Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103053**

ID профиля: **900555**

Вариант 20

Задача №1 Чистовик

Пусть b – разность прогрессии. По усл. $b>0$

$a_2=a_1+b$; $a_3=a_1+2b$ и т.д.

Т.к. прогрессия состоит из целых чисел, то a_1 и b – целые.

$S=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5a_1+b(1+2+3+4)=5a_1+10b$

$a_6=a_1+5b$; $a_8=a_1+7b$

$a_{11}=a_1+10b$; $a_9=a_1+8b$

1е усл: $a_6a_{11}>S+15$

$(a_1+5b)(a_1+10b)>5a_1+10b+15$

$a_1^2+15a_1b+50b^2>5a_1+10b+15$ (1)

2е усл: $a_8a_9<S+39$

$(a_1+7b)(a_1+8b)<5a_1+10b+39$

$a_1^2+15a_1b+56b^2<5a_1+10b+39$ (2)

$5a_1+10b+39>a_1^2+15a_1b+56b^2$

Сложим (1) и (2) (большую часть ур. с большей, меньшую с меньшей)

$a_1^2+15a_1b+50b^2+5a_1+10b+39>a_1^2+15a_1b+56b^2+5a_1+10b+15$

$39>6b^2+15$

$6b^2<24$

$b^2<4$ Т.к. b – целое и $b>0$, подходит только вариант $b=1$

Теперь подставим это в 1е усл.:

$a_1^2+15\cdot1a_1+50\cdot1^2-5a_1-10\cdot1-15>0$

$a_1^2+10a_1+25>0$

$(a_1+5)^2>0$

$\Rightarrow a\neq-5$

Затем подставим во 2е усл.:

$a_1^2+15a_1+56-5a_1-10-39<0$

$a_1^2+10a_1+7<0$

Чистовик

Задача №1 (продолжение)

Посчитаем гр. точки a_1: $a_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{100-4\cdot4}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{72}}{2} = \frac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2} =$

$= -5 \pm 3\sqrt{2}$

Тогда получается, что

$a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$

Так как нам нужны только целые знач. a_1:

$3\sqrt{2} \vee 4$ $\quad$ $3\sqrt{2} \vee 5$

$\sqrt{18} > \sqrt{16}$ $\quad$ $\sqrt{18} < \sqrt{25}$

$\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$

$3\sqrt{2} > 4$ $\quad$ $3\sqrt{2} < 5$ $\quad \Rightarrow \quad 4 < 3\sqrt{2} < 5$

Тогда $-5 < -3\sqrt{2} < -4$

Значит:

$-10 < -5-3\sqrt{2} < -9$

И также

$-1 < -5+3\sqrt{2} < 0$

Тогда, получается, в промежуток $a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$ из целых чисел будут включаться $-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1$

$a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$

Теперь учтём ~~условия~~ ограничения на a_1 из 2х условий.

$\begin{cases} a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\} \\ a_1 \neq -5 \end{cases}$

$\Rightarrow a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ:

$a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

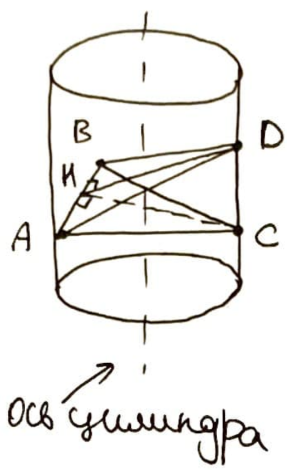
лист 2

Чистовик

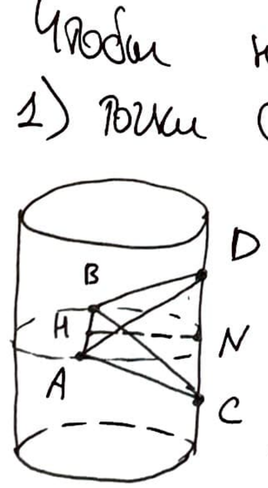
Задача №2

Дано:
$AB = 2$
$AC = CB = 7$
$AD = DB = 8$

CD - ?



По усл. $\triangle$ ~~ABC~~ ACB и $\triangle ADB$ — р/б.
⇒ точка D лежит на сер. перпендикуляре к AB и точка C тоже лежит на сер. перпендикуляре к AB
Проведём высоты в $\triangle ACB$ и $\triangle ADB$.
Т.к. они р/б. и у них общее основание AB, то они сойдутся в одной точке H, где H — середина AB.
(по св. равнобедр. треуг. высота — она и медиана и бисс)
Получается, что $DH \perp AB$ и $CH \perp AB$ ⇒
⇒ $AB \perp CD$, а т.к. CD парал. оси цилиндра ⇒ отрезок AB лежит в плоскости, параллельной основанию цилиндра.
~~[illegible]~~ Тогда AB — хорда окружности с ~~диаметром~~ радиусом, равным ~~диаметру~~ радиусу ~~основ~~ цилиндра.
Т.к. AB — фиксированная, то, чтобы радиус был наименьшим, AB должно быть диаметром цилиндра.
Тогда $R = AB/2 = 1$;
Чтобы найти CD:
1) Точки C и D лежат по разные стороны плоскости, в которой лежит AB (также эта плоскость параллельна основанию)



Проведём HN, ~~[illegible]~~ где N находится в этой плоскости и $N \in CD$
Т.к. H — центр окружности, то $HN = R = 1$
Т.к. $\triangle ABD$ — р/б. : по Т Пифагора
$BH = AH = R = 1$; $HD = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{64-1} = \sqrt{63}$
Также по Т Пифагора в $\triangle HDN$:
$DN = \sqrt{HD^2 - HN^2} = \sqrt{63-1} = \sqrt{62}$

Чистовик

Задача №2 (продолжение)

По Т Пифагора для $\triangle ACB$:

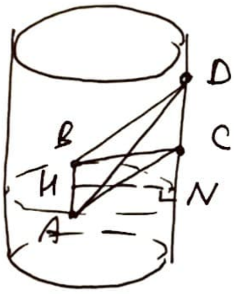
$$HC=\sqrt{AC^2-AH^2}=\sqrt{49-1}=\sqrt{48}$$

По Т Пифагора для $\triangle HNC$:

$$NC=\sqrt{HC^2-HN^2}=\sqrt{48-1}=\sqrt{47}$$

$$DC=DN+NC=\sqrt{62}+\sqrt{47}$$

2) Точки C и D лежат по одну сторону от той же плоскости (см. п. 1)



Аналогично пункту 1, используя Т Пифагора, мы можем найти

$HD=\sqrt{63}$ и $HC=\sqrt{48}$

Также аналогично пункту 1 находим DN и CN:

