Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103090**

ID профиля: **800998**

Вариант 20

Чистовик

Вариант 20

№1 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ – возрастающая арифметическая прогрессия из ~~целых чисел~~ целых чисел.

$a_k = a_1 + d(k-1)$ $k \in N$. Из условия

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d =$

$= a_1 \cdot 5 + 10d$

$$\begin{cases} a_6 \cdot a_{11} > S + 15 \\ a_8 a_9 < S + 39 \end{cases}$$

перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > S+15 = a_1 \cdot 5 + 10d + 15 \quad (1) \\ (a_1+7d)(a_1+8d) < S+39 = a_1 \cdot 5 + 10d + 39 \quad (2) \end{cases}$$

из (1) $a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 > a_1 \cdot 5 + 10d + 15$ (3)

из (2) $a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 < a_1 \cdot 5 + 10d + 39$ (4)

из (3) и (4) имеем:

$6d^2 + a_1 \cdot 5 + 10d + 15 < a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 < a_1 5 + 10d + 39$

откуда $6d^2 < 24$

$d^2 < 4$ т.е. $|d| < 2$

Т.к. прогрессия возрастающая и состоит из целых чисел то $d = 1$, тогда из (3) получим:

$a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a + 10 + 15$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$ т.е. $(a+5)^2 > 0$ и-но $a \neq -5$.

из (2) $a_1^2 + 15a_1 + 56 < a_1 5 + 10 + 39$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$\cancel{D = 100 - 28 = 72}$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 = 0$

$D = 100 - 28 = 72$

$a_{1,2} = \frac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2}$

1

$+$ $\frac{-10-6\sqrt{2}}{2}$ $-$ $\frac{-10+6\sqrt{2}}{2}$ $+$ a

т.е. $\begin{cases} a \in Z \\ a \neq -5 \\ a \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2}) \end{cases}$

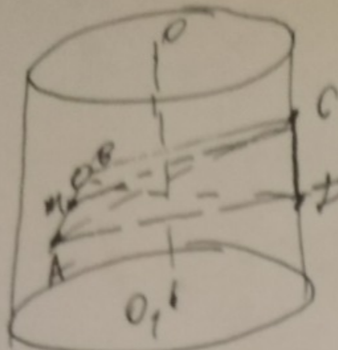
проверка показывает что т.е. искомое $a = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$.

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

:)

Чистовик Вариант 20

№2

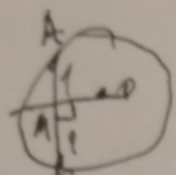


$AB = 2$; $AC = CB = 7$,

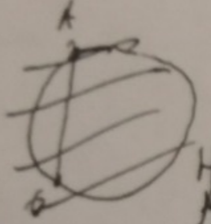
$AD = DB = 8$

$O_1O \parallel CD$

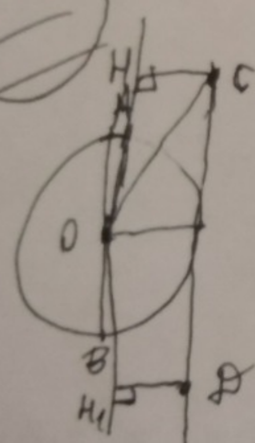
т.к. $\triangle ACB$ и $\triangle CAD$ равнобедренные то проведя CM и DM соответственно что M середина AB, то получим, что $CM \perp AB$ и $DM \perp AB$ сл-но $AB \perp (CMD)$ т.е. $AB \perp OO_1$ т.е. имеем, что (см. рис.) Диаметр



окружности не менее 2 т.е. минимальный радиус будет если AB - диаметр окружности и этот радиус равен 1. ~~$CM = $~~ т.е. O и M совпадают



опустим высоты из точек C и D на OO_1 - ось цилиндра высоты CH и DH_1 они равны радиусу т.е 1. $CO = \sqrt{BC^2 - OB^2} =$



