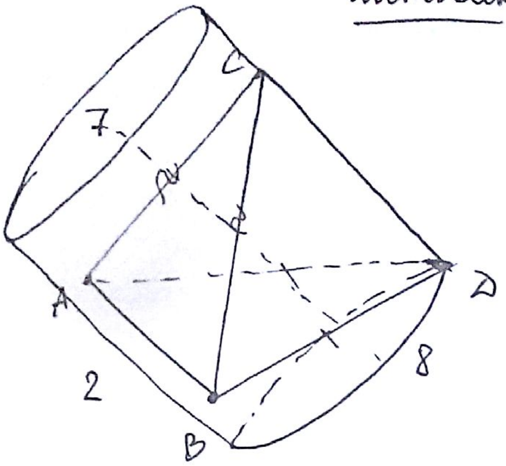
$a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$.

Чистовик

2

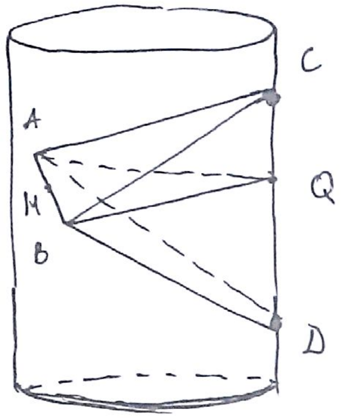
Решение



1) Заметим, что $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ нам задаются условием однозначно (по трем сторонам),

а вот их положение относительно друг друга условием ограничивается только тем, что AB – общ.

2)



Выберем точку Q, такую, что $(ABQ) \perp CD$

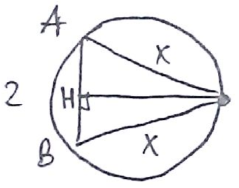
(она существ. т.к ГМТ ~~...~~ на расст. 7 от C это ~~окр.~~ сфера с $r_1 = 7$;

ГМТ на расст 8 от D это ~~окр.~~ сфера с $r_2 = 8$

Из осевой симметрии эти сферы $\perp$ по окружности, плоскость которой $\perp CD \Rightarrow (ABQ) \perp CD$

3) Тогда $\triangle ABQ$ вписан в окружн. с $R = R_{цилин.}$ ($\boxed{\text{пл-ть } \triangle\text{-ка} \perp}$ $CD \parallel \boxed{\text{оси}}$

$\Rightarrow$ пл-ть $\perp$ оси цилиндра в сечении дает окр. с $R = R_{цил.}$)



$AB = 2$

$X = AQ = BQ$ т.к.: $\triangle BCD = \triangle ACD$ по трем сторонам (CD – общ.)

$\Rightarrow$ т.к. $(ABQ) \perp CD \Rightarrow BQ$ – высота в $\triangle BCD$

AQ – высота в $\triangle ACD$

$\Rightarrow$ в равных $\triangle$-ках соотв. высоты равны $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{AQ = BQ}$ ч.т.д.

$\Rightarrow \cancel{\left(S_{\triangle ABQ} = \frac{2}{2} \cdot \sqrt{X^2 - 1^2} = \sqrt{X^2 - 1^2} \right.}$ $\cancel{S_{\triangle ABQ} = p}$

Проведем высоту, мед, биссек. QH (т.к. он р.б)

Тогда $\cancel{R = \frac{abc}{}}$ $R_{цил} = \dfrac{AB \cdot BQ \cdot QA}{4 S_{\triangle ABQ}}$; $S_{\triangle ABQ} = \frac{2}{2} \cdot \sqrt{X^2 - 1^2} = \sqrt{X^2 - 1^2}$

$R_{цил} = \dfrac{2X^2}{4\sqrt{X^2 - 1^2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{X^4}{X^2 - 1}} \Rightarrow$

<u>Чистовик</u>

$\boxed{2}$ продолжение

$\Rightarrow R_{упл} = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-1}}$; $R'_{упл} = \frac{2x\cdot 2\sqrt{x^2-1} - \frac{2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x}{4(x^2-1)} = 0$ (min)

