Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103047**

ID профиля: **193173**

Вариант 20

Чистовик

№1

Пусть $a_{n+1}-a_n=d$, т.к. прогрессия из целых чисел, то ~~$a_1, d\in\mathbb{Z}$~~ $a_1; d\in\mathbb{Z}$

$a_1=a$

$S=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5a_1+10d=5a+10d.$

$a_6=a+5d$, $a_8=a+7d$, $a_9=a+8d$, $a_{11}=a+10d$

Тогда наше условие:

$$\begin{cases}(a+5d)(a+10d)>5a+10d+15\\(a+7d)(a+8d)<5a+10d+39\end{cases}\iff$$

~~Вычтем из первого условия второе:~~

~~$(a^2+15ad+50d^2)-(5a+10d+39)$~~

$$\iff\begin{cases}a^2+15ad+50d^2>5a+10d+15\\a^2+15ad+56d^2<5a+10d+39\end{cases}$$

1) просуммируем крест накрест:

$$a^2+15ad+50d^2+5a+10d+39>a^2+15ad+56d^2+5a+10d+15$$

$$\Updownarrow$$

$24>6d^2\iff d^2<4$, т.к. $d\in N$, то $d=1$

Чистовик

№1 (продолжение)

Т.к. $d=1$, то наше условие:

$$\begin{cases}(a+5)(a+10)>5a+25\\(a+7)(a+8)<5a+49\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+10a+25>0\\a^2+10a+7<0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(a+5)^2>0\\(a+5)^2<18\end{cases} \Leftrightarrow (a+5)^2 \in [1;17] \Leftrightarrow$$

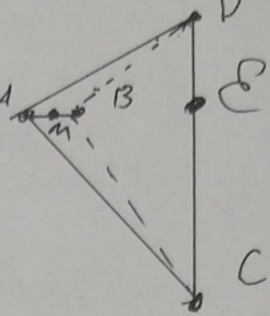
$$\Leftrightarrow |a+5| \in [1;4] \Leftrightarrow a \in \{-4;-3;-2;-1;1;2;3;4\}$$

Ответ: a, может принимать значения:

$-4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4$

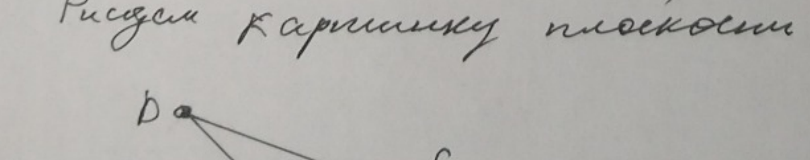
Чистовик

№2



~~Я~~ Пусть в плоскости параллельной основанию цилиндра и содержащую сторону AB лежит точка E, где E - точка пересечения прямой CD с этой плоскостью. Тогда радиус цилиндра это радиус описанной окружности вокруг $\triangle ABE$. Т.к. окружность содержит хорду длиной 2 $\Rightarrow$ её радиус ≥ 1, случай когда $R=1$ является искомым $\Rightarrow$ AB диаметр этой окружности. Т.к. $AD=DM$, $AC=BC$, то если M - середина AB, то тетраэдр симметричен относительно плоскости MDC. Тогда $EM \perp AB$, $ME \perp DC$, по построению, $MD \perp AB$ и $CM \perp AB$. Рисуем картинку плоскости MDC:

1)

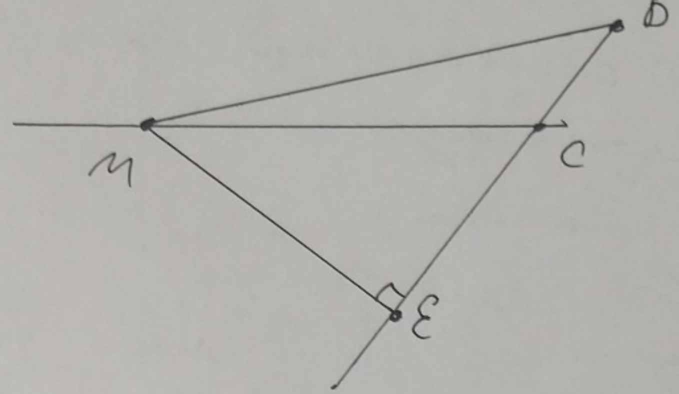


$E \in DC$

Чистовик

№2 (продолжение)