$= \sqrt{49 - 1} = \sqrt{48}$ (это из $\triangle COB$ ($\angle COB = 90°$)

и DO из $\triangle DOA$ ($\angle DOA = 90°$)

$DO = \sqrt{AD^2 - OA^2} = \sqrt{63}$

$CD = H_1H$ $\quad HO = \sqrt{CO^2 - HC^2} = \sqrt{47}$ из $\triangle HCO$ $\angle CHO = 90°$

$H_1O = \sqrt{DO^2 - H_1D} = \sqrt{62}$

$CD = \sqrt{47} + \sqrt{62}$

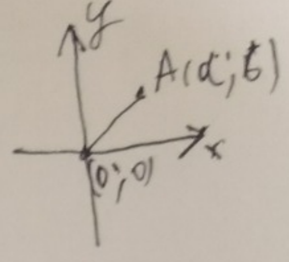
Ответ: $CD = \sqrt{47} + \sqrt{62}$

2

Чистовик

Вариант 20

№ 3 $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 13 & (1) \\ a^2+b^2 \leq \min(-4a-6b, 13) & (2) \end{cases}$



$(x-a)^2+(y-b)^2$: ~~(1)~~ является уравнением окружности с центром в точке $(a;b)$, но радиус этой окружности ~~ограничен~~ ограничен по условию (1).

сл-но M имеет площадь S такую $S \leq \pi \cdot r^2$

$S \leq \pi \cdot 13$

заметим, что равенство достигается например при $a = b = -\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$ т.к. выполняется условие (2):

$13 \leq 13$ и $-4a-6b < 13$.

a^2+b^2 – расстояние от точки $A(a;b)$ до начала координат $O(0;0)$ сл-но это расстояние имеет ограничение (2). Заметим, что условие (2) задаёт множество значений координат точки A и т.к. по условию ~~(1)~~; но т.к. от координат a и b значение (1) не зависит, ~~что~~ (т.е. радиус окружности), то M – является окружностью с центром A и радиусом равным $\sqrt{13}$, а площадь равна: $\pi \cdot 13$

Ответ: $\pi \cdot 13$.

3

Чистовик

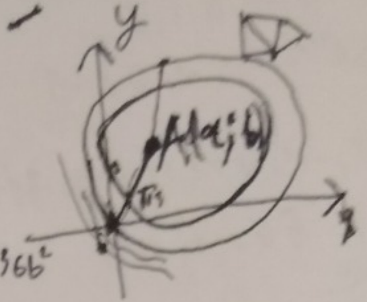
Черновик

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 13 \\ a^2+b^2 \leq \min(-4a-6b, 13) \end{cases}$$

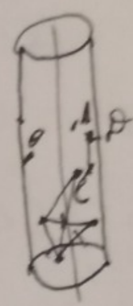
$a^2+b^2 \leq -4a-6b < 13$

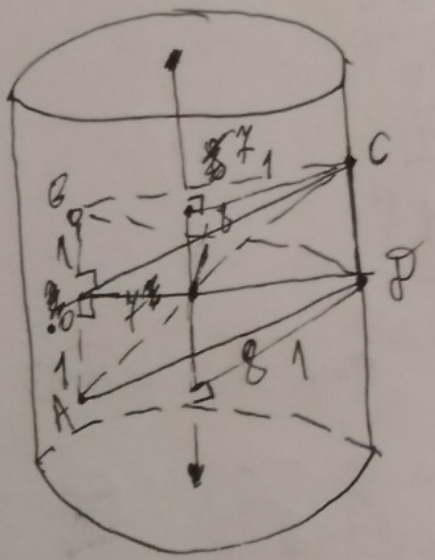
$-4a-6b$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq (4a+6b)^2 = 16a^2+48ab+36b^2$



M.





r_{min}

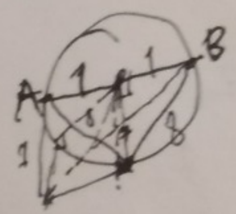
$AB \perp CD$

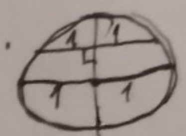
$x = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

