Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103056**

ID профиля: **334965**

Вариант 20

Чистовик (1)

Вар 2011

Задание 1

$S = S_5$ $\qquad$ $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2}n$ $\qquad$ $a_6 \cdot a_{11} > S+15$

$a_n = a_1 + d(n-1)$ $\qquad$ $(a_1+5d)(a_1+10d) > \frac{2a_1+4d}{2}5+15$

$S_5 = \frac{2a_1+4d}{2}5$ $\qquad$ (1) $a_1^2+15da_1+50d^2 > 5a_1+10d+15$

$a_8 \cdot a_9 < S_5+39$

$(a_1+7d)(a_1+8d) < S_5+39$

(2) $a_1^2+15da_1+56d^2 < 5a_1+10d+39$

из (1) и (2):

$5a_1+10d+15 < a_1^2+15da_1+50d^2 < 5a_1+10d+39-6d^2$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

Прогрессия возрастающая значит $d > 0$; состоит из целых чисел значит $a_1 \in \mathbb{Z}$; $d \in \mathbb{N}$.

при этом $d^2 < 4$ $\quad$ $d < 2$ $\quad$ значит $\boxed{d=1}$

преобразуем (1), зная $d=1$ $\qquad$ $a_1^2+15a_1+50 > 5a_1+10+15$

$a_1^2+10a_1+25 > 0$

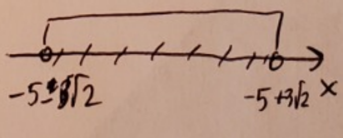
$(a_1+5)^2 > 0 \quad a_1 \neq -5$

преобразуем (2), зная $d=1$ $\qquad$ $a_1^2+15a_1+56 < 5a_1+10+39$

$a_1^2+10a_1+7 < 0$ $\qquad$ $a_1^2+10a_1+7=0$

$a_1 = \frac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2}$

$a_1 = -5 \pm 3\sqrt{2}$



$0 > -5+3\sqrt{2} > -5+1{,}4\cdot 3 = -0{,}8$

$10 < -5-3\sqrt{2} < -5-1{,}4\cdot 3 = -9{,}2$

~~целые значения принадлежащие~~ целые значения принадлежащие $[-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2}]$ это $-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1$. При этом -5 не подходит из первого неравенства

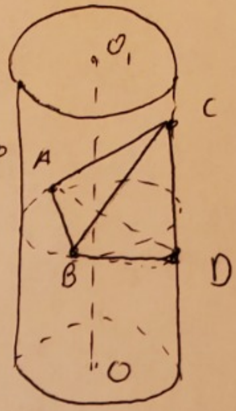
Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

Чистовик (2) Вар 2071

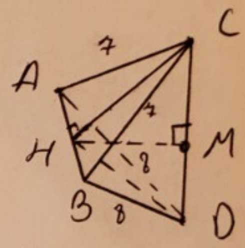
Задание 2

$AB=2$
$AC=CB=7$
$AD=DB=8$
$CD \parallel O_1O$

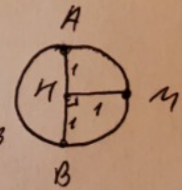
$DC - ?$



1. $CD \parallel O_1O$ при этом C и D принадлежат боковой поверхности значит CD — полностью принадлежит боковой поверхности
2. если провести высоты из C и D на AB то они попадут в одну точку — центр отрезка AB т.к. треугольники равнобокие.



3. $AB \perp CH$ $AB \perp HD$ $\Rightarrow AB \perp (HCD)$.
4. (HCD) плоскость параллельная осевому сечению или совпадает с ним, цилиндра (т.к. $CD \parallel O_1O$); AB перпендикулярн~~а~~ CH плоскости (HCD) => параллелен плоскости основания.
5. AB лежит в сечение параллельном основанию (оно окружность). Радиус цилиндра будет минимальным когда $R = \frac{AB}{2}$; иначе точки A и B не будут одновременно лежать на окружности. В таком случае AB — диаметр сечения параллельного основанию.