$2x\left(2\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = 0$ // $x > 1$ по нер-ву $\triangle$-ка

$x \neq 0 \Rightarrow 2\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

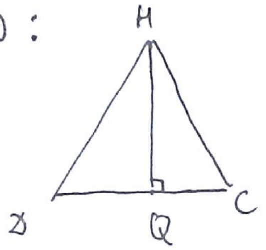
$x^2 - 1 = \frac{1}{2}$

$\boxed{x = \sqrt{\frac{3}{2}}}$ / до этого x $R_{упл}\downarrow$, после $\uparrow \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при этом x <u>$R_{упл}$-min</u>

Тогда $\boxed{QH} = \sqrt{x^2-1} = \boxed{\sqrt{\frac{1}{2}}}$

Рассм. $\triangle CHD$:



Из ~~...~~ $\triangle ACB$: CH – биссек, мед, выс

$\Rightarrow \boxed{CH} = \sqrt{49-1} = \boxed{\sqrt{48}}$

Аналогично $\boxed{DH} = \sqrt{64-1} = \boxed{\sqrt{63}}$

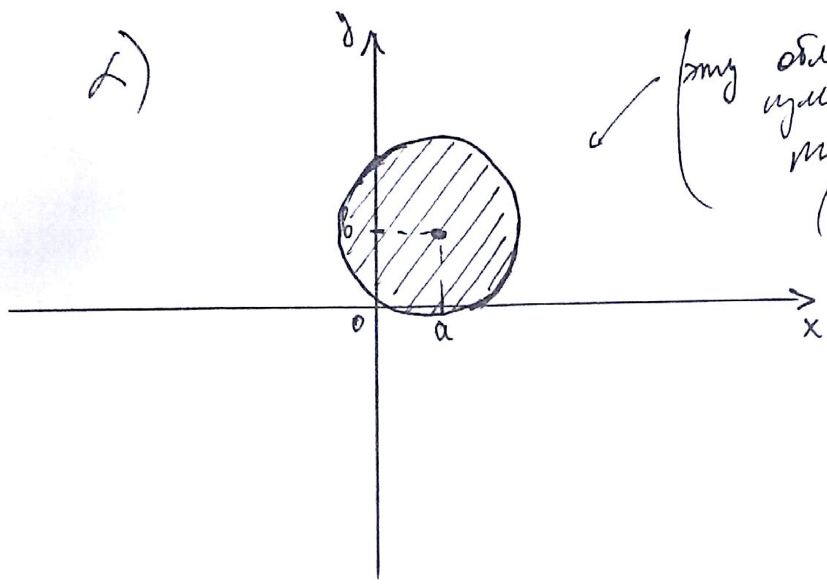
$\Rightarrow$ по Th Пифагора в $\triangle HQC$ и $\triangle HDQ$:

$DQ = \sqrt{63 - \frac{1}{2}}$; $QC = \sqrt{48 - \frac{1}{2}}$

$$\boxed{DC = \sqrt{\frac{125}{2}} + \sqrt{\frac{95}{2}}}$$

<u>Ответ:</u> $\boxed{DC = \frac{\sqrt{250} + \sqrt{190}}{2}}$

3 Чистовик



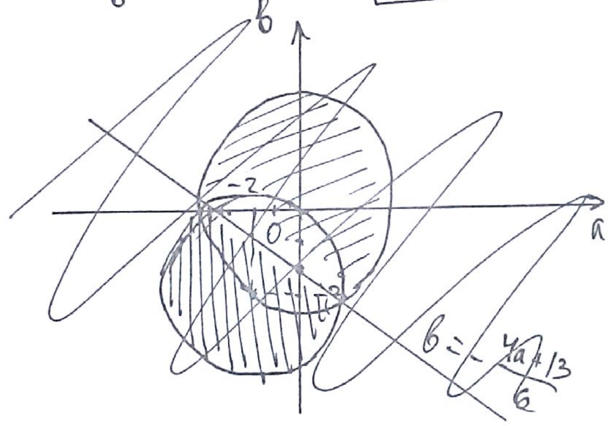
α)