2) $\mathcal{E} \notin DC$



MC по теореме пифагора $= \sqrt{48}$, а ~~DE~~ $MD = \sqrt{63}$. Для того чтобы AB было диаметром ABE, ME должен быть равен 1, тогда:

1) $DE = \sqrt{63 - 1} = \sqrt{62}$
$EC = \sqrt{48 - 1} = \sqrt{47}$ $\Rightarrow CD = \sqrt{47} + \sqrt{62}$

2) $DE = \sqrt{63 - 1} = \sqrt{62}$
$EC = \sqrt{48 - 1} = \sqrt{47}$ $\Rightarrow CD = \sqrt{62} - \sqrt{47}$

Ответ: $CD = \sqrt{62} \pm \sqrt{47}$

Чистовик

№ 3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;13)\end{cases}$$

первое условие говорит, что x, y должно быть на расстоянии $\le \sqrt{13}$ от множества возможных точек $(a;b)$

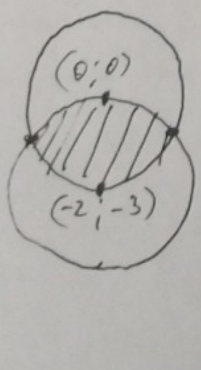
второе условие:

$$a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;13) \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le -4a-6b\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2 \le 13 \\ (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13\end{cases} \Leftrightarrow (a;b)$$ принадлежит

пересечению двух окружностей в центрах $(0;0)$ и $(-2;-3)$ и радиусами $\sqrt{13}$

Заметим, что расстояние между $(0;0)$ и $(2;-3)$ это $\sqrt{13}$ => область возможных точек $(a;b)$ ~~вид~~ выглядит так:



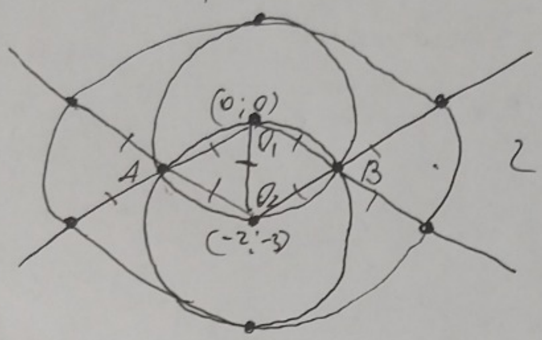
МАТЕМАТИКА 11кл

Чистовик

№3 (продолжение)

Тогда фигура M это объединение всех возможных кругов радиуса $\sqrt{13}$ с центром в $(a;b)$.

M:



Где границы 1 и 3 это части окружностей с центрами $(0;0)$; $(-2;-3)$ и радиусами $2\sqrt{13}$, а границы 2 и 4 это части окружностей в точках A и B и радиусами $\sqrt{13}$, т.к. для областей 2 и 4 за границами близкой точкой является A или B, а для 1 и 3 – точка на дуге.

Площадь фигуры M можно вычислить, т.к. $\triangle AO_1O_2$ и AO_1BO_2 – правильные $\Rightarrow \angle AO_1B = \angle AO_2B = 120^\circ$, а $\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2 = 60^\circ \Rightarrow$ Площадь это 2 сектора круга с радиусом $\sqrt{13}$ и углом 60° + 2 сектора круга радиуса $2\sqrt{13}$ и углом 120° – $S(AO_1BO_2)$ =

$$= \pi \cdot 13 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} + \pi \cdot 52 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{13 \cdot \sqrt{3}}{2} = 13\left(3\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ответ: $S(M) = 13 \cdot \left(3\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

6/6

21103047 (U193173 M1299917)

Черновик

$a_1 +$

$5a+10d=5$

$$\begin{cases}(a+5d)(a+10d) > 5a+10d+15 \\ (a+7d)(a+8d) < 5a+10d+39\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a^2+15ad+50d^2 > 5a+10d+15 \\ a^2+15ad+56d^2 < 5a+10d+39.\end{cases}$$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

