Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103064**

ID профиля: **260111**

Вариант 20

~~Б~~ Чистовик

1. $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$a_i = a_1 + (i-1)r$

$S = \frac{a_1 + a_1 + 4r}{2} \cdot 5 = (a_1 + 2r) \cdot 5$

$a_6 a_{11} > S + 15 \qquad a_8 a_9 < S + 39$

$a_6 a_{11} - 15 > S \qquad a_8 a_9 - 39 < S \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad a_6 a_{11} - 15 > a_8 a_9 - 39$

$(a_1 + 5r)(a_1 + 10r) - 15 > (a_1 + 7r)(a_1 + 8r) - 39$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{15ra_1} + 50r^2 - 15 > \cancel{a_1^2} + \cancel{15a_1 r} + 56r^2 - 39$

$-6r^2 > -24$

$-r^2 > -4$

$r^2 < 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \; r \in (-2; 2), \; r \in \mathbb{Z} \Rightarrow r = -1; 0; 1$

Т.к. прогрессия возрастающая, то

$r = 1$

1) $(a_1 + 5r)(a_1 + 10r) - 15 > (a_1 + 2r) \cdot 5$

$a_1^2 + 15a_1 + 50 - 15 > 5a_1 + 10$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1 + 5)^2 > 0$, всегда выполняется.

2) $(a_1 + 2r) \cdot 5 > (a_1 + 7r)(a_1 + 8r) - 39$

1

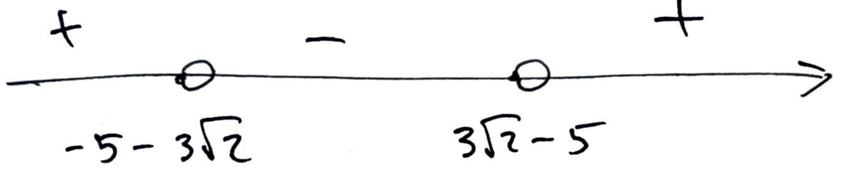
Чистовик

$5a_1 + 10 > a_1^2 + 15a_1 + 56 - 39$

$0 > a_1^2 + 10a_1 + 7$

$a_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{72}}{2} =$

$a_1 = \left[\begin{array}{l} -5+3\sqrt{2} \\ -5-3\sqrt{2} \end{array}\right.$



$a_1 \in (-5-3\sqrt{2};\ 3\sqrt{2}-5)$

$(3\sqrt{2})^2 = 18$

$16 < 18 < 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 < 3\sqrt{2} < 5$

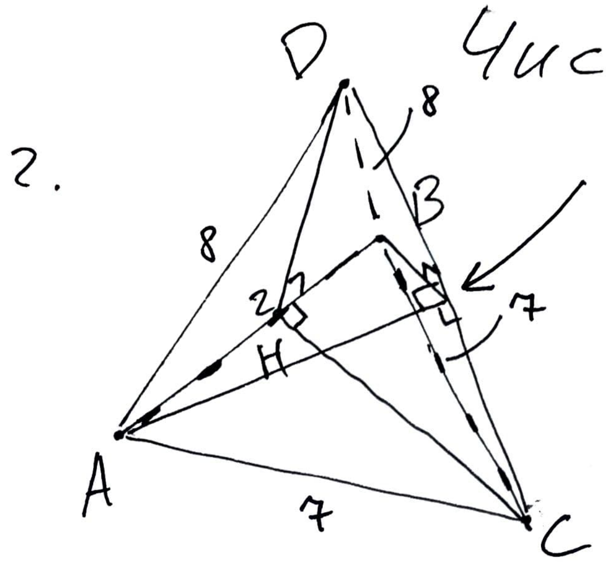
С учётом того, что $a_1 \in \mathbb{Z}$, то

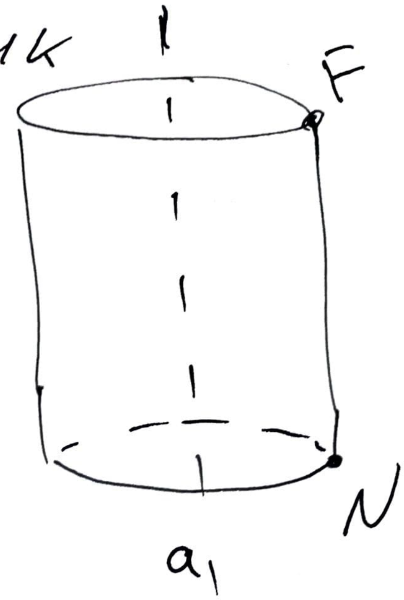
$a_1 = \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: от −9 до −1

Чистовик

2.





Если $CD \parallel a_1$, точки C и D лежат на боковой поверхности, то CD лежит на образующей FN.

Опустим на сторону AB перпендикуляры из точек C и D. Т.к. $AC = BC$, $AD = BD$, т.е. треуг. равнобедр., то они упадут на середину AB, т.е. их основания совпадут.