6. значит расстояние от AB до CD равно $R = \frac{AB}{2} = 1$ т.к. высота из H к CD в плоскости перпендикулярной AB
7. $CH^2 = AC^2 - AH^2 = 49 - 1 = 48$ $HD^2 = BD^2 - AH^2 = 64 - 1 = 63$ по Теореме Пифагора
8. $CM = \sqrt{HC^2 - HM^2} = \sqrt{48-1} = \sqrt{47}$ $MD = \sqrt{HD^2 - HM^2} = \sqrt{62}$
9. $CD = CM + MD = \sqrt{47} + \sqrt{62}$

Ответ: $\sqrt{47} + \sqrt{62} = CD$.

21103056 (U334965 M1303894)

Чистовик 3 Вар 20 ч1

$$\begin{cases}(x-a)^2+(x-b)^2\leq 13\\ a^2+b^2\leq \min(4a-6b;13)\end{cases}$$

будем рассматривать a как x; b как y если рассматривать наоборот рисунок будет симметричен, а ответ тот же.

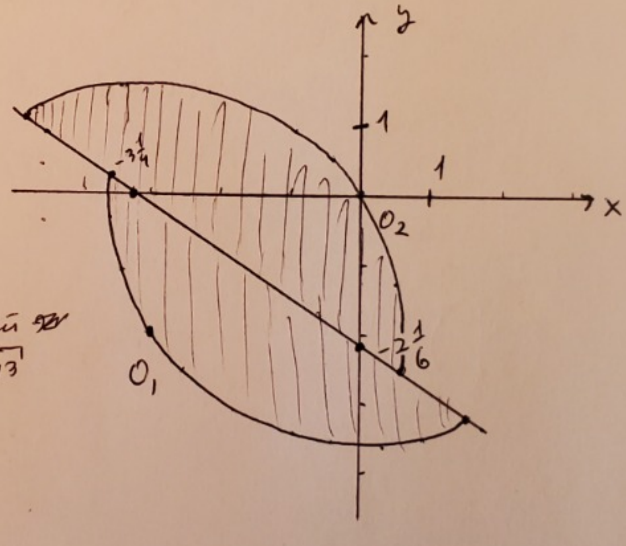
$-4a-6b\leq 13$

$b\geq -\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}$ – это можно изобразить как полуплоскость находящуюся выше прямой $y=-\frac{2}{3}x-\frac{13}{6}$ $y=0$ $x=-\frac{13}{4}=-3\frac{1}{4}$ $x=0$ $y=-\frac{13}{6}=-2\frac{1}{6}$

1. $\begin{cases}b\geq -\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}\\ a^2+4a+b^2+6b\leq 0\end{cases}$ $(a+2)^2+(b+3)^2\leq 13$ – круг с центром в точке $O_1(-2;-3)$ и радиусом $R=\sqrt{13}$ ей принадлежит точка $(0;0)$

2. $b\leq -\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}$

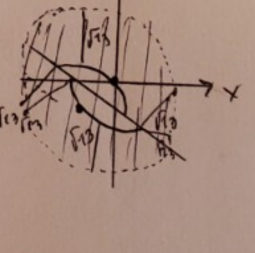
$a^2+b^2\leq 13$ $a^2+b^2\leq 13$ – круг с центром в точке $O_2(0;0)$ с радиусом $R=\sqrt{13}$ ей принадлежит точка $(-2;-3)$



$(x-a)^2+(x-b)^2\leq 13$

окружность с центром $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{13}=R$.

В каждой точке полученных областей может находится $(a;b)$ и вокруг любой такой точки на расстоянии не более $R=\sqrt{13}$ будут находится решения



Черновик

$\overset{4}{\overbrace{1+3}}+\overset{12}{\overbrace{5+7}}$

S = первых 5

$S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n = \frac{1+7}{2}\cdot 4 = 8\cdot 2 = 16$

$S = S_5$

$= \frac{a_1+a_1+d\cdot(n-1)}{2}\cdot n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2}n$