$|d| = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases}a^2 \pm 15a+50 > 5a \pm 10+15 \\ a^2 \pm 15a+56 < 5a \pm 10+39 \\ a^2+14 \\ a^2+10a+\cancel{25} >\end{cases}$$

$a^2-20a+45>0$

$a^2-20a+27<0$

$(a-10)^2 > 55$ $\quad |a+10|=8$

$(a-10)^2 < 73$ $\quad 2.18$

$a^2+10a+25>0$ $\quad -4 \; -6.$

$a^2+10a+17<0$ $\quad -1 \; -4 \quad -1 \quad -4 \; -6.$

$(a+5)^2 < 8.$ $\quad -9$

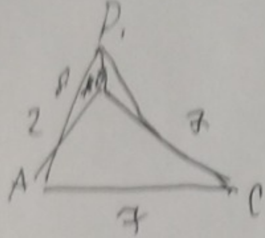
a^2-20a

$a^2+10a+7<0.$

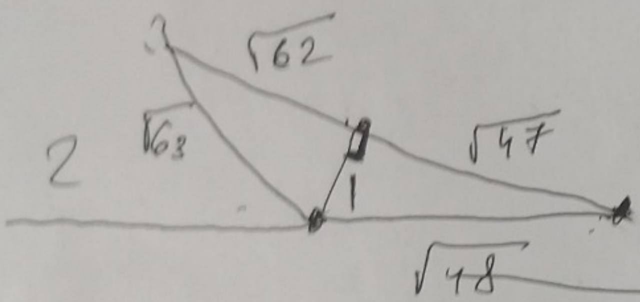
$(a+5)^2 < 18.$

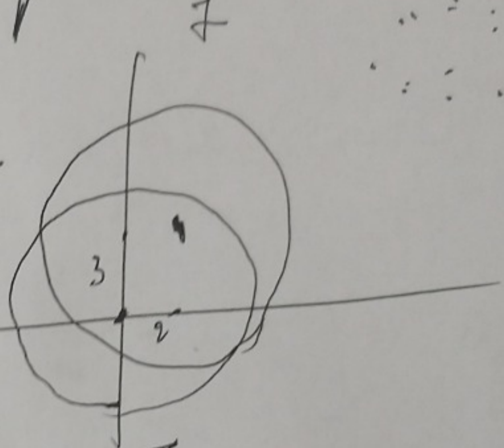
Черновик

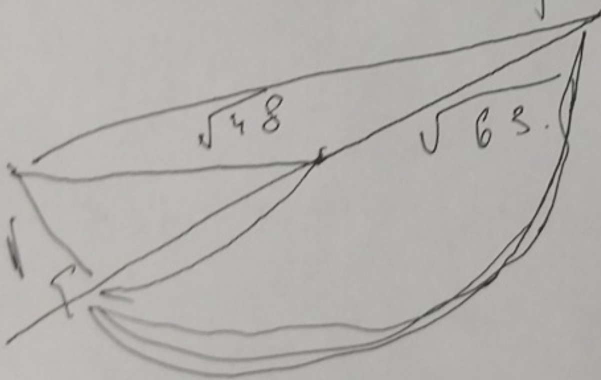
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13. \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13)\end{cases}$$