$AB \perp CH$, $AB \perp DH \Rightarrow AB \perp DHC$

Т.к. $AB \perp CD$, то $AB \parallel$ основаниям цилиндра.

Диаметр цилиндра больше или равен 2, иначе хорда $AB = 2$ не вместится.

$R_{min} = 1$, AB − диаметр.

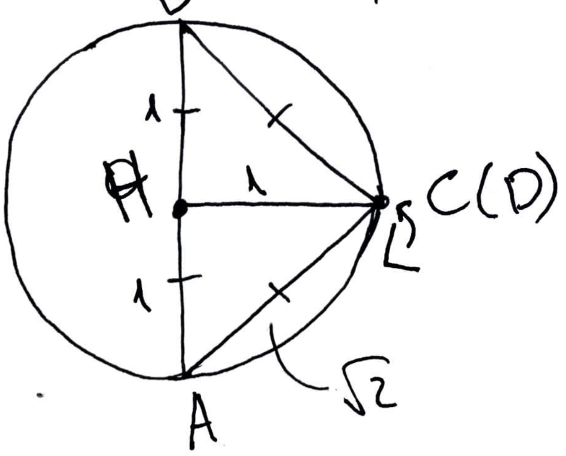
$AL, BL \perp CD$

Т.к. $\triangle ADC = \triangle BDC$, то

$AL = BL$

H − центр. окр., т.е.

$HL = 1 \Rightarrow AL = \sqrt{2}$



Итак, $CD = CL + DL$ Чистовик

$CL = \sqrt{AC^2 - AL^2} =$ $DL = \sqrt{AD^8 - AL^2} =$

$= \sqrt{8^2 - 2} = \sqrt{62}$ $= \sqrt{49 - 2} = \sqrt{47}$

$CD = \sqrt{62} + \sqrt{47}$

Ответ: $\sqrt{62} + \sqrt{47}$

Чистовик

3. $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13) \end{cases}$

$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le 13, \quad -4a-6b \ge 13 \\ a^2+4a+4+b^2+6b+9 \le 13, \quad -4a-6b < 13 \\ (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13, \quad -4a-6b < 13 \end{cases}$

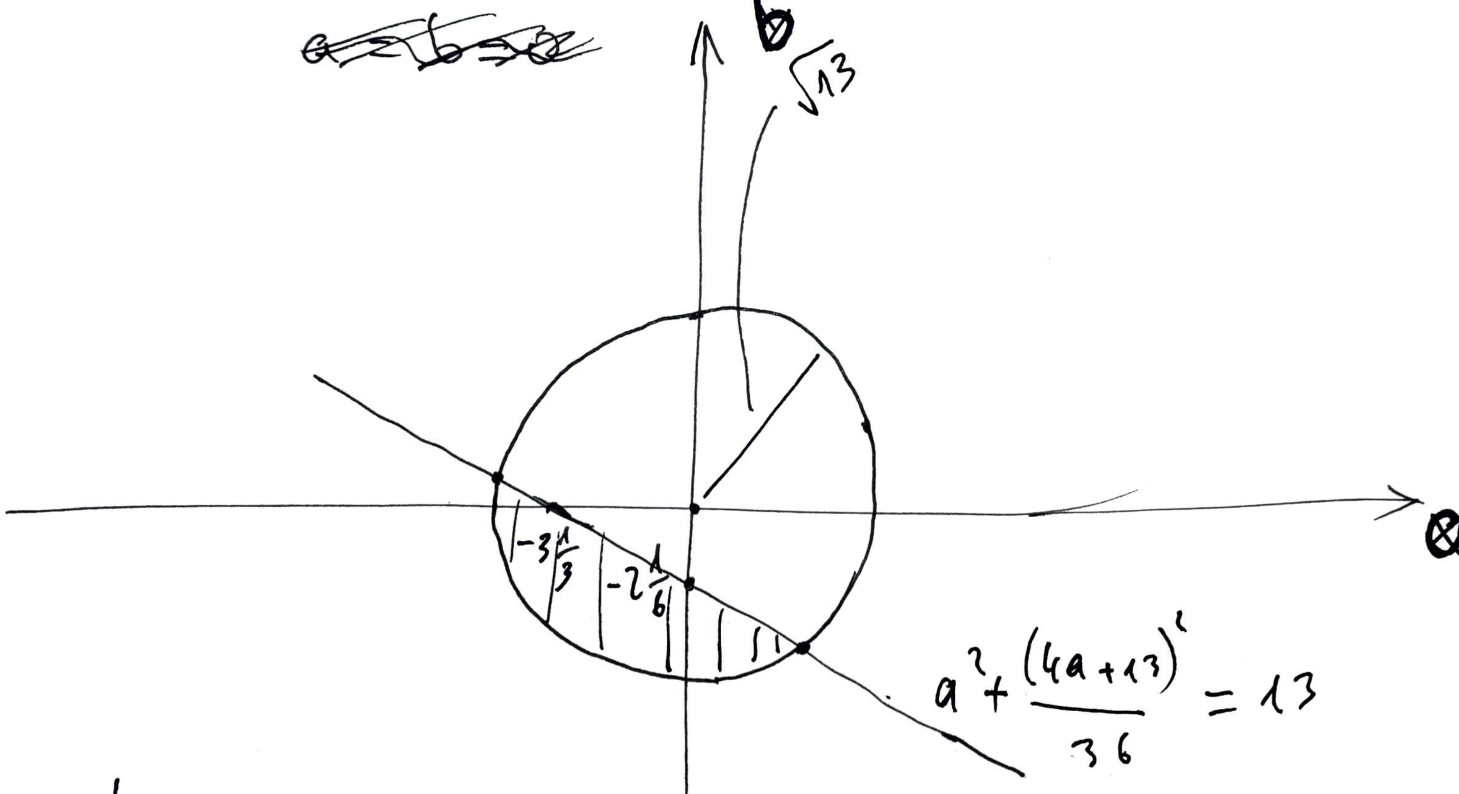
Заметим, что $a>0, b>0$ не подойдёт, иначе