$a_6\cdot a_{11} > S+15$

$a_8 * a_9 < S+39$

$S = \frac{2a_1+4d}{2}\cdot 5$

$(a_1+5d)(a_1+10d) > \frac{2a_1+4d}{2}5+15$

$(a_1+7d)(a_1+8d) < \frac{2a_1+4d}{2}5+39$

$a_1^2+15da_1+50d^2>$

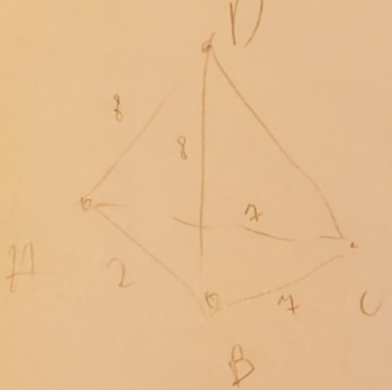
$2a_1^2+30da_1+100d^2 > 10a_1+20d+30$

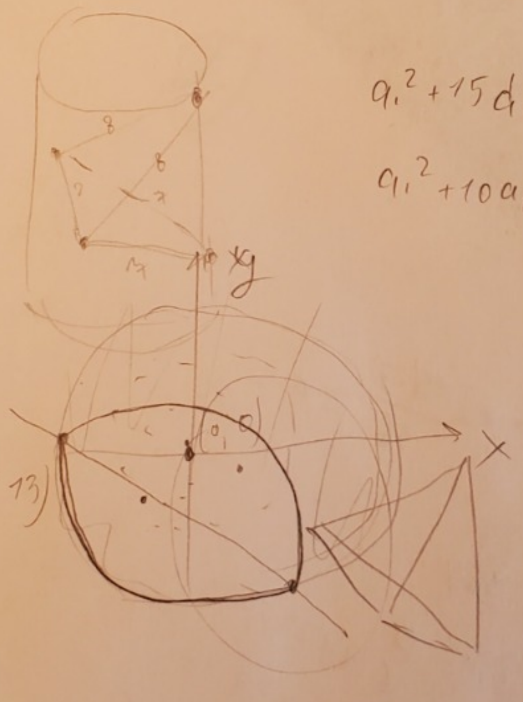
$2a_1^2+30da_1+112d^2 < 10a_1+20d+78$

$10a_1+20d+30 < 10a_1+20d+78-12d^2$

$12d^2 < 48$

$d^2 < 4$





$a_1^2+15d_1+50 > 5a_1+10+15$

$72 = 8\cdot 9$

$a_1^2+10a_1+25 > 0$

$D = \frac{-10\pm\sqrt{100-28}}{2}$

$\frac{-10\pm 6\sqrt{2}}{2}$

$-5\pm$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 13$

$a^2+b^2 \leq \min(-4a-6b;\ 13)$

$-4a-6b \leq 13$

$6b \geq -4a-13$

$b \geq -\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}$

19

$-3,19$

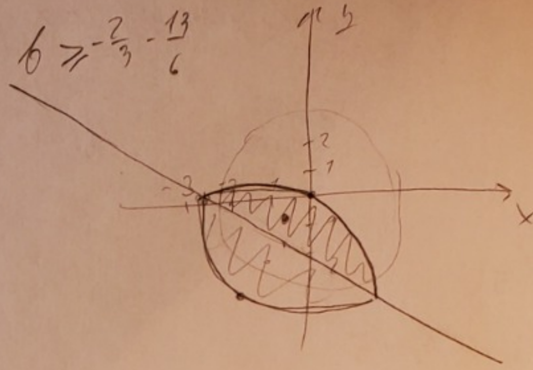
$4,2$

$a^2+b^2+4a+6b$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \leq 13$

21103056 (U334965 M1303894)

Черновик



$a^2+b^2 \leq \min(-4a-6b; 13)$

$-4a-6b \leq 13$

$b \geqslant -\frac{2}{3}a - \frac{13}{6}$

$b \geqslant -\frac{2}{3}a \frac{13}{6}$ $a^2+b^2 \cancel{\leq} +4a+6b+4+9 \leq 13$

$(a+2)^2+(b-3)^2 \leq 13$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 13$