$DN=\sqrt{62}$; $CN=\sqrt{47}$

Только теперь $DC=DN-CN=\sqrt{62}-\sqrt{47}$

Ответ: $DC=\sqrt{62}+\sqrt{47}$

и $DC=\sqrt{62}-\sqrt{47}$

Чистовик

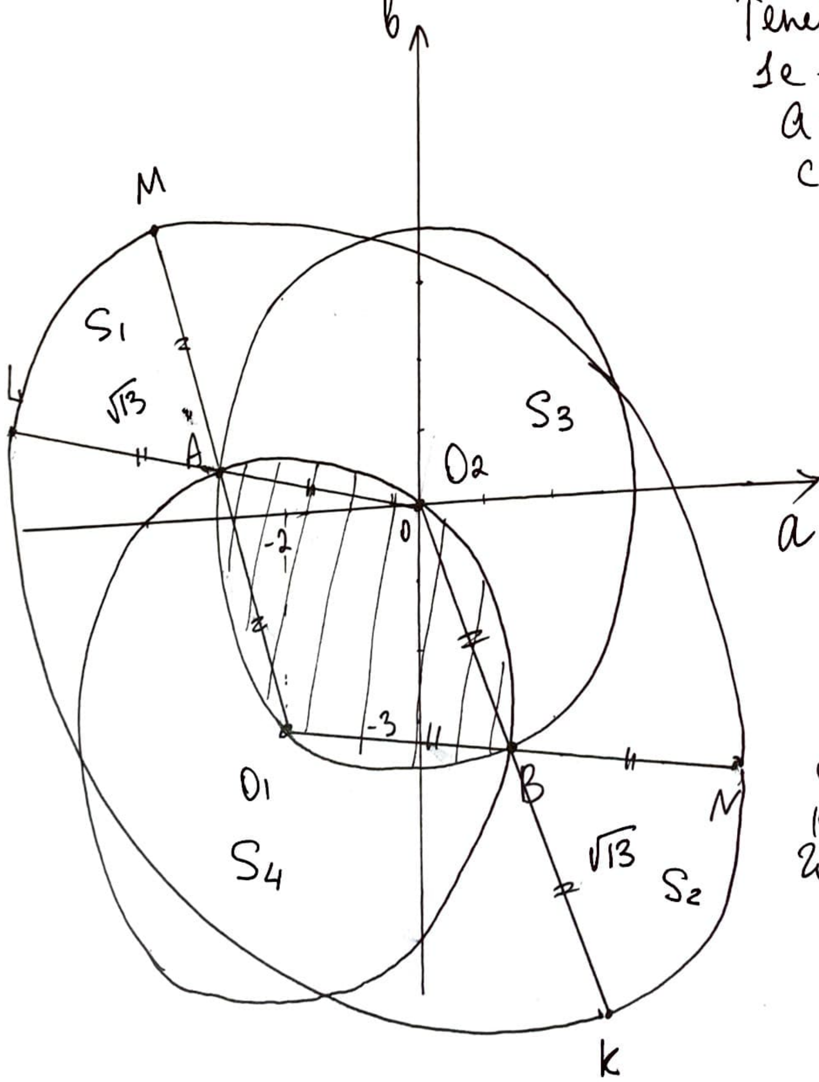
Задача №3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b;\,13) & (2)\end{cases}$$

Рассмотрим 2е ур: если выражение меньше минимума из 2х чисел, значит оно всегда меньше каждого из этих чисел, значит, 2е ур. можно записать так: $\begin{cases}a^2+b^2\le -4a-6b\\ a^2+b^2\le 13\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(a+2)^2+(b+3)^2\le 4+9\\ a^2+b^2\le 13\end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases}(a+2)^2+(b+3)^2\le 13 & \leftarrow \text{круг с центром } O_1(-2;-3) \text{ и } R_1=\sqrt{13}\\ a^2+b^2\le 13 & \rightarrow \text{круг с центром } O_2(0;0) \text{ и } R_2=\sqrt{13}\end{cases}$$

Решением 2го ур. будет являться пересечение кругов:



Теперь посмотрим на 1е ур.: относительно a и b это будет окр. с центром в точке $(x;y)$ и $R_3=\sqrt{13}$ (подходить будут все точки, лежащие внутри окр.)

Чтобы ~~всегда~~ могла всегда найтись такая пара $(a;b)$, чтобы система имела решение, то круг 1го уравнения должен либо пересекаться, либо касаться решения 2го уравнения

Чистовик

Задача №3 (продолжение)

Т.к. нам нужна площадь, состоящая из всех точек $(X;Y)$, то мы ~~будем записывать только расположения~~ обозначим на рисунке положение центров окружностей ~~2го~~ 2го ур.: — именно это и будут точки с координатами $(X;Y)$, которые нас просят найти.

Значит, фигурой ~~плоскость~~, содержащей все такие точки, будет фигура, содержащая в себе точки, удаленные от реш. 1го уравнения менее, чем на $l=\sqrt{13}$

Крайние точки реш. 2го ур.: O_1, O_2, A и B — они будут задавать границы этой ~~то~~ фигуры

(Т.к. все точки дуги AB удалены от O_1 на расст. $R=\sqrt{13}$, то соответственно центры всех окружностей удалены от точки O_1 на расст. $2R=2\sqrt{13}$. Аналогично с точкой O_2.

Оставшиеся „кусочки" фигуры по краям рассчитываются от крайних точек A и B: чтобы найти те площади, мы берем круг радиуса $R=\sqrt{13}$ и пересекаем его с другой частью фигуры, найденной ранее.

Эта получившаяся фигура — и есть фигура M.

~~Чтобы найти ее площадь, посчитаем координаты точек A и B.~~

AO_1BO_2 — ромб со стороной $R=\sqrt{13}$;

также O_1O_2 тоже равно $R=\sqrt{13}$ $(O_1O_2=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13})$

$\Rightarrow$ ΔO_1AO_2 — равносторонний $\Rightarrow$ $\angle O_1AO_2=\angle O_1BO_2=60^\circ$

Значит, углы $\angle AO_1B=\angle BO_2A=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

Чистовик

Задача №3 (продолжение)

Тогда $\angle MAL = \angle O_1AO_2 = 60^\circ$ как вертик. углы

~~S_{1} S_{2}~~ площади S_1, S_2, S_3 и S_4 обозначены на картинке

$S_1 = \pi R^2 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R^2}{6} = \frac{\pi \cdot 13}{6}$

$S_2 = S_1 = \frac{13}{6}\pi$ (т.к. $\angle KBN = \angle O_1BO_2 = \angle O_1AO_2 = 60^\circ$)

$S_3 = \pi \cdot (4R^2) \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{4R^2 \cdot \pi}{3} = \frac{4}{3} \cdot 13\pi = \frac{52}{3}\pi$

$S_4 = S_3$ аналогично S_1 и S_2

Заметим, что сложив все площади, которые мы посчитали, мы 2 раза посчитали $S_{AO_2BO_1}$

~~S_{AO_2B}~~ $S_{AO_2BO_1} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot R^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 13 = 13 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

Тогда $S_M = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 - S_{AO_2BO_1} =$

$= \frac{2 \cdot 13}{\cancel{6}_{3}}\pi + 2 \cdot \frac{52}{3}\pi - \frac{13\sqrt{3}}{2} = \frac{117}{3}\pi - \frac{13\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\frac{117}{3}\pi - \frac{13\sqrt{3}}{2}$

Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b;13)\end{cases}$$

min???