$-4a-6b..$

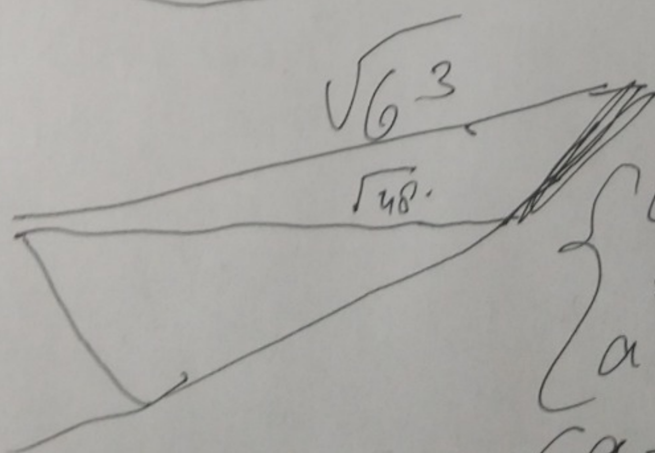






$\sqrt{62}-\sqrt{47}$

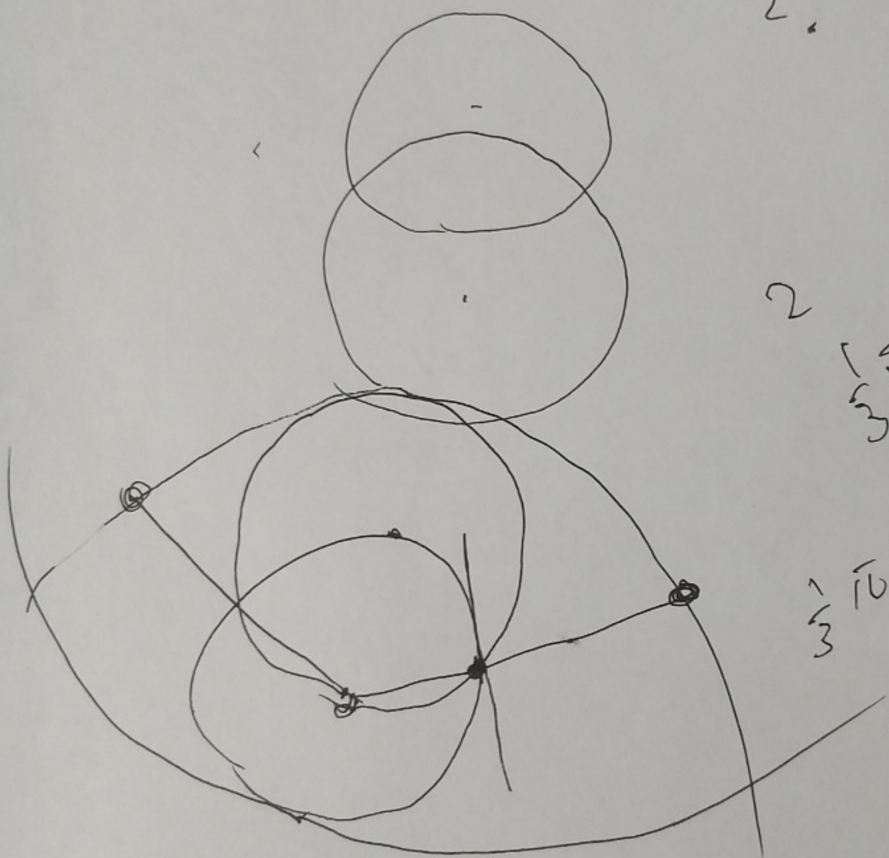
$9+$



$$\begin{cases}a^2+b^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le -4a-6b. \\ (a-2)^2+(b-3)^2 \le 13.\end{cases}$$

Черновик.

2.



2

$\frac{1}{3}\pi r^2 + \frac{2}{3}\pi 4r^2$.

$3\pi r^2 - \frac{r^2\sqrt{3}}{2}$.

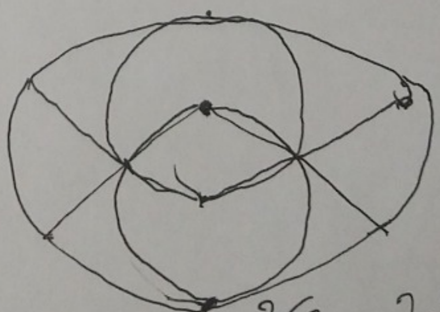
$r^2\left(3\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\frac{1}{3}\pi r^2$

$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\pi 4r^2$.