$a^2+b^2 \leq 13$

4,5 · 4,5
4,5
2,5
20
2,5
20
24,75

4,5 3,5
4,5 3,5
2,5 2,5
20 1,5
20 1,5
16 9
12,25 12,25

$y = -\frac{2}{3}x - \frac{13}{6}$

$y^2+x^2 = 13$

$\frac{4}{9}x^2 + \frac{13 \cdot 2}{3 \cdot 3}x + \frac{13^2}{36} + x^2 = 13$

$\frac{2}{3}x = -\frac{13}{6}$

$4x = -13$

$x = -\frac{13}{4}$

4

$\frac{13}{9}x^2 + \frac{13 \cdot 2}{9}x - \frac{13(23)}{36} = 0 \cdot 9$

$x^2 + 2x - \frac{23}{\cancel{36}4}$

$y =$ $a = 0$ $b = -\frac{13}{4}$

$4x^2+8x-23=0$ $64+23 \cdot 4$

$(23+4) \cdot 16$

$27 \cdot 16$

8 $23 : 4$

$4 + \frac{1}{16}$

$= \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$

$-1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}$

Черновик

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 13$

$a^2+b^2 \leq -4a-6b$

$x^2+-2xa+a^2+x^2-2xb+b^2 \leq 13$

$x^2-2xa+y^2-2yb$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \leq 13$

$x^2-2xa+2a^2+2a+4$

x^2-2xa x^2+4

$(x-a)^2+(x-b)^2 \leq 13$

$a^2+b^2 \leq 13$

$x-$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103056**

ID профиля: **334965**

Вариант 20

Чистовик (1) Вар 2072

Задание 4

НОД$(a;b;c)=10$ значит $a=10\cdot n$ $b=10\cdot m$ $c=10k$

НОК$(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16}$ при этом $\frac{2^{17}\cdot 5^{16}}{10\cdot n}\in\mathbb{Z}$ следовательно

$2^{16}\cdot 5^{15} \vdots k; \vdots m; \vdots n$

Найдём всевозможные K: ~~18~~ 17 - вариантов взять ~~двайку~~ ч и ~~16~~ 16 вариантов взять 5. ~~Всего вариантов~~ Можно брать 0; 1; 2...; 16 двоек - 17 вариантов; аналогично с 5.

Всего вариантов: $17\cdot 16=272$

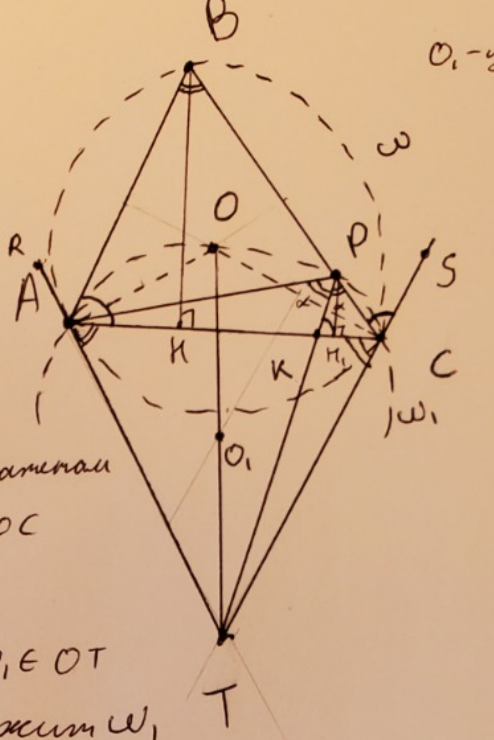
Всего 3 числа значит общее кол-во троек $272\cdot 3=816$

Ответ: 816 троек.

21103056 (U334965 M1303895)

Чистовик ② Вар 2072

O_1 - центр ω_1



Задание 6

ABC - описан ω

AOC описан ω_1

$BC \cap \omega_1 = P$

TA; TC - касательные к ω

$TP \cap AC = K$

$S_{\triangle APK} = 10$

$S_{\triangle CPK} = 8$

а) $S_{\triangle ABC}$ - ?

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

AC - ?