$a^2+b^2 \le -(4a+6b) < 0$

Видим, что

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$, ~~только при~~

~~$a = b = 2$~~



$a^2+\dfrac{(4a+13)^2}{36} = 13$

$36a^2+(4a+13)^2 = 13\cdot 36$

$36a^2+16a^2+8a\cdot 13+13^2 = 13\cdot 36$

$52a^2+13\cdot 8a+13(13-36) = 0$

$6b \le -4a-13$

$b \le \dfrac{-4a-13}{6}$

$b = -\dfrac{4a+13}{6}$

5

$\frac{17}{2}$ 5 30 $a_6 a_{11} > S+15$ $a_8 a_9 < S+39$

2 4 6 8 10

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$, ЧЕРНОВИК

$$S = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5$$ a_1

$a_i = a_1 + (i-1)r$

$a_5 = a_1 + 4r$

$$S = \frac{a_1 + a_1 + 4r}{2} 5 = (a_1 + 2r)5$$

$a_6 = a_1 + 5r$

$a_{11} = a_1 + 10r$

$$(a_1 + 2r) \cdot 5 + 15 < (a_1 + 5r)(a_1 + 10r)$$

$$5a_1 + 10r + 15 < a_1^2 + 15ra_1 + 50r^2$$

$$a_1^2 + a_1(15r - 5) + 50r^2 - 10r - 15 > 0$$

1 2 3 4 5

$$a_1 = \frac{-(15r-5) \pm \sqrt{(15r-5)^2 - 4(50r^2 - 10r - 15)}}{}$$

$S = (a_1 + 2r)5$

$$(a_1 + 7r)(a_1 + 8r) < S + 39$$

$(a_1 + 2r)5 + 15$ $(a_1 + 5r)(a_1 + 10r) > S + 15$

$$a_6 a_{11} - 15 > S$$

$$S > a_8 a_9 - 39$$

$$a_6 a_{11} - 15 > S > a_8 a_9 - 39$$

$$a_6 a_{11} > S + 15 > a_8 a_9 - 24$$

$$(a_1 + 5r)(a_1 + 10r)^{-15} > (a_1 + 7r)(a_1 + 8r) - 39$$

$$\cancel{a_1^2} + \cancel{15ra_1} + 50r^2 - 15 > \cancel{a_1^2} + \cancel{15a_1 r} + 56r^2 - 39$$