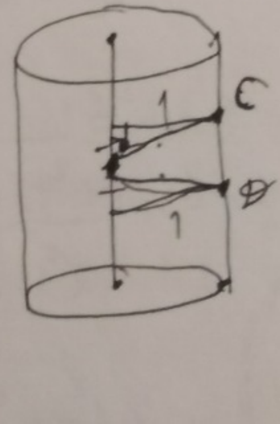
$1+x^2=49$

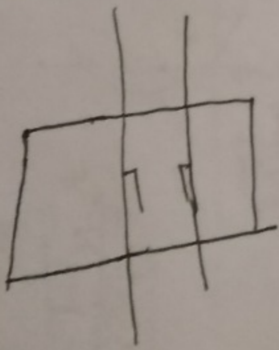
$z = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$

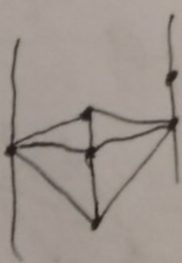
$1+z^2=64$











$a_1^2 + 15a_1 + 56 < a_1 5 + 10 + 39$ $\qquad a_1 \quad a_1+d \quad a_1+2d \ldots$

$(a_1+5d)(a_1+10d) > 5+15 = a_1 \cdot 5 + \ldots$

$(a_1+7d)(a_1+8d) < 5+39 = a_1 \cdot 5 + 10d \ldots$

$7 = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d =$

$= 5a_1 + 10d$

$\cancel{-5 - 3\sqrt{2} < -9}$

$\cancel{3\sqrt{2} > 4}$

$\cancel{18} \quad 16$

$a_1^2 + 15ad + 50d^2 > a_1 \cdot 5 + 10d + 15$

$5d^2 + a_1 \cdot 5 + 10d + 15 < a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 < a_1 \cdot 5 + 10d + \ldots$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

$|d| < 2$

$d = \pm 1 \vee 0$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a + 50 > 5a_1 + 10 + 15 \\ a_1^2 + 10a_1 + 56 < a_1 \cdot 5 + 10 + 39 \end{cases}$$

$-5 + 6 = 1$

$a_1^2 + 10a + 25 > 0$

$\boxed{a = -5}$

$-5 + 3\sqrt{2} \vee -1$

$3\sqrt{2} > 4$

$18 \quad 16$

$x^2 + a^2 - 2xa + y^2 - \ldots$

$\cdot (a;b)$

$S_{окр} = \pi r^2 = \pi \cdot 1$

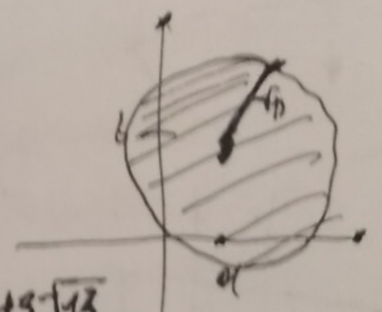
$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 13 \\ a^2 + b^2 \le \min\{-4a-6b, 13\}, \end{cases}$$