(эту область можно "двигать", изменяя a и b, и закрашивать тем самым фигуру M (при всех возможных a и b))

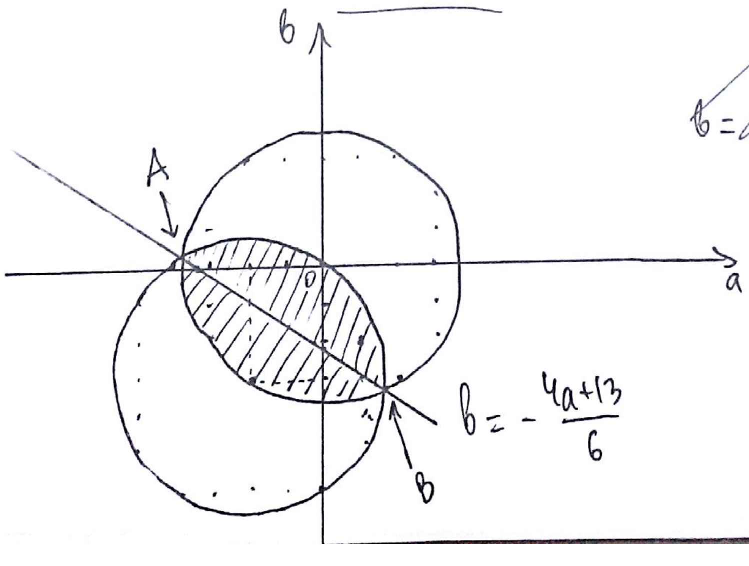
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \leftarrow \text{окр. } R=\sqrt{13}; \quad \text{центр} = (a;b) \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;\ 13) \end{cases}$$

если $\quad -4a-6b \le 13 \Rightarrow a^2+4a+4+b^2+6b+9 \le 13$

$b \ge \dfrac{-4a-13}{6}$ $\quad \boxed{(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13}$



если $\quad -4a-6b > 13 \Rightarrow a^2+b^2 \le 13$



~~$(a+2)^2+(b+3)^2=13$~~

~~$b=-\dfrac{4a+13}{6}$~~

~~$a^2+b^2=13$~~

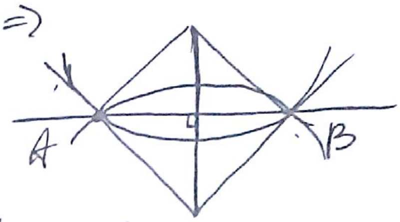
~~$a^2+\dfrac{16a^2+104a+169}{36}=13$~~

Чистовик $\boxed{3}$ продолжение

в точках A и B пересекаются 3 линии т.к. прямая соединяющая центры окружностей имеет угловой коэф. $= \frac{3}{2}$; а прямая $b = -\frac{4a+13}{6}$ имеет угловой коэф. $= -\frac{2}{3}$ => $\underline{\text{они } \perp}$

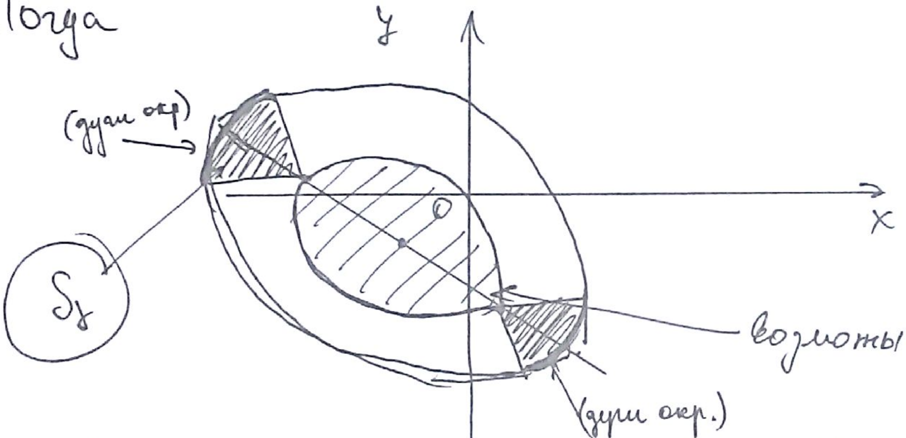
$$\left(tg\,\alpha = -\frac{1}{tg\,\beta} \Rightarrow \left(tg\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos\alpha + 0}{0 - \sin\alpha} = -\frac{1}{tg\,\alpha} \right) \right)$$