$$-6r^2 > -24$$ $r^2 < 4$

$-r^2 > -4$

$r = 1$

$r = 1; 0;$

$r = \pm 2$

$r \in (-2; 2)$

$(a_1+5)(a_1+10)-15 > (a_1+2)5$ ЧЕРНОВИК

$a_1^2+15a_1+50-15 > 5a_1+10$

$a_1^2+10a_1+25 > 0$

$(a_1+5)^2 > 0$

$S > -39+(a_1+7)(a_1+8)$

$S > -39+a_1^2+15a_1+56$

$S > a_1^2+15a_1+17$

$(a_1+2)5 > a_1^2+15a_1+17$

$5a_1+10 > a_1^2+15a_1+17$

$0 > a_1^2+10a_1+7$

$100-28$

72

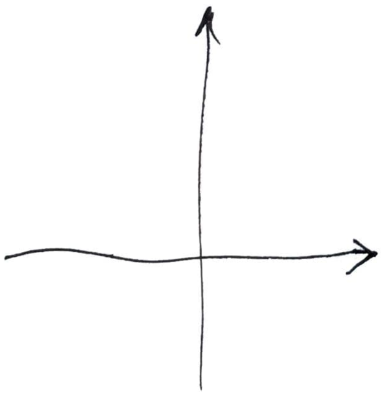
$8\cdot 9$

$3^2\cdot 2^2\cdot 2$

$3\cdot 2\sqrt{2}$

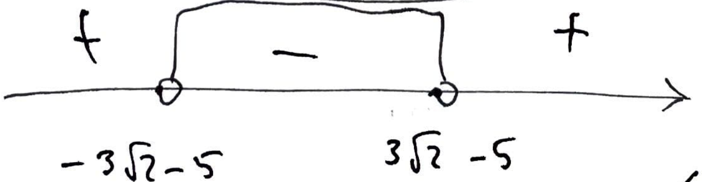
$a_1 = \dfrac{-10\pm\sqrt{72}}{2}$