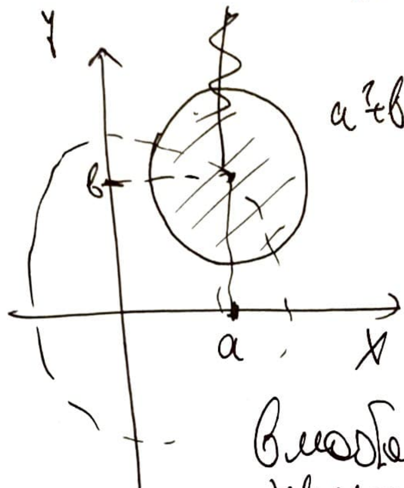
$$\Downarrow\quad \begin{cases}a^2+b^2\le 13\\ a^2+b^2\le -4a-6b\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

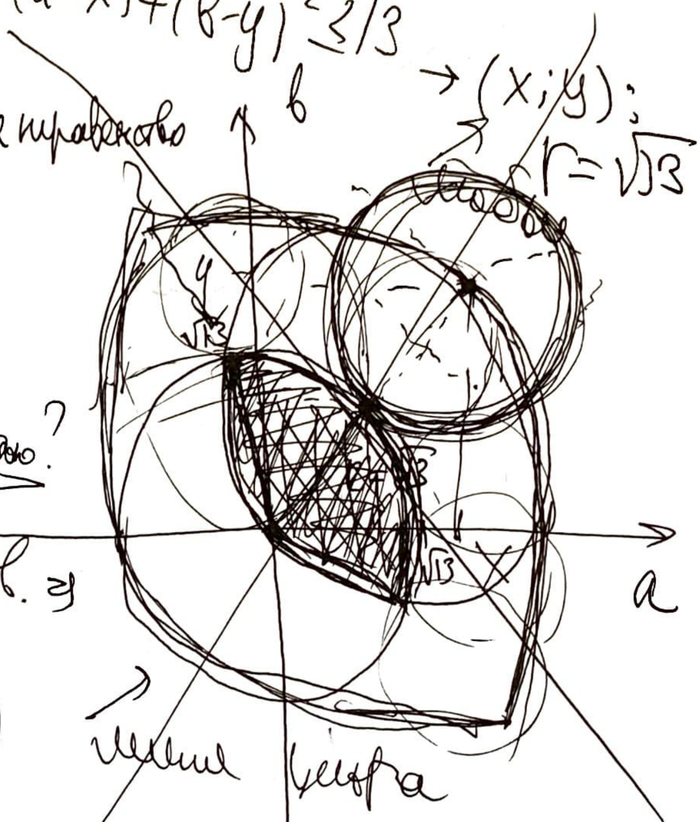
$$a^2+4a+4-4+b^2+6b+9-9\le 0$$

$$(a+2)^2+(b+3)^2\le 13$$

$$(a-x)^2+(b-y)^2\le 13$$

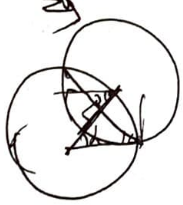


Неравенство $\to (x;y)$; $r=\sqrt{13}$



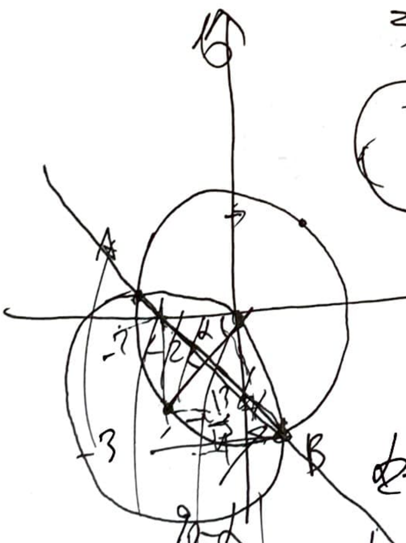
в любом круг наносно?

$(x;y)\to$ существ. $\exists$



линии центра

$(a-x)^2+(b-y)^2$



$$a\begin{cases}a^2+b^2\le 13\\ a^2+b^2\le -4a \quad (a+2)^2+(b+3)^2\le 13\end{cases}$$

$$4a+4+6b+9\le 0$$

$$4a+6b\le -13$$

$$a\le -\frac{13}{4}-6b$$

$\alpha = \operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$

$90-\alpha$

tg

$$\frac{169}{16}+36b^2+\frac{13\cdot 6}{2}b+b^2=13=\frac{238}{16}$$

$$37b^2+39b-\frac{69}{16}=0$$

$$b=\frac{-39\pm\sqrt{\ }}{}$$

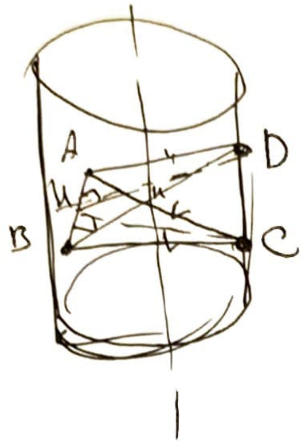
39×39

16×13
78
16
238
-169
69

39×39

Черновик:

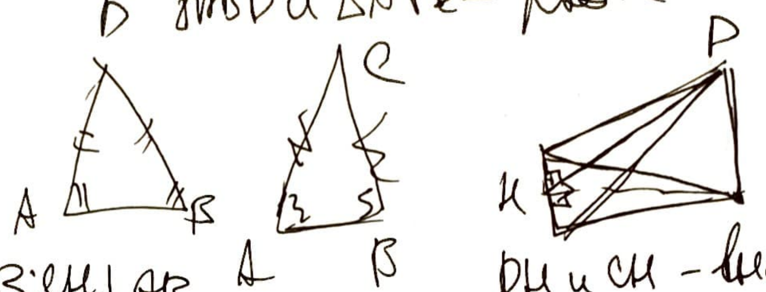
②



AD = BD; AC = BC

~~...~~ на сер. пер. к D и
на сер. пер. к C. ??