и эти окружности один. радиуса =>



A и B равноудалены от центра AB
и от центров окружностей => и в A и в B пересекаются $\underline{3 \text{ лин.}}$

Тогда

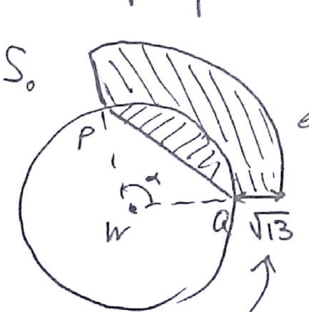


возможные центры окруж. из α.

=> сама область: внешний контур (и все что внутри)

=> $S_M = S^{(\gamma)}_{\text{сектор. окр.}} + S^{(S_0)}_{\text{заверш. a;b фигуры}}$

$\underline{S_{ab\ \text{фигуры}} = 2S_0}$



← S_0; считаем ч/з сектор окр. с $\underline{R = 2\sqrt{13}}$

(за вычетом △WPQ.)

итого $\boxed{2S_0 + 2S_\gamma = S_M}$

где S_γ – площадь секторов крайних окр.

Ответ: $2S_0 + 2S_\gamma$; S_γ

Черновик

$\frac{abc}{4S}$:

$$\frac{\cancel{a}b\sqrt{a^2+b^2}}{2\cdot 4\, ab/2}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1^2}}$$

$$\frac{2x\sqrt{x^2-1^2}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1^2}}}{x^2-1} = \frac{2x\left(2\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)}{x^2-1} = 0$$

ОДЗ

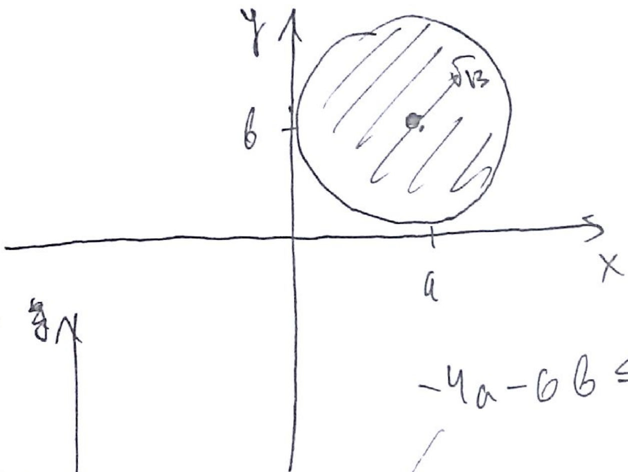
$x \neq 0;\ x \neq \pm 1$

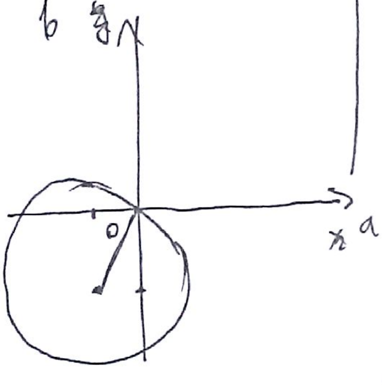
$2(x^2-1)=1$

$x^2-1=\frac{1}{2}$

$x^2=\frac{3}{2}$

$x=\sqrt{\frac{3}{2}}$





$-4a-6b \le 13$:

$a^2+b^2 \le -4a-6b$

a^2+4a+b^2+6b

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$

$a^2+b^2 \le 13$

$b \ge \frac{-4a-13}{6}$

7

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103114**

ID профиля: **316878**

Вариант 20

Чистовик $\boxed{4}$

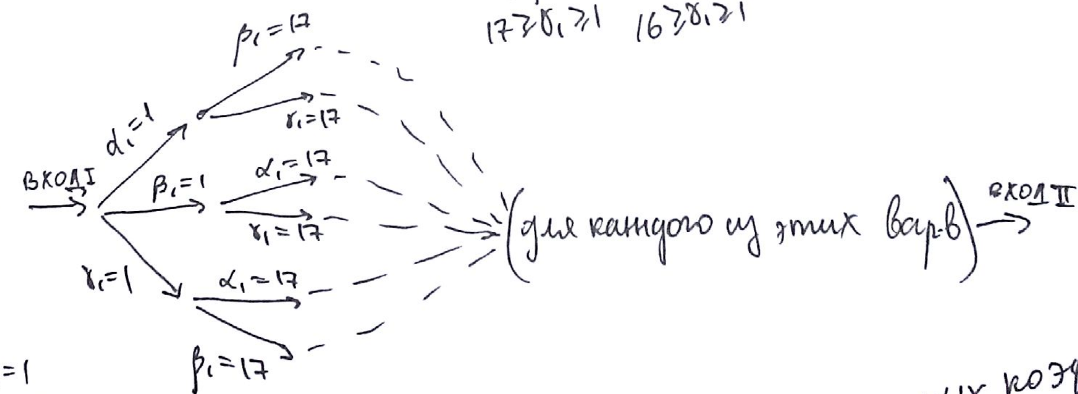
$$\begin{cases} a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}\cdot\ldots \\ b = 2^{\beta_1}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\beta_3}\cdot\ldots \\ c = 2^{\gamma_1}\cdot 3^{\gamma_2}\cdot 5^{\gamma_3}\cdot\ldots \end{cases}$$

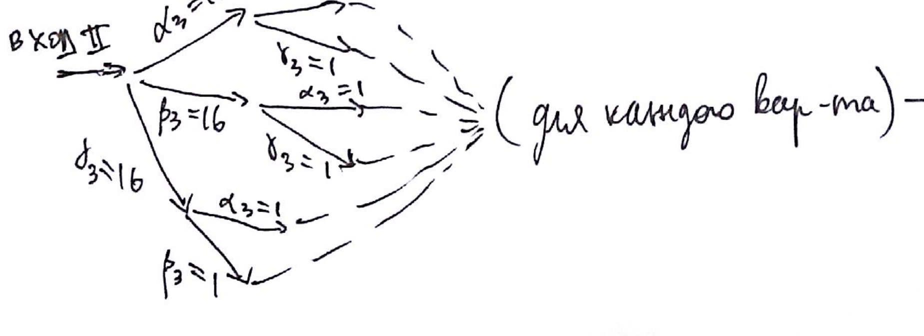
$$\left\{\begin{aligned} &\text{НОД}(a;b;c)=10 \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} \alpha_3\geq 1 \\ \beta_3\geq 1 \\ \gamma_3\geq 1 \\ \left[\begin{aligned} &\alpha_3=1 \\ &\beta_3=1 \\ &\gamma_3=1 \end{aligned}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha_1\geq 1 \\ \beta_1\geq 1 \\ \gamma_1\geq 1 \\ \left[\begin{aligned} &\alpha_1=1 \\ &\beta_1=1 \\ &\gamma_1=1 \end{aligned}\right. \end{cases} \\ \left[\begin{aligned} &\alpha_n=0 \\ &\beta_n=0 \\ &\gamma_n=0 \end{aligned}\right. ;\ \text{где } n\in\mathbb{N};\ \text{и } n\neq 1;3 \end{cases} \\ &\text{НОК}(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{aligned} &\alpha_3=16 \\ &\beta_3=16 \\ &\gamma_3=16 \end{aligned}\right. \quad \left(+ \begin{cases} \alpha_3\leq 16 \quad \beta_3\leq 16 \quad \gamma_3\leq 16 \\ \gamma_1\leq 17 \\ \beta_1\leq 17 \\ \alpha_1\leq 17 \end{cases} \right) \\ \left[\begin{aligned} &\alpha_1=17 \\ &\beta_1=17 \\ &\gamma_1=17 \end{aligned}\right. \\ \alpha_n=0;\ \beta_n=0;\ \gamma_n=0;\ \text{где } n\in\mathbb{N};\ n\neq 1;3 \end{cases} \end{aligned}\right.$$