$a_1 = \dfrac{-10\pm 6\sqrt{2}}{2}$



$a_1 = -5\pm 3\sqrt{2}$

$(a-3\sqrt{2}+5)\cdot(a+3\sqrt{2}+5)$



$\approx 4{,}5$

$a_1 \in (-3\sqrt{2}-5;\ 3\sqrt{2}-5)$

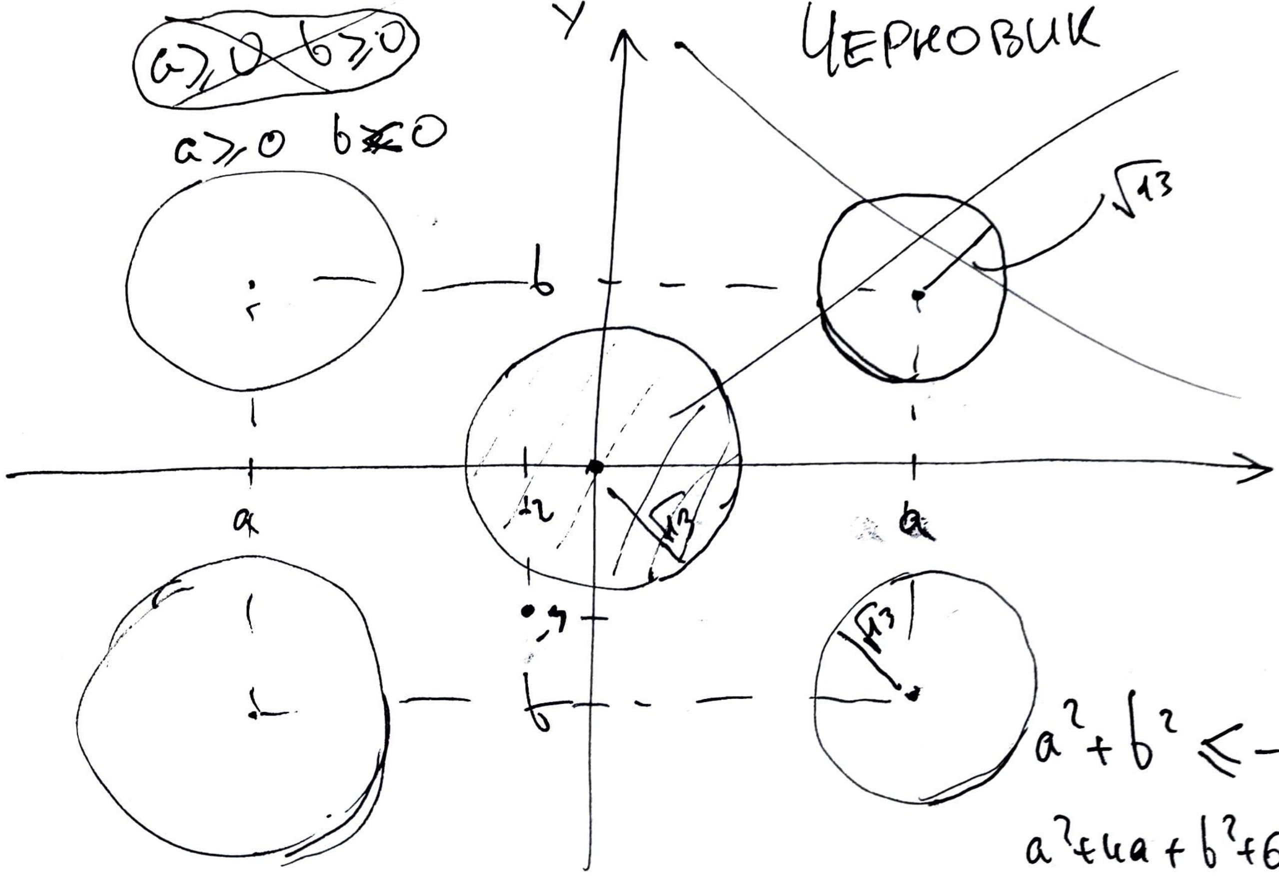
$(-9{,}5;\ -0{,}5)$

$a_1 \in -9, -8, -7, \dots, -1$

Черновик

~~$a \geq 0 \quad b \geq 0$~~

$a \geq 0 \quad b \not\leq 0$



$a^2 + b^2 \leq -4a - 6b$

$a^2 + 4a + b^2 + 6b \leq 0$

$a^2 + 4a + 4 + b^2 + 6b + 9 \leq 13$

$(a+2)^2 + (b+3)^2 \leq 13$

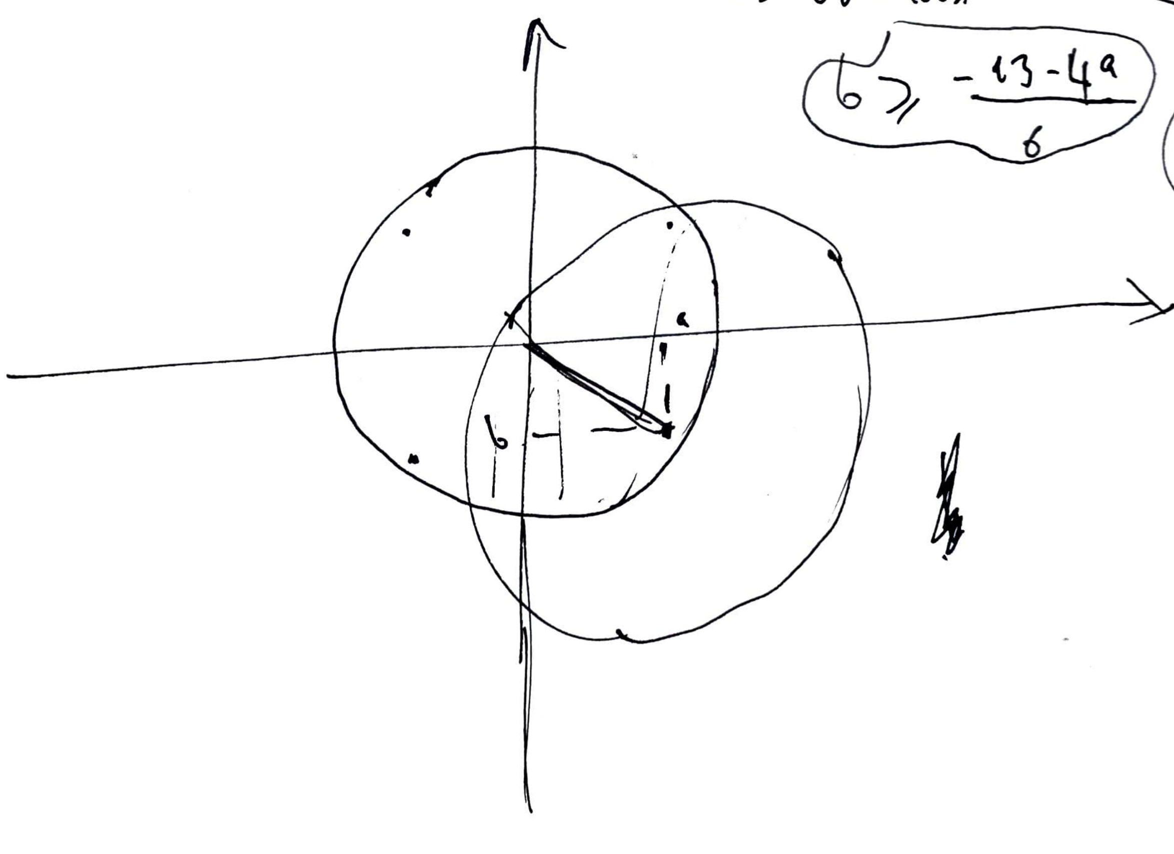
$a^2 + b^2 \leq 13$.