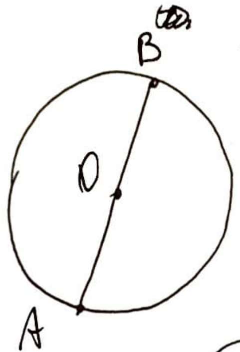
⇒ ΔABD и ΔABC — равноб. ??



DH ⊥ AB; CH ⊥ AB

DH и CH — высоты Δ в одной точке.

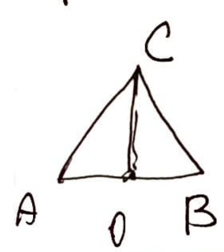
~~AB ⊥ DC~~ ~~сер. пер. к AB~~



AB — хорда основания цил.

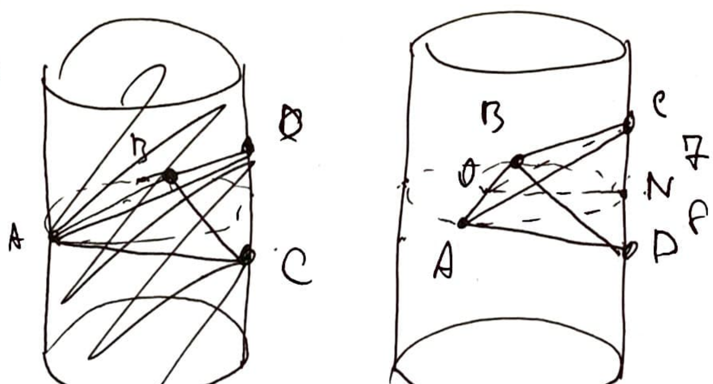
V → min ⇔ AB = диаметр

AO = OA = 1



AO = 1

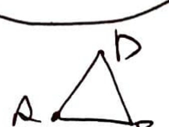
б) а)



$CO = \sqrt{\cancel{AC^2 - AO^2}} = \sqrt{49-1} = \sqrt{48} = \sqrt{16\cdot 3} = 4\sqrt{3}$

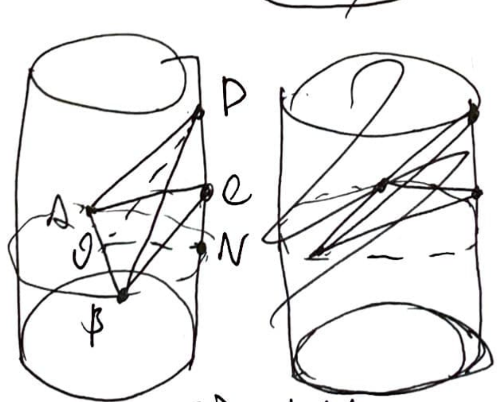
$ON = r = 1;$

$CN = \sqrt{48+1} = 7$



$OD = \sqrt{64-1} = \sqrt{63};$

$ND = \sqrt{OD^2 + ON^2} = \sqrt{64} = 8$



1) $CD = 7+8 = 15$

2) ~~DN − CN~~

$CD = DN - CN = 8 - 7 = 1$

Черновик

(1) $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_5$

$a_2 = a_1 + b$

$S = 5a_1 + (1+2+3+4)b = 5a_1 + 10b$

$a_6 = a_1 + 5b$ $\quad a_8 = a_1 + 7b$

$a_{11} = a_1 + 10b$; $\quad a_9 = a_1 + 8b$

1) $(a_1+8b)(a_1+10b) > S + 15$ $\qquad$ 2) $(a_1+7b)(a_1+8b) < S + 39$

$a_1^2 + 15a_1b + 50b^2 > 5a_1 + 10b + 15$ $\qquad$ $a_1^2 + 15a_1b + 56b^2 < 5a_1 + 10b + 39$

Вычитаем:

$a^2 < 24$; $b^2 < 4$; $b = -1; 0; 1$

все числа $\neq 0$

$b = 1$?

1) $a_1^2 + 15a_1 + 50 - 5a_1 - 10 - 15 > 0$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1 - 5)^2 > 0$

$a_1 \neq 5$

2) $a_1^2 + 15a_1 + 56 - 5a_1 - 10 - 39 < 0$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$100 - 28 = 72$

$72 = 2 \cdot 36 = 2 \cdot 6$

$a_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{100-28}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{72}}{2} = \frac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

$-5 \pm 3\sqrt{2}$

целые числа:

$a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$

$\sqrt{2} \approx 1{,}4$

$1{,}4 \cdot 3 = 4{,}2$

$-5-3\sqrt{2} \vee (\sqrt{25}+\sqrt{18})$

$3\sqrt{2} < 5$

$3\sqrt{2} \approx 4{,}2$

$3\sqrt{2} > 4$

$18 < 25$

$4 < 3\sqrt{2} < 5$

$9 < 5 - 3\sqrt{2} < 10$

$-1 < -5 + 3\sqrt{2}$; < 1

$-10 < -5 - 3\sqrt{2} < -9$

$3\sqrt{2} \vee 5$

$\sqrt{18} < \sqrt{25}$

$-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0;$

$a_9 - 5$ и 100

знак

$56 - 39 - 10 = 46 - 39 = 7$

$6\sqrt{2}$

$72 = 8 \cdot 9$

$\sqrt{4 \cdot 9}$

Черновик

6084 -

$$13 = -4a - 6b$$

$$a = -\frac{13}{4} - \frac{3}{2}b$$

$$\frac{169}{16} + \frac{9}{4}b^2 + \frac{39}{4}b = \frac{238}{16}$$

$$169 + 36b^2 + 156b = 238$$

$$36b^2 + 156b - 69 = 0$$

$$12b^2 + 52b - 23 = 0$$

$$D = 52^2 + 4\cdot 12\cdot 23$$

$$(a+2)^2 + (b+3)^2 \leq 13$$

$$4a^2 + b^2 < 13$$

$$4a^2 + 4 + \cancel{b^2} + 6b + 9 \leq 0$$

$$4a + 6b \leq -13$$

$$a \leq -\frac{13}{4} - \frac{3}{2}b$$

$$\frac{169}{16} + \frac{9}{4}b^2 + \frac{39}{4}b + b^2 \leq 13$$

$$\frac{13}{4}b^2 + \frac{39}{4}b - \frac{69}{16} \leq 0$$

$$D = \frac{39^2}{16} + \frac{13\cdot 69}{16}$$

$$\frac{61}{13}$$

$$39 \times 39 = 351 + 1170 = 1521$$

$$1521 \times 4 = 6084$$

$$6084 - 2553 = 3531$$

$$\frac{37\cdot 69}{4\cdot 16}$$

$$37 \times 69 = 483 + 2070 = 2553$$

$$238 - 169 = 69$$

$$48 \times 23 = 144 + 960 = 1104$$

$$52 \times 52 = 104 + 2600 = 2704$$

$$2704 + 1104 = 3808$$

$$39 \times 4 = 156$$

$$156 : 3 = 52$$

$$\frac{13}{4}$$

$$13 \times 6 = 78$$

$$1600 - 238 - 169 = 69$$

$$69 \times 13 = 207 + 690 = 897$$

$$1521 + 897 = 1308$$

$$1308 : 4 = 327$$

$$13 + 104 = 117$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103053**

ID профиля: **900555**

Вариант 20

Чистовик

Задача №4

$$\begin{cases} НОД(a, b, c) = 10 \\ НОК(a, b, c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} НОД(a; b; c) = 2^1 \cdot 5^1 \\ НОК(a; b; c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \end{cases}$$

Получается, если в НОД и НОК чисел присутствуют только 2 и 5ки, значит, в ~~множителях~~ самих этих чисел есть только 2 и 5ки (иначе в НОК ~~было~~ был бы другой множитель). Значит, мы можем представить ~~их~~ числа a, b, c в виде:

$a = 2^{x_1} \cdot 5^{y_1}$

$b = 2^{x_2} \cdot 5^{y_2}$

$c = 2^{x_3} \cdot 5^{y_3}$

Рассмотрим отдельно коэффициенты x_1, x_2 и x_3 степеней 2к: т.к. в НОД у нас 2ка со степенью 1, то у какого-то из 3х ~~множителей~~ чисел ~~нет~~ обязательно должна быть двойка с коэфф. 1 в множителе (т.к. иначе, если бы там её не было/было бы 2 или больше, то в НОД уже бы либо не было 2ки, либо была бы 2 ~~сте~~ в степени 2 и т.д.)

Аналогично ещё ~~одна~~ одна ~~число~~ двойка обязательно должна быть ~~коэф~~ со степенью 17 (т.к. в НОК есть 2^{17}: если бы все ~~коэф~~ степени были меньше 17, то в НОК максимум бы была 2^{16}, а если где-то бы была 2^{18} или больше, соотв. она появилась бы и в НОК).

лист 1

Чистовик

Задача №4 (продолжение).

То есть, получается, что из 3х степеней двойки хотя бы одна должна быть 1-кой, и хотя бы одна должна быть 17, а последняя ~~п~~ оставшаяся может быть любой от 1 до 17 включительно.

Т.е. у одной степени 1 вариант – единица;
у другой 1 вариант – 17,
а у оставшейся – 17 вариантов (от 1 до 17 вкл.)

Т.е. всего вариантов их размещения
$3 \cdot 2 \cdot 17 = 6 \cdot 17$

Заметим, что тут мы 2 раза посчитали варианты, в которых есть 2 одинаковые степени.
У нас 2 таких набора степеней: 1, 1 и 17 и 17, 17 и 1

В каждом из таких наборов по $\frac{3 \cdot 2}{2} \cdot 1 = 3$ варианта перестановок, т.е всего $3+3=6$ случаев, которые мы посчитали 2 раза.

Тогда ~~всего~~ всего различных случаев получается $6 \cdot 17 - 6 = 6 \cdot 16 = 96$ вар.

Теперь рассмотрим степени 5ки и также посчитаем и их:

лист 2

Чистовик

Задача №4 (продолжение)

Т.к. в НОД 5 в степени 1, а в НОК — в степени 16, то, ~~аналогично~~ рассуждая аналогично первому случаю с двойками, получаем, что одна степень должна быть единицей, одна — 16, и ещё одна — любой от 1 до 16 включительно (т.е $16-1+1=16$ вар.)

Т.е. $3 \cdot 2 \cdot 16 = 6 \cdot 16$ вариантов их разместить без учёта посчитанных по 2 раза случаев

Тут наборы для таких случаев 1, 1 и 16 и 1, 16 и 16

Аналогично $\frac{3 \cdot 2}{2!} \cdot 1 = 3$ вар. на каждый случай, всего 6.

В итоге всего для 5-ок будет $6 \cdot 16 - 6 = 6 \cdot 15 = 90$ вариантов.

Тогда всех вариантов чисел a, b и c будет $90 \cdot 96 = 8640$ штук.

Ответ: 8640.

Чистовик

Задача №5

Числа $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$, $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$, $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

Сделаем замену: $a = 2x-8$; $a>0$;
$b = x-4$;
$c = 5x-26$; $c>0$

Запишем ОДЗ для x:

$\left.\begin{aligned} &\sqrt{2x-8}>0; \ x>4 \\ &\sqrt{2x-8}\neq 1; \ x\neq 9/2 \\ &x-4>0; \ x>4 \\ &x-4\neq 1; \ x\neq 5 \\ &5x-26>0; \ x>26/5 \\ &5x-26\neq 1; \ x\neq 27/5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x>\frac{26}{5} \text{ и } x\neq\frac{27}{5}$

При учёте ОДЗ a, b и $c>0$

Тогда можем записать числа так:

$2\log_a b$; $\frac{1}{2}\log_b c$; $2\log_c a$

Заметим: если все 3 числа перемножить, то получится:

$2\log_a b\cdot\frac{1}{2}\log_b c\cdot 2\log_c a = 2\frac{1}{\log_b a}\cdot\log_b c\cdot\log_c a = 2\cdot\log_a c\cdot\log_c a =$

$= 2\cdot\frac{\log_c a}{\log_c a} = 2$ Сделаем ещё одну замену:

$\log_a b = m$

$\log_b c = n$

Тогда, учитывая все условия: $\log_c a = k$

$\begin{cases} m\cdot n\cdot k = 2 \\ m = n \\ k = m+1 \end{cases} \Rightarrow$ $m^2(m+1) = 2$

$m^3+m^2-2=0$

$(m-1)(m^2+2m+2)=0$

$m^3+m^2-2 \ | \ m-1$
$-(m^3-m^2) \ | \ m^2+2m+2$
$2m^2$
$-(2m^2-2m)$
$2m-2$
$-(2m-2)$
0

$\Rightarrow$ только 1 решение $m=1$

$D = 4-4\cdot 2<0 \Rightarrow$ решений нет

Чистовик

Задача №5 (продолжение)

Тогда $m = n = 1$, а $k = m + 1 = 2$

Т.е. 2 числа будут равны 1це, а другое — 2ке.