Тогда: $\begin{cases} a = 2^{\alpha_1}\cdot 5^{\alpha_3} \\ b = 2^{\beta_1}\cdot 5^{\beta_3} \\ c = 2^{\gamma_1}\cdot 5^{\gamma_3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{aligned} &\alpha_1=1 \\ &\beta_1=1 \\ &\gamma_1=1 \end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned} &\alpha_1=17 \\ &\beta_1=17 \\ &\gamma_1=17 \end{aligned}\right. \\ \left[\begin{aligned} &\alpha_3=16 \\ &\beta_3=16 \\ &\gamma_3=16 \end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned} &\alpha_3=1 \\ &\beta_3=1 \\ &\gamma_3=1 \end{aligned}\right. \\ 17\geq\alpha_1\geq 1 \quad 16\geq\alpha_3\geq 1 \\ 17\geq\beta_1\geq 1 \quad 16\geq\beta_1\geq 1 \\ 17\geq\gamma_1\geq 1 \quad 16\geq\gamma_1\geq 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$

дерево выборов:





$\rightarrow$ два не выбранных коэф. могут быть $\{1;2;3;\ldots;16\}$ и $\{1;2;3;\ldots;17\}$ соответственно

Чистовик $\boxed{4}$ (продолжение)

~~=> всего вариантов:~~

$$\boxed{S = \underset{\text{дерево 1}}{6} \cdot \underset{\text{дерево 2}}{6} \cdot \underset{\text{коэф. ( )}_3}{16} \cdot 17}$$

~~коэф ( )$_1$~~

~~Но тут варианты когда в дереве выбрано, допустим, $d_1 = 1$; а при выборе из $\{1; 2; ...; 17\}$ выбрано тоже 1 посчитан 2 раза (и так во всех аналогич. случаях)~~

Всего вариантов как распределить степени двоек:

$$S_2 = \underbrace{6 \cdot 15}_{} + \frac{6 \cdot 2}{2}$$

6 = исходы дерева I
15 - варианты $\{2; 3; ...; 16\}$
(т.к. они не пересекаются с выборами из дерева)

6 = исходы дерева I
2 - варианты, когда $\{1; 17\}$ — выбор на одно из этих чисел
/2 - т.к. каждый м. считаем 2 раза

Аналогично всего вариантов степеней $5_к$:

$$S_5 = \underbrace{6 \cdot 14}_{} + \frac{6 \cdot 2}{2}$$

6 = исходы II
14 = вар-ты $\{2; ...; 15\}$

6 - исходы II
2 - $\{1; 16\}$
/2 - каждый учитывали 2 раза

$$\underline{S_{общ}} = S_2 \cdot S_5 = 96 \cdot 90 = \underline{8640}$$

Ответ: 8640.

Чистовик $\boxed{5}$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$; $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$; $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

ООУ: $\sqrt{2x-8}>0$; $\sqrt{2x-8}\neq 1$

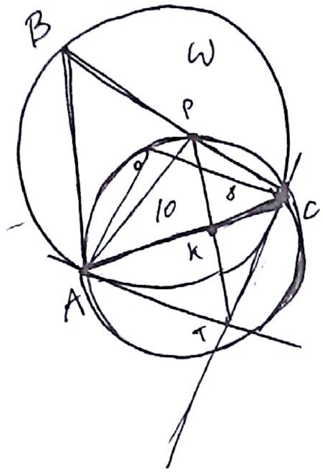
$x-4>0$; $x-4\neq 1$

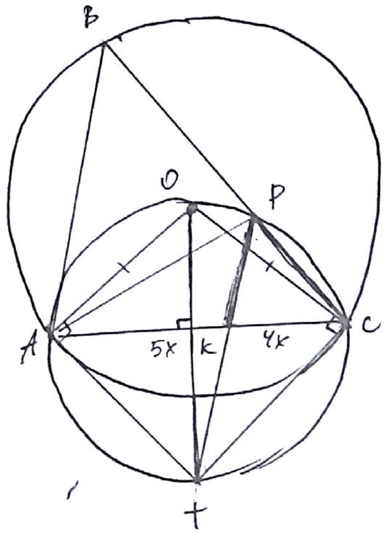
$5x-26>0$; $5x-26\neq 1$

Перебираем варианты с учетом ООУ:

$$\left[\begin{array}{l}
1)\ \begin{cases} \text{ООУ} \\ \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=\log_{(x-4)^2}(5x-26)=\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)-1 \end{cases} \\
2)\ \begin{cases} \text{ООУ} \\ \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=\log_{(x-4)^2}(5x-26)-1 \end{cases} \\
3)\ \begin{cases} \text{ООУ} \\ \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)-1=\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=\log_{(x-4)^2}(5x-26) \end{cases}
\end{array}\right.$$

Чистовик $\boxed{6}$





Решение

1) T ∈ второй окружн.

(втор. окр. (не ω) = q)

⇒ T ∈ q ; т.к.

в четырехугольнике OATC сумма $\angle A + \angle C = 180^\circ$

⇒ этот четырех. впис.

⇒ T ∈ q;

$\angle A = 90^\circ$; $\angle C = 90^\circ$, т.к.

OA и OC – радиус провед. в т. касан.

2) $S_{APK} = PH \cdot \frac{1}{2} \cdot AK$

$S_{PCK} = PH \cdot \frac{1}{2} \cdot KC$ (PH – высота из P)

$\Rightarrow \frac{S_{APK}}{S_{PCK}} = \boxed{\frac{AK}{KC}} = \frac{10}{8} = \boxed{\frac{5}{4}}$

3) $\frac{PC}{PB} = \frac{KC}{AK} = \frac{4}{5}$ (т.к. $\triangle PKC \sim \triangle ABC$)
(по th о хорд. и сек.)

$\Rightarrow S_{\triangle APC} = \frac{PC}{2} \cdot AH_2$

$S_{\triangle ABP} = \frac{PB}{2} \cdot AH_2$

$\Rightarrow \frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle ABP}} = \frac{PC}{PB} = \frac{4}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\triangle ABP} = \frac{5}{4} S_{\triangle APC} = \frac{5}{4}(10+8)$

$\boxed{S_{\triangle ABP} = \frac{45}{2}}$

$\boxed{S_{ABC}} = 18 + \frac{45}{2} = \boxed{\frac{81}{2}}$

Ответ $S_{ABC} = \frac{81}{2}$

Черновик

1

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 10 \\ НОК(a;b;c) = \cancel{2}\,10^{16}\cdot 2 \end{cases}$$

$a;b;c \in N$

кол-во решений - ?

$$\begin{cases} a = 10\cdot\alpha \\ b = 10\cdot\beta \\ c = 10\cdot\gamma \\ \frac{2\cdot 10^{15}}{\alpha} \in N \\ \frac{2\cdot 10^{15}}{\beta} \in N \\ \frac{2\cdot 10^{15}}{\gamma} \in N \end{cases}$$

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}\cdot 7^{\alpha_4}\cdot 11^{\alpha_5}\ldots$

$b = 2^{\beta_1}\cdot 3^{\beta_2}\ldots$

$c = 2^{\gamma_1}\cdot 3^{\gamma_2}\ldots$

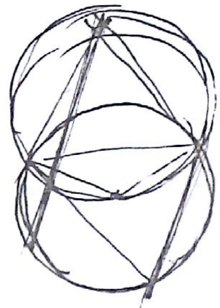
1) $\begin{cases} \alpha_1 \geq 1 \\ \beta_1 \geq 1 \\ \gamma_1 \geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = 1 \\ \gamma_1 = 1 \end{array}\right. \end{cases}$

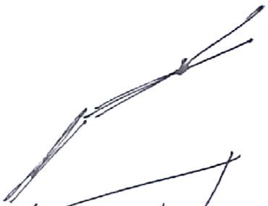
$\left[\begin{array}{l} \alpha_n\ 0 \\ \beta_n\ 0 \\ \gamma_n\ 0 \end{array}\right.$