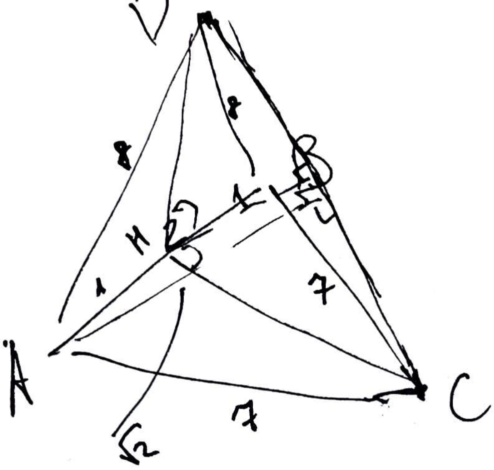
при $-4a - 6b \leq 13$

$13 + 6b + 4a \geq 0$

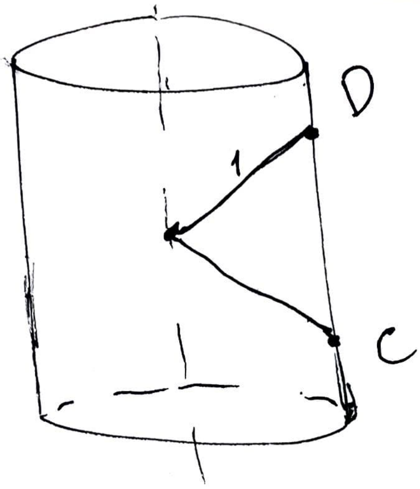
$b \geq \dfrac{-13 - 4a}{6}$

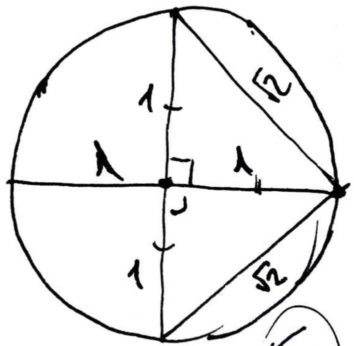
$-\dfrac{13}{6} - \dfrac{2}{3}a$





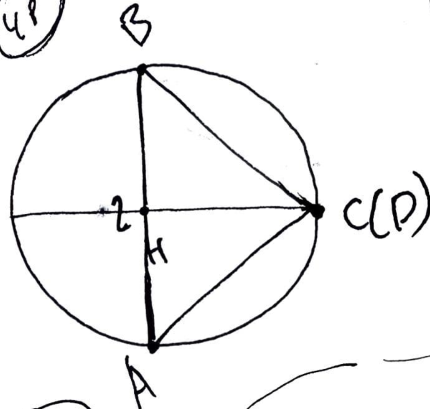
49





$49 - 1 = 48$

$\sqrt{48}$



$48 - 1 = \sqrt{47}$

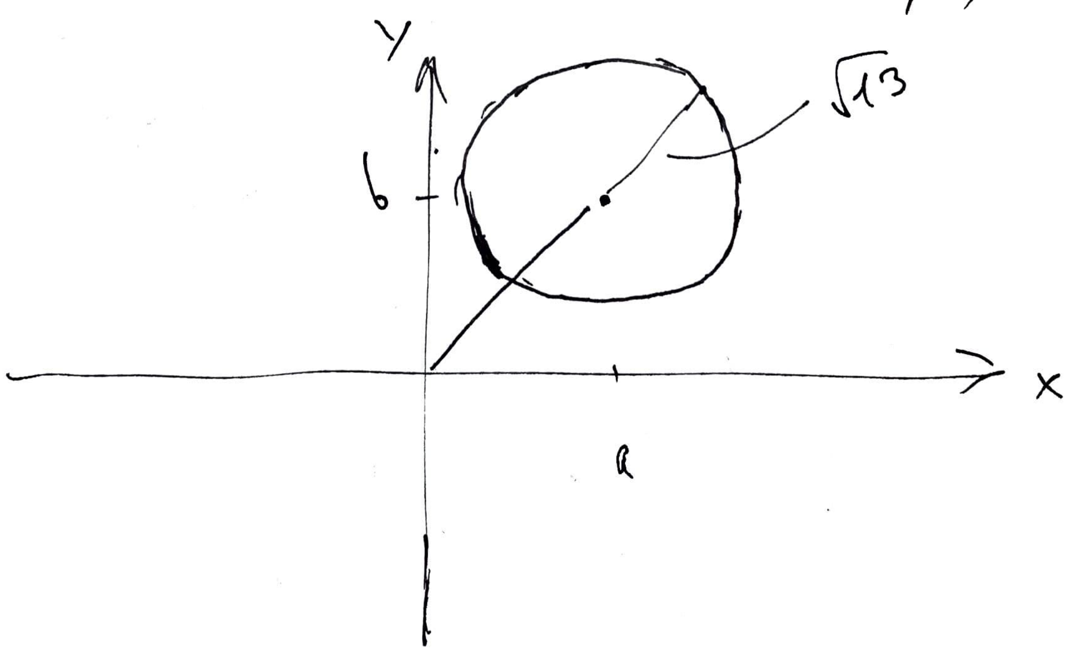
$49 - 2 = \sqrt{47}$

$64 - 2 = \sqrt{62}$

$CD = \sqrt{62} + \sqrt{47}$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 13$$

$$a^2 + b^2 \le \min(-4a - 6b, 13)$$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103064**

ID профиля: **260111**

Вариант 20

Чистовик

4. $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 10 \\ НОК(a;b;c) = 2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$

Из ~~из~~ уравнений выше мы понимаем, что числа можно представить в виде

$a = 2^{\alpha_1} 5^{\beta_1}$

$b = 2^{\alpha_2}\cdot 5^{\beta_2}$

$c = 2^{\alpha_3}\cdot 5^{\beta_3}$

причём какое-то α_i равно 1

какое-то β_i равно 1, также

какое-то α_i равно 17

какое-то β_i равно 16.

Подсчитаем кол-во вариантов

У нас есть

2^{17} 2^{1} 5^{16} 5^{1} 2^{α} 5^{β},

причём $1 \leq \alpha \leq 17$

$1 \leq \beta \leq 16$

Рассмотрим вариант, когда все числа различны, тогда кол-во вариантов равно

$3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 36$

Сколько раз такой вариант произойдёт?

$(17-2)\cdot(16-2) = 15\cdot 14 = 210$

$\boxed{210\cdot 36}$

Рассмотрим вариант, при котором две 2 совпадают, а все 5 различны.