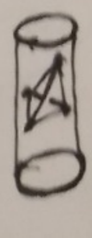
$-5 - 3\sqrt{2}$

$-5 + 3\sqrt{2}$

$-5 \; -6 \; -7$

$-4 \; -3 \; -2 \; -1$





$a^2 + b^2 \le 13$

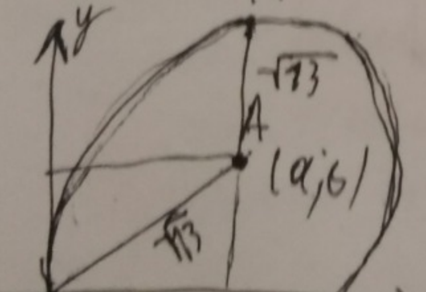
$\pm\sqrt{13} < 13$

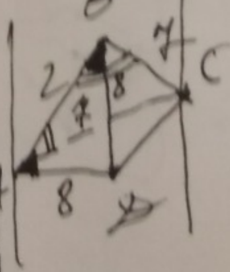
1) или $\boxed{a^2 + b^2 \le 13}$

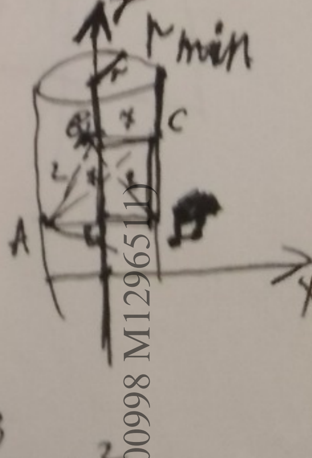
$2\sqrt{13} + 13 \cdot \sqrt{13}$

$\boxed{5\sqrt{13} > 13}$

2) $a^2 + b^2 \le -4a - 6b$







$OA^2 = a^2 + b^2$

$\boxed{OA^2 \le 13}$

либо $\boxed{AO^2 \le -4a - 6b}$

$\boxed{-4a - 6b < 13}$

$\boxed{a^2 + b^2 \le 13}$

$\wedge$

$-4a - 6b$

$-4a - 6b > 13$

$16a^2 + 36b^2 + 48ab > 13^2$

$\cancel{48ab + 16 \cdot 13}$

$AO^2 \le -4a + 6b$

$-5 + 3\sqrt{2}, \quad 4 \vee 3\sqrt{2}$

$16 \quad 18$

$-5 - 3\sqrt{2} > -9$

$-3\sqrt{2} > -4$

$\cancel{-18 < -16}$

$-5 - 3\sqrt{2} > -10$

$-1 \; -2 \; -3 \; -4 \; -5$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103090**

ID профиля: **800998**

Вариант 20

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

Из условия числа a, b и c имеют вид: $x_i; y_i \in N_0$

$a = 10\cdot 2^{x_1}\cdot 5^{y_1}$
$b = 10\cdot 2^{x_2}\cdot 5^{y_2}$, но т.к. НОД$(a;b;c)=10$, то
$c = 10\cdot 2^{x_3}\cdot 5^{y_3}$

1) одно из чисел равно 10 пусть это $c=10$.

$c=10$; $a=10\cdot 2^{x_1}\cdot 5^{y_1}$; $b=10\cdot 2^{x_2}\cdot 5^{y_2}$

2) числа имеют вид $10\cdot 2^{z}; 10\cdot 2^{k}; 10\cdot 5^{m}$ $z, k \in N$, $m \in N$

или $10\cdot 5^{z}; 10\cdot 5^{k}; 10\cdot 2^{m}$

Из первого случая т.к. НОК$(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16}$, то одно

из чисел x_1 или $x_2 = 17$ и y_1 или $y_2 = 16$

если $x_1=17$, $y_1=16$, то всего вариантов: $18\cdot 17$

если $x_1=17$, $y_2=16$, то вариантов: $18\cdot 16$ т.к.

$y_1=16$ уже был рассмотрен

если $x_2=17$; $y_1=16$, то вариантов: $17\cdot 17$ т.к.

$x_1=17$ рассмотрен.

если $x_2=17$; $y_2=16$, то вариантов: $17\cdot 16$

т.е. в этом случае всего вариантов решений $3\cdot(18\cdot 17+18\cdot 16+17\cdot 17+17\cdot 16)$ (умножаем

на 3 т.к. a, b или c равны 10.