2) Аналогично $\begin{cases} \alpha_3 \geq 1 \\ \beta_3 \geq 1 \\ \gamma_3 \geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} \alpha_3 = 1 \\ \beta_3 = 1 \\ \gamma_3 = 1 \end{array}\right. \end{cases}$

$+$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \alpha_3 = 16 \quad \gamma_3 = 16 \\ \beta_3 = 16 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \alpha_1 = 17 \\ \beta_1 = 17 \\ \gamma_1 = 17 \end{array}\right. \\ \text{все кроме} \begin{pmatrix} \alpha_1 ; \alpha_3 \\ \beta_1 \ \beta_3 \\ \gamma_1 \ \gamma_3 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$





1 ; 3 ; 1 2 3

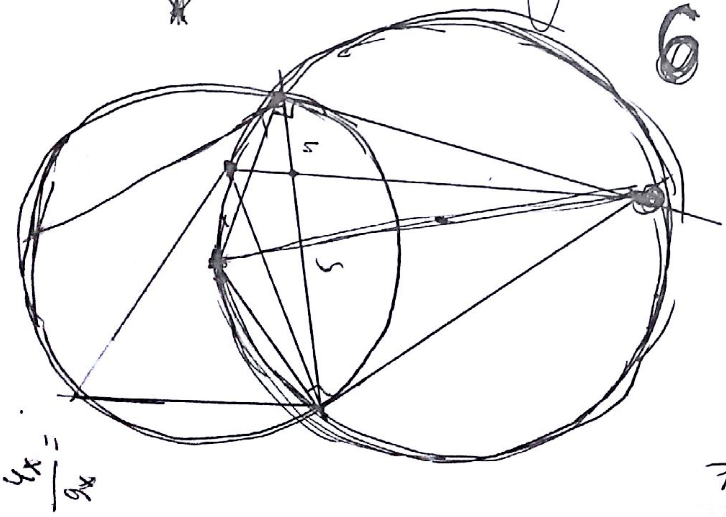
$\boxed{\text{Итак}}$

$2\left(\frac{h}{6}\right)\cdot 8$

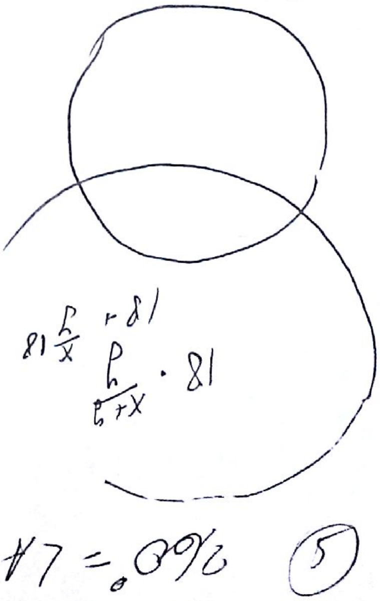
$\frac{2}{18}$

7

6



$$\begin{array}{r} 9600 \\ -\ 960 \\ \hline 8640 \end{array}$$



$81\frac{p}{x}\ \ +81$

$\frac{p}{\frac{h}{6+x}}\cdot 81$

$4x ; 9x$

(5) $360° = 7A + 7B + 22C + 7D + 7E$

①

черновик

34
4 3
5 3

$$2\log_{2x-8}(x-4)=\frac{1}{2}\left(\log_{(x-4)}(5x-26)\right)$$

$$4\log_{2x-8}(x-4)=\cancel{\frac{1}{\log_{5x-26}(x-4)}}$$

$$\frac{4}{\log_{x-4}2x-8}=\log_{x-4}(5x-26)$$

$$\log_{2x-8}(x-4)=\log_{5x-26}(2x-8)$$

$$4=\frac{\log_e 2x-8}{\log_e(x-4)}\cdot\frac{\ln 5x-26}{\ln x-4}$$

$$\alpha\log_b a=\log_a c$$

$$\alpha\log_b a-\log_a c=0$$

$$\frac{\alpha}{\log_a b}-\log_a c=0$$

$$\alpha-\log_a c\cdot\log_a b=0$$

⑥