$2\pi r^2 + \frac{1}{3}$

$2\frac{1}{3}\pi r^2$



$\frac{2}{3}\pi r^2$

$\frac{r^2\sqrt{3}}{2}$

$r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}r$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103047**

ID профиля: **193173**

Вариант 20

МАТЕМАТИКА 11КЛ
ВАРИАНТ 20
ЧАСТЬ 2

Чистовик

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 10 = 2\cdot 5 \\ НОК(a;b;c) = 2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ все числа это $2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$, причем случаи когда у одного числа отличается пара $(\alpha;\beta)$ это разные $\Rightarrow$ Нужно перемножить возможные случаи степеней 2-ки и степеней 5-ки:

1) мин степень 2-ка это 1
макс это 17, если третья степень 1 или 17, то 3+3 случая, если от 2 до 16 то $15\cdot 6$ случаев $\Rightarrow$ всего $6+15\cdot 6 = 96$

2) аналогично для 5ки: $6+14\cdot 6 = 90$

$90\cdot 96 = 540+8100 = 8640$

Ответ: 8640 троек.

Чистовик

№5

$$\begin{cases} a = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) \\ b = \log_{(x-4)^2}(5x-26) \\ c = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = \log_{2x-8}(x-4) \\ 2\cdot b = \log_{x-4}(5x-26) \\ \frac{c}{2} = \log_{5x-26}(2x-8) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{a\cdot b\cdot c}{2} = 1 \Rightarrow$ если 2 равны, а третье на 1 больше, то $x^2(x+1)=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3+x^2=2 \Rightarrow (x-1)(x^2+2x+2)=0 \Rightarrow x=1$

$\Rightarrow$ 2 - равны единице, а третье двойке. (это другое x, не из условия)

$\frac{a}{2} = \log_{2x-8}(x-4) = 1-\log_{2x-8}(2) \Rightarrow a = 2(1-\log_{2x-8}(2))$

$\log_{2x-8}(2) \neq 0 \Rightarrow a \neq 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \log_{2x-8}(2) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2x-8=4 \Rightarrow x=6$

проверка:

$a = \log_{\sqrt{4}}(2) = 1$

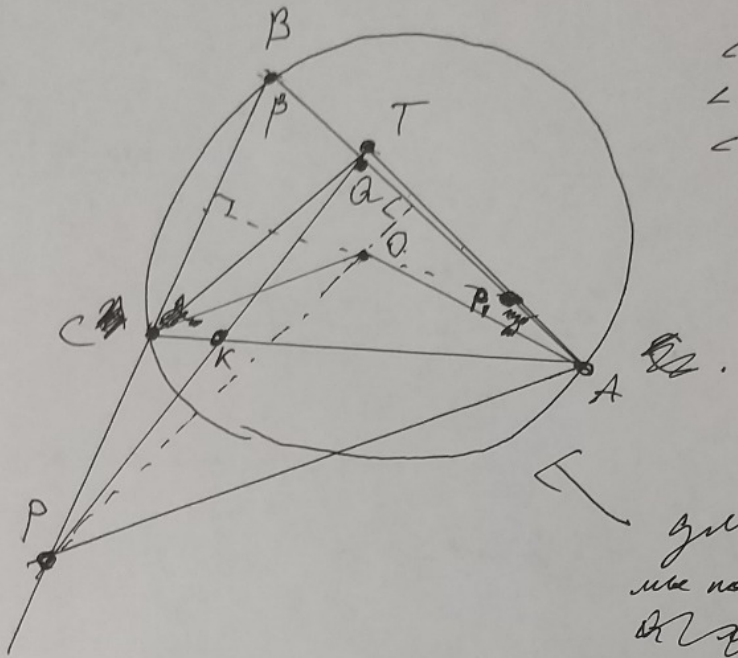
$b = \log_4(4) = 1$

$c = \log_{\sqrt{4}} 4 = 2$

Ответ: $x=6$

Чистовик

№ 6.



$\angle A = \alpha$
$\angle B = \beta$
$\angle C = \gamma$

для этого рисунка мы потом поменяем P и P_1

а) т.к. $AOCP$ – вписан, то $\angle BPO = \angle OAC = 90^\circ - \beta$,

т.к. $\angle OCA = \angle OAC = \dfrac{180^\circ - \angle AOC}{2} = \dfrac{180^\circ - 2\beta}{2} = 90^\circ - \beta$.