2) в этом случае $z, k, m \neq 0$ т.к. это было рассмотрено

выше: если решениями являются числа

вида: $10\cdot 2^{z}$; $10\cdot 2^{k}$ и $10\cdot 5^{m}$, то $m=15$ и $k+z=16$

всего вариантов 8 и умножаем

на 3! в качестве перестановок $(a; b и c)$

аналогично для $10\cdot 5^{z}, 10\cdot 5^{k}, 10\cdot 2^{m}$

всего вариантов $2\cdot 8\cdot 3!$

③ количество решений равно: $3\cdot(18\cdot 17+18\cdot 16+17\cdot 17+$

$+17\cdot 16)+2\cdot 8\cdot 3! = (18\cdot 33+17\cdot 33)\cdot 3+16\cdot 3! =$

$= 33\cdot 3\cdot 35+16\cdot 3!$

чистовик вариант 20 часть 2

№5 продолжение:

из (1) $(x-4)^4 = 5x + 2x - 34$

С другой стороны по условию

$2\log_{(2x-8)}(x-4) + 1 = 2\log_{5x-26}(2x-8)$

$\log_{(2x-8)}(X-4) + \cancel{\log_{2x-8}}\frac{1}{2} = \log_{5x-26}(2x-8)$

$\log_{(2x-8)}(X-4) \cdot \log_{(2x-8)}(5x-26) + \frac{1}{2} \cdot \log_{(2x-8)}(5x-26) = 1$

$2\log_{(2x-8)}(6x-30) + \log_{(2x-8)}(5x-26) = 2$

$\log_{(2x-8)}((6x-30)^2 + 5x - 26) = 2$

Откуда $(2x-8)^2 = (6x-30)^2 + 5x - 26$

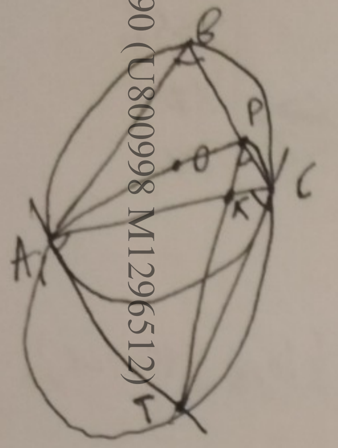
$4x^2 - 32x + 64 = 36x^2 - 180 \cdot 2x + 90 + 5x - 26$

решая квадратное уравнение находим x

аналогично разберемся и c пунктом 3.

Чистовик Вариант 20 часть 2

№6 а)



$S_{APK} = 10$ $S_{CPK} = 8$

$S_{APC} = h \cdot AC$

$S_{APK} = h \cdot AK = 10$

$S_{PKC} = h \cdot KC = 8$

$\frac{AK}{KC} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

т.к. TA и TC – касательные, то $AT = TC$ и $\angle TAC = \angle TCA$.

⇒ △ATC – равнобедренный

т.к. AT – касательная к окружности w, то $\angle TAC = \angle ABC$

~~т.к. A, T, C и P лежат~~ т.к. ∠AOC – центр описанной окружности △ABC, то $\angle AOC = 2\angle ABC = 2\angle TAC$.

из △ATC: $\angle ATC = 180° - \angle TAC - \angle TCA = 180° - 2\angle TAC$ и т.к. $\angle AOC + \angle ATC = 180°$, то T, A, O и C – лежат на одной окружности ⇒ T, A, O, P и C – лежат на одной окружности

откуда $\angle TPC = \angle TAC = \angle ABC$ ⇒ $KP \parallel AB$, тогда

$\frac{S_{PKC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{KC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{KC}{\frac{4}{5}KC + KC}\right)^2 = \left(\frac{1}{\frac{9}{5}}\right)^2 = \left(\frac{5}{9}\right)^2$

$S_{ABC} = \left(\frac{9}{5}\right)^2 \cdot S_{PKC} = \left(\frac{9}{5}\right)^2 \cdot 8$

Ответ: на п. а) $\left(\frac{9}{5}\right)^2 \cdot 8$

R – радиус W

б) по теореме синусов $2R = \frac{AC}{\sin\angle ABC}$

из △AOT ~~∠ATO~~ $\angle AOT = \angle ABC$ имеем $R = \text{tg}\angle ABC \cdot AT =$