1

Тогда кол-во вариантов

$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 =$ — из двух разл. чисел можно сост. 3 последовательности, при услов., что каждое число входит минимум один раз:

A A B
A B A
B A A

$= 18$

Такое произойдёт

$2 \cdot 14 = 28$ раз

$\boxed{18 \cdot 28}$

Аналогично если 5 совпадают, а 2 нет.

$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 18$

Такое произойдёт

$2 \cdot 15 = 30$ раз.

$\boxed{18 \cdot 30}$

Пусть теперь и 2, и 5 совпадают, тогда кол-во вариантов

$3 \cdot 3 = 9$.

Такое произойдёт

$2 \cdot 2 = 4$ раза.

В итоге $210 \cdot 36 + 18 \cdot 28 + 18 \cdot 30 + 4 \cdot 9$

$$\begin{array}{r} \times\, 36 \\ 210 \\ \hline 360 \\ +\,72 \\ \hline 7560 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 58 \\ 18 \\ \hline 464 \\ +\,58 \\ \hline 1044 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\,7560 \\ 1044 \\ \hline 8604 \end{array}$$

$8604 + 36 = 8640$

Ответ: 8640

ЧИСТОВИК

2

5. ОДЗ Чистовик

$x > 5,2$ числа

$x \neq 5,4$ $2\log_{2x-8}(x-4)$ $2\log_{5x-26}(2x-8)$

$\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$

Пусть

$$a \cdot \begin{cases} \log_{2x-8}(x-4) = \log_{5x-26}(2x-8) = a \\ 2\log_{2x-8}(x-4)+1 = \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26) \end{cases}$$

$$(5x-26)^a = 2x-8$$

$$2a^2 + a = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}$$

$$4a^3 + 2a^2 - 1 = 0$$

$$(2a^2+2a+1)(2a-1) = 0$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$\log_{2x-8}(x-4) = \frac{1}{2}$$

$$(2x-8)^{\frac{1}{2}} = x-4$$

$$2x-8 = (x-4)^2$$

$$2x-8 = x^2-8x+16$$

$$x^2-10x+24=0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100-96}}{2} = \frac{10 \pm 2}{2}$$

4

$$x = \left[\begin{array}{l} 6 \checkmark \\ 4 \end{array}\right.$$

Пусть $b = \log_{2x-8}(x-4) = \log_{x-4}(5x-26) = $

3 $\cancel{\frac{1}{4}\log_{x-4}(5x-26)}$ $6 \cdot \left[\, 2\log_{2x-8}(x-4)+1 = 2\log_{5x-26}(2x-8)\right.$

Чистовик

$\cancel{(2x-8)^{\frac{1}{4}\log_{x-4}(5x-26)} = x-4}$

$(x-4)^6 = 5x-26$

$\cancel{26^2+6=2}$

$2\log_{2x-8}(x-4)^6+6 = 26^{\log_{5x-26} 2x-8}$

$2\log_{2x-8}(5x-26)+6 = 8^{\log_{5x-26}(2x-8)^{4\log_{2x-8}(x-4)}}$

$2\log_{2x-8}(5x-26)+6 = 2\log_{5x-26}(x-4)$

$2\log_{2x-8}(5x-26)+4\log_{2x-8}(x-4) = 2\log_{5x-26}(x-4)$

$\log_{2x-8}(5x-26)+\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26) = \log_{5x-26}(x-4)$

$\frac{1}{\log_{5x-26}(2x-8)}+\frac{1}{2}\frac{1}{\log_{5x-26}(x-4)} = \log_{5x-26}(x-4)$

Ответ: 6

4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

Черновик

$\boxed{10}$ $2\cdot 5\cdot \cancel{1}$

$10^{16}\cdot 2$

$2^{17}\cdot 5^{16}$

20 или 50

$2\cdot 5^{n}$

$a=2^{\alpha_1}\cdot 5^{\beta_1}$

$b=2^{\alpha_2}\cdot 5^{\beta_2}$

$c=2^{\alpha_3}\cdot 5^{\beta_3}$

$\alpha_i \geq 1$

$\beta_i \geq 1$

$\cancel{10}$ $2\cdot 5^{n}$ $2^{\alpha}\cdot 5^{b}$

$2\cdot 5^{1}$ $2\cdot 5^{1}$ $2\cdot 5$

$2\cdot 5^{n}$ $2^{n}\cdot 5$ $2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$

ОДЗ $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$ $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$ $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$x>4$ $\cancel{x>4}$

$2x-8>0$ $\cancel{x>4}$

$2x-8\neq 1$ $\cancel{x\neq 4{,}5}$

$5x-26>0$ $x>\frac{26}{5}$

$x-4\neq 0$ $\cancel{x\neq 4}$

$5x-26>0$ $\cancel{x>\frac{26}{5}}$

$5x-26\neq 1$ $x\neq \frac{27}{5}$

$2x-8>0$ $x>4$

$x>\frac{26}{5}$

$x>5{,}2$

$x\neq 5{,}4$

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\log_5 10=\frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 5}$