Нужно рассмотреть 3 случая:

~~1)~~ $\cancel{\begin{cases} \frac{1}{2}\log_a b = 1 \\ 2\log_b c = 1 \\ \frac{1}{2}\log_a c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_a b = \log_a a^2 \\ \log_b c = \log_b \sqrt{c} \\ \log_a c = \end{cases}}$

~~убедимся, что по ОДЗ это уже невозможно~~

~~1)~~ $\cancel{\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 1 \\ \log_{(x-4)^2}(5x-26) = 1 \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-4-\sqrt{2x-8}}{\sqrt{2x-8}-1} = 0 \\ \frac{5x-26-(x-4)^2}{(x-4)^2-1} = 0 \\ \frac{2x-8-(\sqrt{5x-26})^2}{\sqrt{5x-26}-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow}$

~~в этих также убедимся~~

$\cancel{\Rightarrow \begin{cases} (x-4)^2 = 2x-8 \\ 5x-26 = x^2-8x+16 \\ 2x-8 = 5x-26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-10x+24=0 \\ x^2-13x+42=0 \\ x \end{cases}}$

1) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 2$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) - \log_{\sqrt{2x-8}}(2x-8) = 0$

$(\sqrt{2x-8}-1)(x-4-2x+8) = 0$

$\uparrow$ изза ОДЗ нет

$-x+4=0$

$x = 4$

по ОДЗ не подходит.

~~2)~~ $\cancel{\log_{(x-4)^2}(\sqrt{5x-26}) = 2}$

$\cancel{((x-4)^2-1)(5x-26-(x-4)^4) = 0}$

~~по ОДЗ нет~~

Чистовик

Задача №5 (продолжение)

2) $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=2$

$(\sqrt{5x-26}-1)(2x-8-(5x-26))=0$

по ОДЗ нет

$2x-8-5x+26=0$

$3x=18$

$x=6$ — по ОДЗ проходит $\Rightarrow$ ~~~~ надо проверить условие на 1ку:

$$\begin{cases}\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1\\ \log_{(x-4)^2}(5x-26)=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{x-4-\sqrt{2x-8}}{\sqrt{2x-8}-1}=0\\ \dfrac{5x-26-(x-4)^2}{(x-4)^2-1}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x^2-8x+16=2x-8\\ x^2-8x+16=5x-26\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2-10x+24=0\\ x^2-13x+42=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=6\\ x=4\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=6\\ x=7\end{array}\right.\end{cases} \Rightarrow \underline{x=6}$$ — ответ сходится $\Rightarrow$ $x=6$ подходит

3) $$\begin{cases}\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1\\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{x-4-\sqrt{2x-8}}{\sqrt{2x-8}-1}=0\\ \dfrac{2x-8-\sqrt{5x-26}}{\sqrt{5x-26}-1}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2-8x+16=2x-8\\ 4x^2+64-32x=5x-26\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x^2-10x+24=0\\ 4x^2-37x+90=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=6\\ x=4\end{array}\right.\\ D=37^2-4\cdot 4\cdot 90=1369-1440<0\end{cases} \Rightarrow \text{решений нет}$$

$37\cdot 37$: 259, 1110, 1369; $16\cdot 90=1440$

Получается, остаётся один ответ $x=6$, который подходит

Ответ: $x=6$

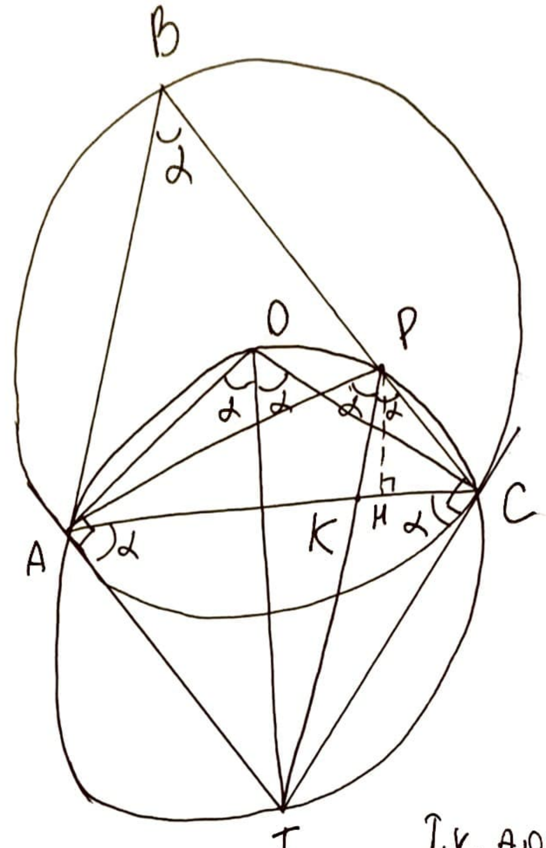
лист 6

Чистовик

Задача №6

Дано:
$S_{APK} = 10$
$S_{CPK} = 8$

а) S_{ABC} - ?
б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}(\frac{1}{2})$
AC - ?



Т.к. AT и CT – касательные $\Rightarrow \angle OAT = 90°$ и $\angle OCT = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle OAT + \angle OCT = 180° \Rightarrow$ значит □$AOCT$ – вписанный (по пр. впис. 4 уг.)

Т.к. вторая окр. описана около ΔAOC, значит, она описана и около □$AOCT$, значит, T лежит на окружности.

Т.к. AO и OC – радиусы ω, то $AO = OC$ и ΔAOC – р/б.
AT и CT – отрезки касат. из одной точки $T \Rightarrow AT = CT$ и ΔATC – р/б.

Значит, $\angle CAT = \angle ACT = \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \smile AT = \smile CT$

Тогда $\angle TOC = \angle AOT = \alpha$ и $\angle TPC = \alpha$ как вписанные углы.

Для окружности ω $\angle AOC$ – центральный.
$\angle AOC = \angle AOT + \angle TOC = 2\alpha$; $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\smile AC$ ~~[illegible]~~ окружности ω будет равна 2α.

Тогда $\angle ABC = \frac{\smile AC}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$.

Т.к. $\angle ABC = \alpha$ и $\angle TPC = \alpha \Rightarrow AB \parallel PT$ по признаку парал. прямых.

Тогда, получается, $\Delta CKP \sim \Delta CAB$ ($\angle BCA$ – общий, и $\angle ABC = \angle KPC$)

Значит, $\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = k^2$, где $k = \frac{AC}{KC}$

Проведём высоту PH ($H \in AC$). Она одинаковая для ΔAPK и ΔPKC.