Тогда $PO \perp BC$, т.к. $\angle BPO + \angle PBC = 90^\circ$

$\Rightarrow$ т.к. O – центр описанной $\Rightarrow$ перпендикуляр из O на BC это сер. пер. к BC $\Rightarrow$ $PB = PA$

$\dfrac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \dfrac{AK}{KC} = \dfrac{10}{8}$; $\angle BAP = \angle ABC = \beta$.

$\angle TAP = \angle CAP + \angle TAC$; $\angle CAP = \beta - \alpha$;

$\angle TAP = \beta - \alpha + 180^\circ - 2\beta = 180^\circ - \beta - \alpha = \gamma$

$\angle TCP = 180^\circ - 2\beta + 180^\circ - \gamma = \beta - \alpha$

3/4

МАТЕМАТИКА 11КЛ

Чистовик

№6 (продолжение)

Т.к. $TA = TC$, то $\frac{TA}{TP} = \frac{TC}{TP}$ =>

=> $\frac{\sin BPT}{\sin TCP} = \frac{\sin APT}{\sin TAP}$ => $\frac{\sin BPT}{\sin APT} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{PC}{AP}$

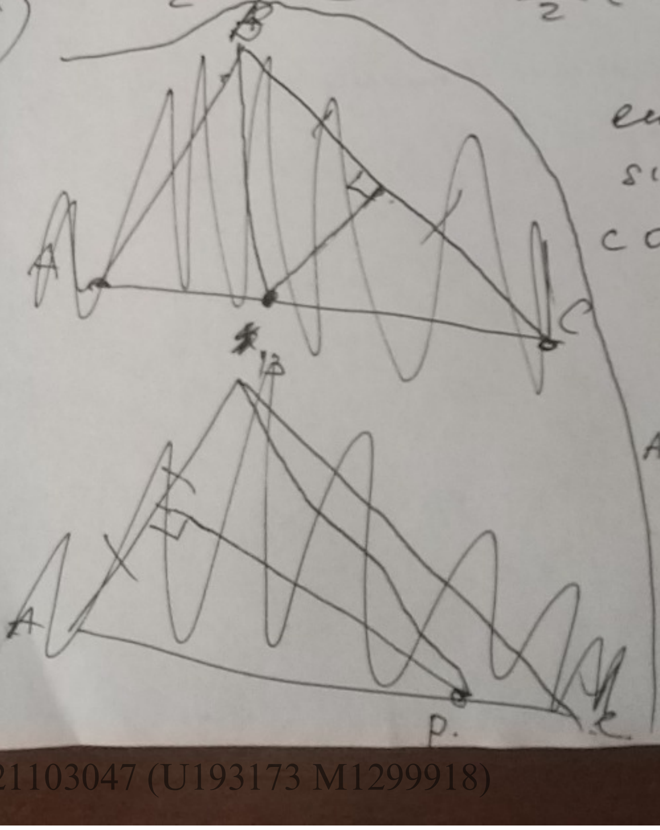
Т.к. $BP = AP$, то $\frac{BQ}{QA} = \frac{\sin BPT}{\sin APT}$, где $Q = TP \cap AB$

=> $\frac{BQ}{QA} = \frac{PC}{AP}$, но теорема Менелая и прямой ТК, т.к. $BP = AP$, то $\frac{BP^2}{PC^2} = \frac{10}{8}$ =>

=> $\frac{BP}{PC} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ => Для случая, когда P на BC у нас всё аналогично с точностью до замены A на C. => Площадь ABC это.