$= \frac{1}{2} AT$

т.е. $AC = \sin\angle ABC \cdot AT$

①

чистовик вариант 20 часть 2

№5

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$; $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$; $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

~~$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2\log$~~

ограничения: $\begin{cases} x-4>0 \\ 2x-8>0 \\ 2x-8\neq 1 \\ (x-4)^2\neq 1 \\ 5x-26>0 \\ 5x-26\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ x>4 \\ x\neq \frac{9}{2} \\ x\neq 5 \vee 3 \\ x>\frac{26}{5} \\ x\neq \frac{27}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>5\frac{1}{5} \\ x\neq \frac{27}{5} \\ \cancel{x\neq\frac{9}{8}} \end{cases}$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2\log_{2x-8}(x-4)$; $\log_{(x-4)^2}(5x-26) = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2\log_{5x-26}(2x-8)$;

из условия либо $2\log_{2x-8}(x-4) = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$, либо $\log_{2x-8}(x-4) = \log_{5x-26}(2x-8)$

$\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26) = 2\log_{5x-26}(2x-8)$, либо

рассмотрим сначала последнее равенство:

1) $\log_{2x-8}(x-4) = \log_{5x-26}(2x-8) = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26) - 1$

т.е. а) $x-4 = 2x-8 = 1$ $\varnothing$ ил-нокши не равны 0,

б) $\log_{2x-8}(x-4)\cdot\frac{1}{\log_{5x-26}(2x-8)} = 1 = \log_{2x-8}(x-4)\log_{(2x-8)}(5x-26) =$

$= \log_{2x-8}(x-4+5x-26)$

т.е. $2x-8 = x-4+5x-26$

$22 = 4x$ $x = \frac{11}{2}$ - остаётся проверить последнее условие

2) $2\log_{(2x-8)}(x-4) = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

$\log_{(2x-8)}(x-4)^4 = \log_{(x-4)}(5x-26)$

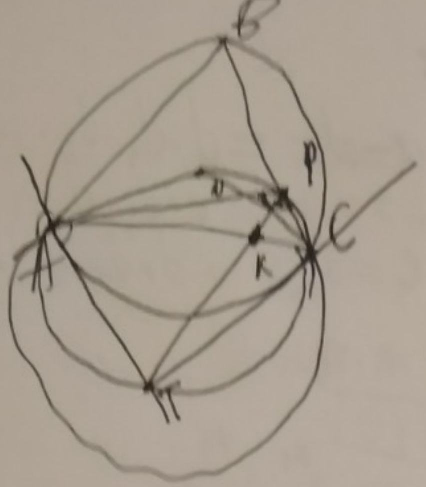
а) $(x-4)^4 = 1 = 5x-26$ - из ограничений не возможно

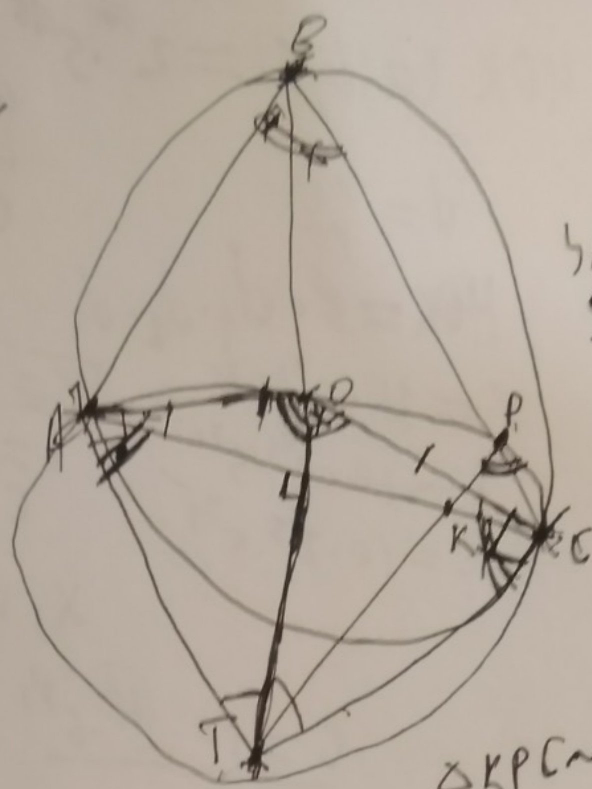
б) $\log_{(x-4)}(5x-26)\cdot\frac{1}{\log_{(2x-8)}(x-4)^4} = 1 =$