1. $\angle PCS = \angle BAC$ т.к. угол между касательной и хордой
2. $\angle ABC = \angle TAC = \angle TCA$ аналогично „1"
3. OO_1 - биссектриса $\angle AOC$ т.к. $AO = OC$
4. $\triangle AOT = \triangle COT$ по двум катетам $\Rightarrow$ OT - биссектриса $\angle AOC$ $\Rightarrow O_1 \in OT$
5. $OC \in \omega_1$; $\angle OCT = 90^\circ$ $O_1 \in OT$ $\Rightarrow$ точка T принадлежит ω_1
6. $\angle TAC = \angle TPC$ ~~ЕЛА~~ т.к. вписаные и опираются на одну хорду
7. соответственные углы при AB и PK равны $\angle ABC = \angle KPC \Rightarrow$ прямые $AB \parallel PK$.
8. $\triangle ABC \sim \triangle KPC$ по двум углам.
9. $\angle APT = \angle AST \overset{=\alpha}{}$ вписанные, опирающиеся на одну хорду
10. $S_{APK} = \frac{1}{2} AP \cdot PK \cdot \sin\alpha$ $\quad S_{KPC} = \frac{1}{2} PC \cdot PK \cdot \sin\alpha$

$$\frac{AP}{PC} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

11. $\angle PAC = 180 - \alpha - \angle AKP = 180 - \alpha - 180 + \angle PKC = \angle BAC - \alpha$

$\angle BAP = \angle BAC - \angle PAC = \angle BAC - \angle BAC + \alpha = \alpha \Rightarrow \triangle BPA$ - равнобокий $BP = PA$

$\frac{AP}{PC} = \frac{BP}{PC} = \frac{5}{4}$ $\quad \frac{BC}{CP} = \frac{9}{4}$ $\quad \frac{S_{ABC}}{S_{PKC}} = \left(\frac{BC}{CP}\right)^2 = \frac{81}{16}$ - для подобных треугольников квадрат коэффициента подобия $\quad S_{ABC} = S_{PKC} \cdot \frac{81}{16} = 8 \cdot \frac{81}{16} = \frac{81}{2} = \boxed{40,5}$

12. ~~H и H_1 высоты из B и P соответственно на AC~~

Ответ: а) $S_{ABC} = 40,5$

Черновик

$НОД(a,b,c) = 10$ $\quad a = 10\cdot k$ $\quad \frac{2^{16}\cdot 5^{15}}{k} =$ целое

$НОК(a,b,c) = 2^{17}\cdot 5^{16}$ $\quad b = 10\cdot m$

$c = 10n$

17
16
42
6
17
272

k может быть

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^{2}}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$ $\quad \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$\log_{2x-8}(x-4)^2 = \log_{(x-4)^2} 5x-26$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$(2x-8)^n = (x-4)^2$

$2\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

$(x-4)^{2\cdot n} = 5x-26$

$(2x-8)^{n^2} = 5x-26$

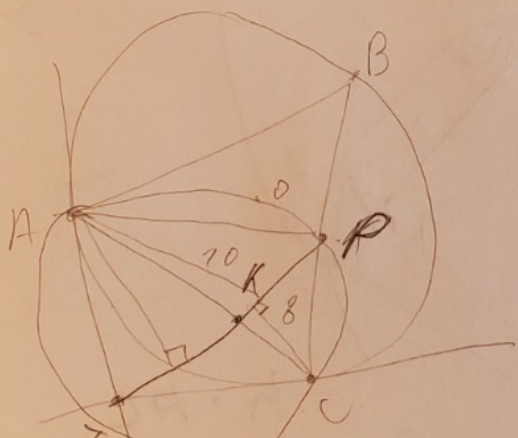
$\sqrt{2x-8}^{\,n} = x-4$ $\quad \log_{2x-8}(x-4)^2 = \log_{(x-4)}\sqrt{5x-26}$

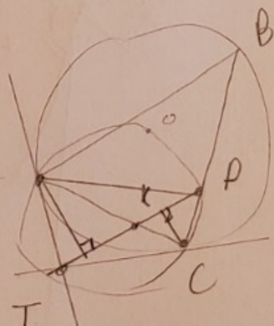
$\log_{5x-26}(2x-8)^2 = \log_{2x-8}(x-4)\sqrt{5x-26}$