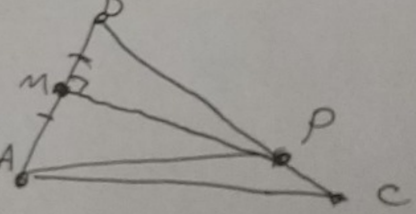
$\frac{S_{APC}}{2} \cdot (2+\sqrt{5}) = \frac{18}{2} \cdot (2+\sqrt{5}) = 18 + 8\sqrt{5}$

б)



если $tg\, \beta = \frac{1}{2}$, то $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ~~BK~~

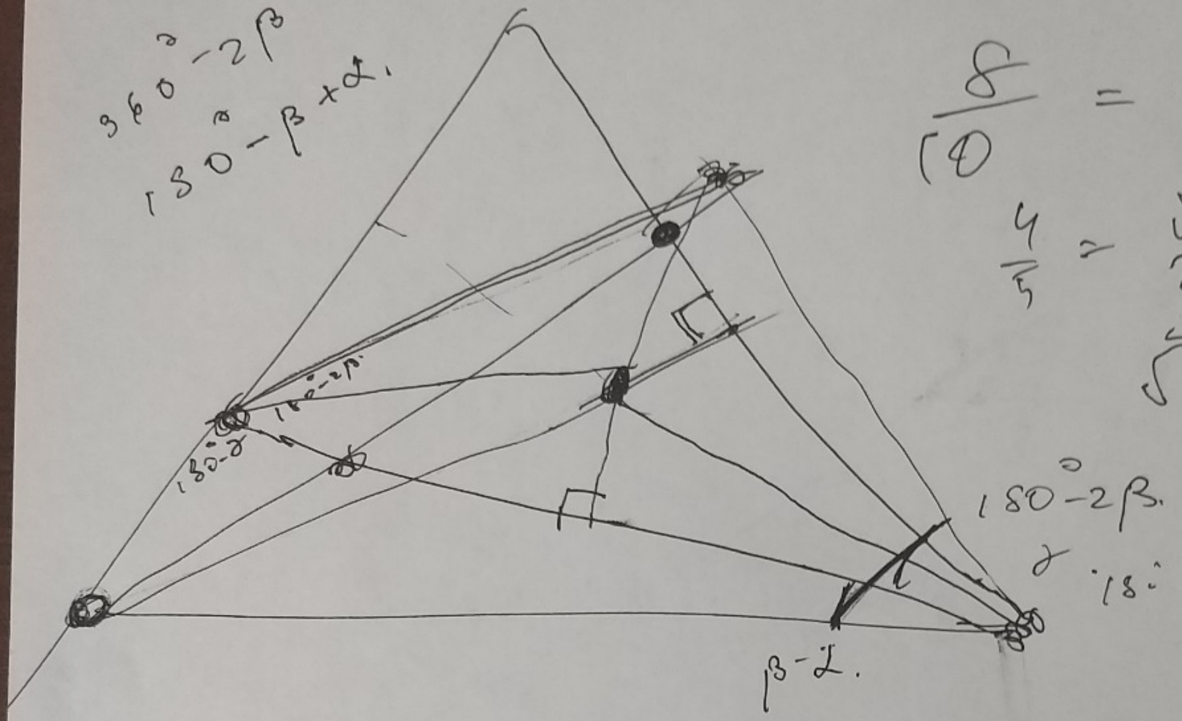
$\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$



4/4

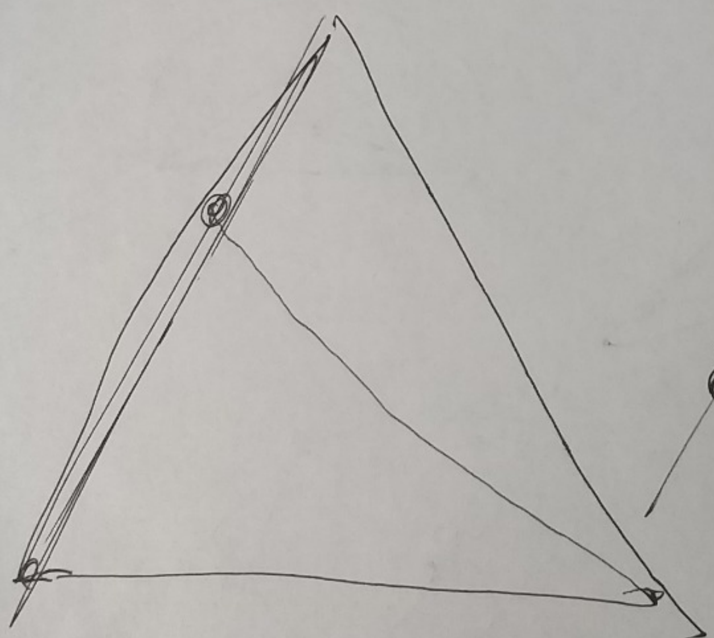
21103047 (U193173 M1299918)