$\frac{1}{2}\log_{2x-8}(x-4)$; $\cancel{x=4}$ $\frac{1}{\log_{10} 5}$

$2\log_{x-4}(5x-26)$

$\frac{1}{2}\log_{5x-26}(2x-8)$

$\log_{2x-8}(x-4)=\log_{5x-26}(2x-8)$

~~$\log_{2x-8}(x-4)=\log_{5-26}$~~

$\log_{2x-8}(x-4)=\frac{1}{\log_{(2x-8)}(5x-26)}$

$\log_{(2x-8)}(x-4)\log_{(2x-8)}(5x-26)=1$

ЧЕРНОВИК

~~$\log_{5x-26}($~~ $2(x-4)$

$$\frac{\log_{5x-26}(x-4)}{\log_{5x-26}(2x-8)} = \log_{5x-26}(2x-8)$$

$\log_{5x-26} 2 + \log_{5x-26}(x-4)$

$\begin{cases} НОД = 10 \\ НОК = 2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$ 2^{17}

$1 \le \alpha_1 \le 17$

$1 \le \alpha_2 \le 16$

2^{17} 5^{16} 2^1 5^1 2^{α_1} 5^{α_2}

I II III $17 \cdot 16$

$3\cdot 3 + 2\cdot 2 \quad 1\cdot 1$

$\cancel{3\cdot 3}$

$17 \times 16 = 102 + 17 = 272$

30

$\cancel{3}\ 2\cdot 15$

~~9~~ ~~4~~ a b c

$3\cdot 3 = 9$

$\cancel{22}$ $2\cdot 14 = 28$ $\cancel{9}$ $6\cdot \quad 3\cdot 3 \cdot 2\cdot 2 \cdot 1$

~~$15\cdot 17$~~

$15 \cdot 14 / 2$

только 2 один.

36 ВАР.

4

$36\cdot 210$

$15 \times 14 = 60 + 15 = 210$

$2\cdot 2$

$\boxed{A\ A\ B\ C\ D\ E}$

~~$2\cdot 3\cdot 2$~~

$\boxed{\text{6 чисел. различн.}}$

AAB

~~$3\cdot 2\cdot 3$~~

A	A	B
A	B	A
B	A	A

$6\cdot\ 3\cdot 2\cdot 1$

$2^1\ 5$

$2\cdot$

$6\cdot 3 = 18$ вариантов

---

1 1 $3\cdot 3 = 9$ вариантов $28\cdot 18 + 30\cdot 18 + 4\cdot 9$

$\log_{5x-26}(2x-8) = \log_{2x-8}(x-4)$ ЧЕРНОВИК

$2\log_{x-4}(5x-26) =$

$\log_{5x-26}(x-4) + \log_{5x-26} 2 = \log_{2x-8}(x-4)$

$\frac{1}{2}\log_{2x-8}(x-4) = a$

$\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$ $2\log_{2x-8}(x-4)$ $2\log_{5x-26}(2x-8)$

$(5x-26)^{(\log_{2x-8}(x-4))} = 2x-8$

$\log_{2x-8}(x-4) = \log_{5x-26}(2x-8)$

$2\log_{2x-8}(x-4)+1 = \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$

$4\log_{2x-8}(x-4)+2 = \log_{x-4}(5x-26)$

$\underbrace{\log_{2x-8}(x-4)}_{4a}$

$\log_{x-4}(2x-8)$

$\frac{1}{\log_{(2x-8)}(x-4)}$

$(2a-1)(2a+1)$ $4a^2+2a = \frac{1}{a}$

$4a^3+2a^2 = 1$

$\cancel{2a^2(2a+1)=1}$

$4a^3+2a^2-1=0$

$(a-\frac{1}{2})$ $2a-1$

$\frac{1}{2}$ $4\frac{1}{8}+\frac{2}{4}$

$4a^3+2a^2-1 \mid 2a-1$

$4a^3-2a^2$

$4a^2-1$

$2a^2+2a+1$

$4a^3+2a^2-1 \mid a-\frac{1}{2}$

$4a^3-\frac{1}{2}a^2$

$\frac{5}{2}a^2+0$

$2a^2-a$

$\frac{a^2}{2}+a$

$4a^2+2a$

$4 \quad -4$

$(2a^2+2a+1)(2a-1)=0$

$a=\frac{1}{2}$

30 2 4 12 10

1 ~~16~~ 8 4 $\frac{1}{6}$

12 6

12

34 $5X-26$

60 1

60 34

$\boxed{24 \quad 12}$ 12 6

32-8 6 24

28

6 24

$\frac{1}{2}(1+64)$

24-8 6·4

16 8

$(X-4)$

$2(X-4)$ $\frac{1}{2}$ 6 24

$X-4=2$ $2(16 \quad 8)$

10 $\frac{1}{2}(1+64)$

$2(2 \quad 6)$ 2·3 $2(34$

$\sqrt{\ }$ $\frac{1}{2}$

$2(1+23$

$2(8 \quad 4)$ 2 44 8

$\frac{1}{2}(4 \quad 14)$

Черновик