$S_{APK} = \frac{AK \cdot PH}{2}$; $S_{PKC} = \frac{KC \cdot PH}{2}$

Чистовик

Задача №6 (продолжение)

Тогда $\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{AK}{KC}$; $\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{5}{4}$

т.е. $AK = 5x$; $KC = 4x$

Тогда $AC = AK + KC = 9x$; Значит $\frac{AC}{KC} = \frac{9x}{4x} = \frac{9}{4}$

Тогда $\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = k^2 = \frac{81}{16}$; $S_{ABC} = \frac{81}{16} \cdot S_{KPC} = \frac{81}{\cancel{16}_2} \cdot \cancel{8} = \frac{81}{2}$

Так как $\cup AT = \cup CT$, то $\angle APK = \angle KPC = \alpha$

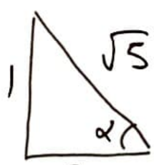
Значит, PK – биссектриса в $\triangle APC$

По свойству биссектрисы $\frac{AP}{AK} = \frac{PC}{KC} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{5}{4}$

Значит, $AP = 5y$; $PC = 4y$

$S_{APC} = S_{APK} + S_{PCK} = 10 + 8 = 18$

Также $S_{APC} = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha = \frac{20y^2}{2} \cdot \sin 2\alpha = 10y^2 \cdot \sin 2\alpha$



$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cos\alpha = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$\angle\alpha = \angle ABC$ (по условию 2го пункта)

$\angle APC = \angle APK + \angle KPC = \alpha + \alpha = 2\alpha$

$S_{APC} = \cancel{10}^{2} y^2 \cdot \frac{4}{\cancel{5}} = 8y^2$;

$S_{APC} = 8y^2 = 18 \Rightarrow y^2 = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

~~Тогда AP=~~

Тогда по Т косинусов для $\triangle APC$:

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP \cdot PC \cdot \cos 2\alpha = 25y^2 + 16y^2 - 2 \cdot 5y \cdot 4y \cdot \frac{3}{\cancel{5}} =$
$= 41y^2 - 24y^2 = 17y^2$

$AC = \sqrt{17}y = \sqrt{17} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{17}$

Ответ: $S_{ABC} = \frac{81}{2}$; $AC = \frac{3}{2}\sqrt{17}$

~~Черн~~ Черновик

3 следстая $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$; $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$; $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$a = 2x-8$

$b = x-4$

$c = 2x-8$

$2\log_a b$; $\frac{1}{2}\log_b c$; $2\log_c a$

$= n$ $= m$ $= k$

$\log_a b \cdot \log_b c$

числа b, c, d;

$b = c$,

$d = b+1$ => числа $c; c; b+1$

ОДЗ!!!

$x > 4$

$x > 26/5$

$x \neq 5$

$x \neq \frac{27}{5}$

$x \neq 9/2$

$\boxed{x > \frac{26}{5},\ x \neq 27/5}$

$\frac{2}{\log_b a} \cdot \frac{1}{2}\log_b c$; $2\log_c a$

$\frac{\log_b c}{\log_b a} = \log_a c \cdot \log_c a = \cancel{2}$

$\begin{cases} nmk = 2 \\ n = m; \\ k = m+1 \end{cases}$

$m^2(m+1) = 2$

$m^3 + m^2 - 2 = 0$

$(m-1)(m^2+2m+2) = 0$

$m = 1$

$D < 0$

$4 - 4 \cdot 2 < 0$

$m^3 + m^2 - 2 \mid m-1$

$m^3 - m^2 \qquad m^2+2m+1$

$2m^2$

$-2m^2 - 2m$

$2m - 2$

числа 1, 1 и 2

3 случ: $1ч = 2ч = 1$; $3ч = 2$

$1ч = 3ч = 1$; $2ч = 2$

$2ч = 3ч = 1$; $1ч = 2$

Черновик

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c) = 2^1 \cdot 5^1 \\ \text{НОК}(a,b,c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \end{cases}$$

$a = 2^{x_1} \cdot 5^{y_1}$
$b = 2^{x_2} \cdot 5^{y_2}$
$c = 2^{x_3} \cdot 5^{y_3}$

2ки: x_1, x_2 и x_3
есть точно

последние → $\underbrace{1 \text{ и } 17}_{\text{любое от } 1 \text{ до } 17}$

все: $3 \cdot 2 \cdot 18$

~~Вычтем те, которые посчитали 2 раза:~~
~~1 1 17; 1, 17, 1; 1, 1, 17~~

все: 3

1, 17 и 17 — 1 вар.

← от 1 до 17
17 вар.

$3 \cdot 2 \cdot 17$

$- (1\,1\,17;\ 17\,1;\ 17\,1\,1)$
почне с 17

1) разные (от 2 до 16)
$45 \cdot 2 \cdot 1$ ~~3 · 2 · 15~~

2) 1, 1 и 17 — 3

2) 1, 17 и 17 — 3.

для 5ки:

1) все: $3 \cdot 2 \cdot 16$

минус 6:

1 1 16 | 16 1 61
1 16 1 | 16 1 16
16 1 1 | 1 16 16

от 2 до 15
$15 - 2 + 1 = 14$ вар.