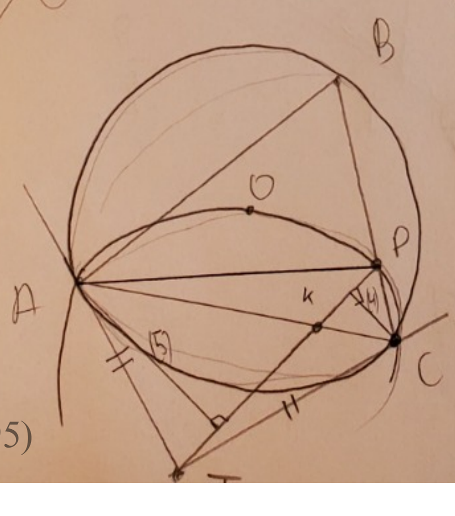
$\cancel{(x-4)^{2n} = 5x-26}$ $\quad \log$

$(5x-26)^k = (2x-8)^2$

$(2x-8)^k = \sqrt{2}(x-4)^{\frac{3}{2}}$







21103056 (U334965 M1303895)

$\log_{(x-4)^2} 5x-26 = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$x-4=y$

$5x-20=5y$

Черновик

$\log_{y^2} y-6 = \log_{\sqrt{y-6}} 2y$ $\cancel{\log_y y-6 =}$

$1+\log_{y^2} y-6 = \log_{\sqrt{2y}} y$

$\frac{1}{2}\log_y y-6 = 2\log_{y-6} 2y$ $y^n = y-6$

$\frac{1}{2}\log_{y}(y-6)(y^2) = 2\log_{2y} y$ $(y-6)^n = 16y^4$

$y^k = (y-6)y^2$

$\frac{1}{2}\log_{2^{k(k-1)}}(2^{k(k-1)}-6)\cdot k^2 k =$

$= 2\log_{2^{k^2+k+1}} 2^k$

$2^k y^k = y^4$

$2^k y^k = y$

$y^{k-1} = \frac{1}{2^k}$

$y = \frac{1}{2^{k-(k-1)}}$

$y = 2^{k(k-1)}$

$y = 2^{k-1}$

$AP \cdot PK \cdot \sin\alpha = 10$

$PC \cdot PK \sin\alpha = 8$

$\frac{AP}{PC} = \frac{5}{4}$

$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

17

16

42

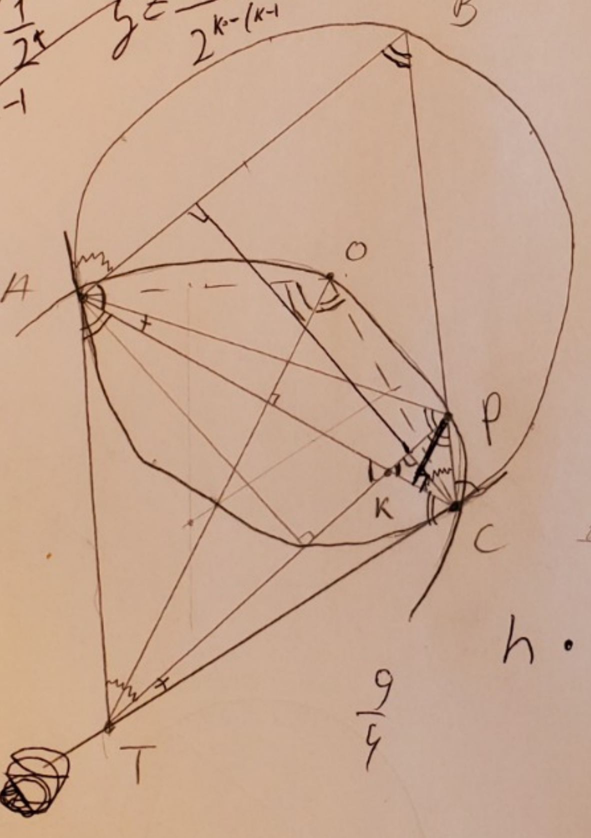
6

17

272

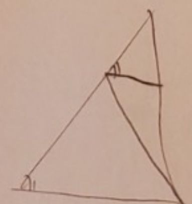
$40,5 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot AC$

$18 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} h$



$h \cdot AC$

$\frac{9}{4}$



$\gamma - \beta =$

$180 - \alpha - 180 + \beta =$

21103056 (U334965 M1303895)