$= \frac{1}{4}\log_{(x-4)}(5x-26)\cdot\log_{(x-4)}(2x-8) = 1$

$\log_{(x-4)}(5x-26+2x-8) = 4$ (1)

②





$S_{APK} = 10$

$S_{KPK} = 8$

$\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

$\frac{TC}{PC}$ ψ

$\triangle KPC \sim \triangle ABC$

$S_{APC} = h \cdot AC$

$S_{APK} = h \cdot AK = 10$

$S_{PKC} = h \cdot KC = 8$

$\frac{AK}{KC} = \frac{5}{4}$

$\frac{S_{KPC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{KC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^2$

$S_{ABC} = \frac{\cancel{8 \cdot 9}}{4^2 \cdot 2} = \frac{9}{2}$

$h = \frac{10}{AK}$

$AC - ?$

$\frac{R}{TC} = \sin$

$R = TC \cdot \sin\psi$

$2R = \frac{AC}{\sin}$

$\frac{AC}{2\sin} = TC \sin\psi =$

$\frac{TC}{\frac{AC}{2}} = \sin\psi$

$(18 \cdot 33 + \cancel{17^2} \cancel{13} +$

$17 \cdot 2 \cdot 3$

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

$a=dn=d\cdot d_1\cdot d_2\cdot m$

$b=dn=d\cdot d_3\cdot d_1 n$

$c=dk=d\cdot d_2\cdot d_3\cdot k$

$d=10$

$НОК=d\cdot d_1\cdot d_2\cdot d_3\cdot m\cdot n\cdot k$

$a=10\cdot 2^{x_1}\cdot 5^{y_1}$ $\quad \boxed{a=10}$

$b=10\cdot 2^{x_2}\cdot 5^{y_2}$ $\quad b=10\cdot 2^{x_4}\cdot 5^{y_1}$

$c=10\cdot 2^{x_3}\cdot 5^{y_1}$ $\quad c=10\cdot 2^{x_3}\cdot 5^{y_3}$

$x_3 \vee x_4$

$\underline{c=10\cdot 2^{17}\cdot 5^{y_3}}$ $\quad y_3\le 16$ $\quad 16\cdot 17$ $\quad 17$ $\quad 18\cdot 16\cdot 17$

$b=1$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4),\ \log_{(x-4)^2}(5x-26),\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

ОДЗ:

$2x-8>0$, $x>4$, $x\ne\frac{9}{2}$, $x\ne 5$

$5x-26>0$, $x>\frac{26}{5}$, $x\ne\frac{27}{5}$

$x>\frac{26}{5}$, $x\ne\frac{27}{5}$, $x\ne\frac{9}{2}$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$(\sqrt{2x-8})^a=x-4$

$(x-4)^{2a}=5(x-26)$

$\underline{2\log_{2x-8}(x-4)}$ $\quad \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$ $\quad \underline{2\log_{5x-26}(2x-8)}$

$\log_{2x-8}(x-4)=\log_{5x-26}(2x-8)$

$(2x-8)^a=(5x-26)^a$

$\log_{2x-8}(x-4)\cdot\log_{(2x-8)}(5x-26)=1$

$\log_{2x-8}(x-4+5x-26)=1$

$6x-30=2x-8$

$4x=22$

$x=\frac{22}{4}$