3) всего $3 \cdot 2 \cdot (16-1) = 3 \cdot 2 \cdot 15$

Всего $(6 \cdot 15) \cdot (6 \cdot 16) =$
$= 8640$

$\times 16 \cdot 6 = 96$
$76+16 = 42$
$+16+8$

$\times 96 \cdot 90 = 8640$

Черновик

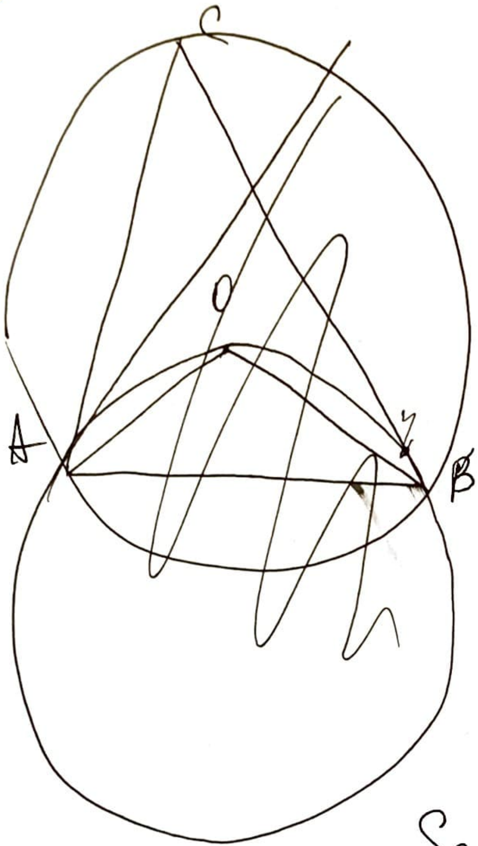
~~НОД (a,b c) = 10 = 2·5~~

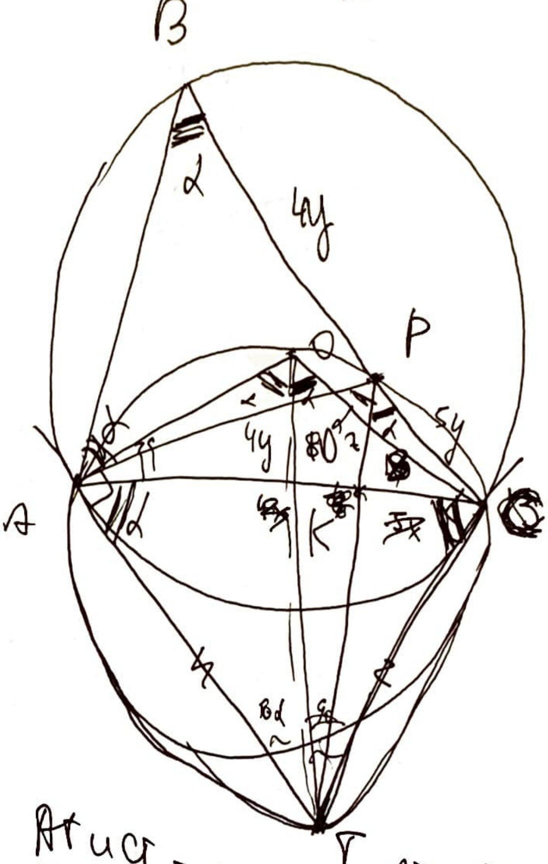
~~НОД (a,b,c) = 2·17·8·16~~

~~△ABP – р/б.~~

~~$S_{ABP} = \frac{5}{8} - 18 =$~~

6





$AK = KC$

~~△APC – р/б.~~

~~$S_{ABC} = 4$~~

AT и CT – касат.

$AT = CT$

$$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{CK} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$AK = 4x$

$CK = 5x$ $\frac{4}{9}S = 10^2$

$S = 18$

$$\frac{S_{CPB}}{S_{CKP}} = \frac{CK}{AC} = \frac{5}{9}, \quad AC = 9x$$

~~$S_{CPB} = \frac{5}{9} \cdot 18 \ldots = 18$~~

PK – бисс.

$$\boxed{\frac{AP}{PC} = \frac{KA}{KC} = \frac{4}{5}}$$

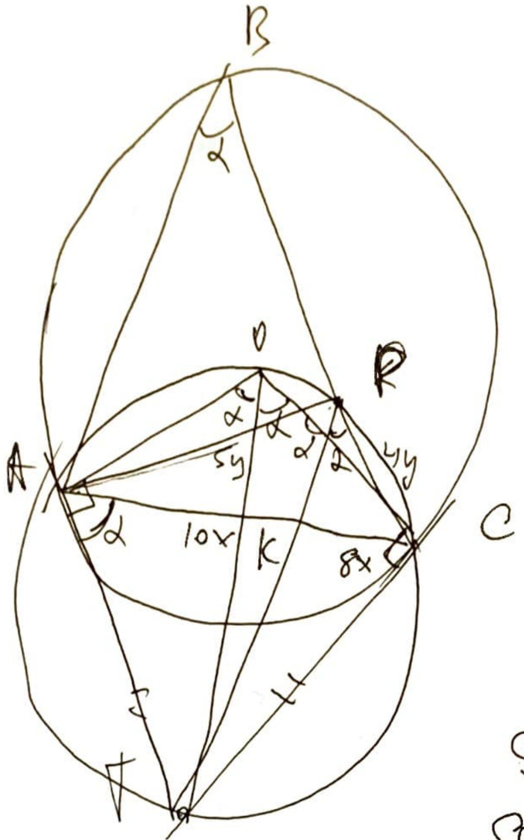
$AP = 4y;\ PC = 5y$

~~△ABC – р/б; AB = 2~~

~~$S_{ACT} = \frac{AK}{2} \cdot tg\,\alpha + \frac{KC}{2} \cdot tg\,\alpha =$~~ $S_{ACT} = \frac{AC \cdot tg\,\alpha}{2}$

$\boxed{S}$

Черновик



~~$\frac{S_{BPC}}{S_{CPK}} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$~~

~~$S_{OBC} = \frac{9}{4}\cdot 8 = 18$~~

25
16
41
24
17

$\frac{S_{ABC}}{S_{CPK}} = k^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16}$

$S_{OBC} = \frac{81}{16}\cdot 8 = \frac{81}{2}$

$\frac{AP}{PC} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4};$

PK

~~$S_{APK} = 10x$~~ $\cdot$ $S_{APK} =$ ~~$\frac{5y\cdot PK}{2}\sin\alpha$~~

$5y\ PK =$

$S_{APC} = 18$

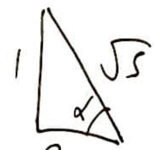
$S_{APC} = \frac{20y^2}{2}\cdot\frac{4}{5} = \frac{40}{5}y^2 = 8y^2$

$18 = 8y^2;$

$y^2 = \frac{9}{4};\ y = \frac{3}{2}$

$AP = 5y = \frac{15}{2};$

$PC = 4y = \frac{12}{2} = 6$



$\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} = \frac{4}{5}$

$\cos 2\alpha = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = 3/5$

$AC^2 = 25y^2+16y^2-40y^2\cos 2\alpha = 41y^2 - 40y^2\cdot\frac{3}{5} = (41-24)y^2 = 17y^2$

$AC = \sqrt{17}\,y = \frac{3}{2}\sqrt{17}$

~~$\log_a b = 1;$~~

$\log_a b = \log_b c$

~~$\log_a b$~~ $= \log_b c$

~~$\log_b c$~~ $\frac{1}{\log_b a} = \log_b c$

$\frac{1 - \log_b a\cdot\log_b c}{\log_b a} = 0$

~~Задача №4~~ ~~Чистовик~~

Черновик

~~НОК(a, b, c) = $2^{17} \cdot 5^{16}$~~

~~НОД(a, b, c) = 10~~

2)

$9 \cdot 9 = 81 + 8 = 86$

$S_{AKM} = \frac{54 \cdot PK}{2 \sin 112}$

$96 \times 90 = 8640$

$\frac{1}{2}\log_a b$; $2\log_b c$; $\log_a c$

112; 121; 211

$\log_c a = 2$ $\quad \log_a b = 1$ $\quad \log_a c = 2$

$\log_b c = 1$

$2 \cdot 8 \cdot 2 = 4 \cdot 8 = 32$