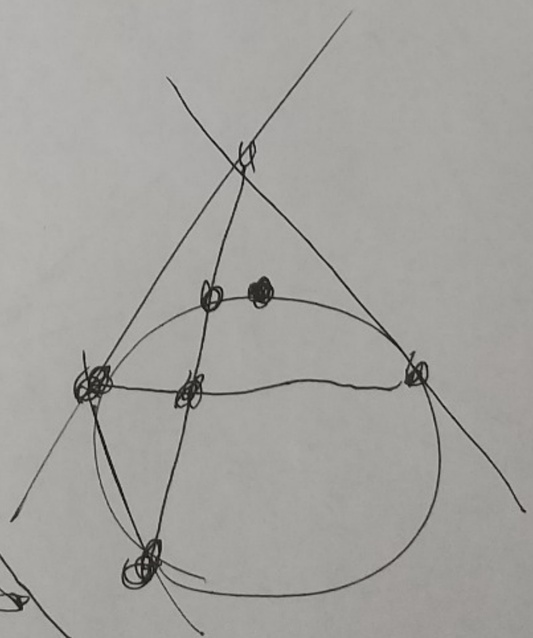
Черновик



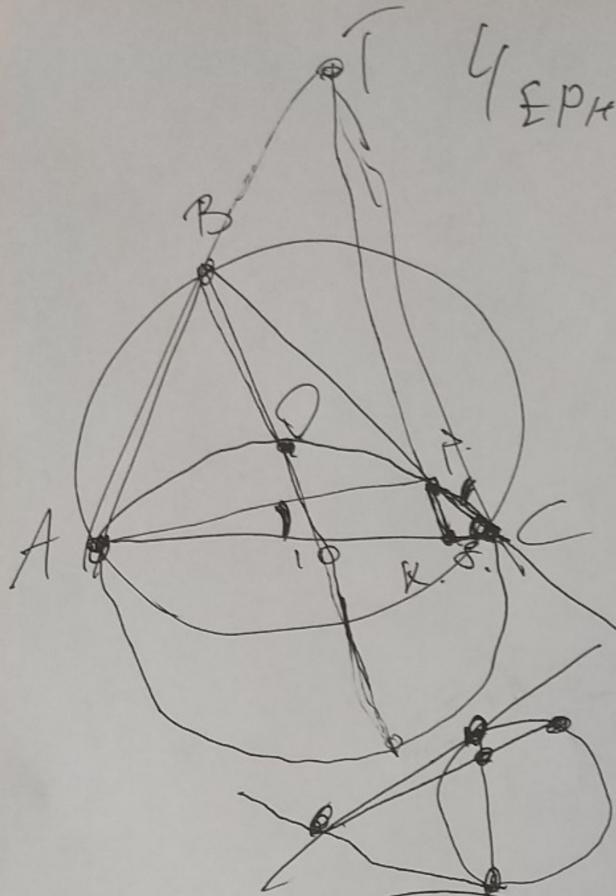
$$\frac{8}{10} =$$

$$\frac{4}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$





Черновик.



$\angle ABC = \operatorname{arctg} 2!$

AC?

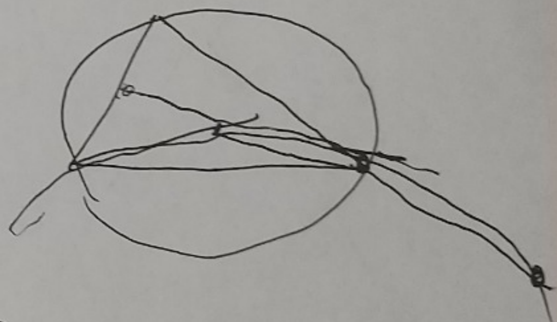
$2\beta - 180^\circ + 2\beta$

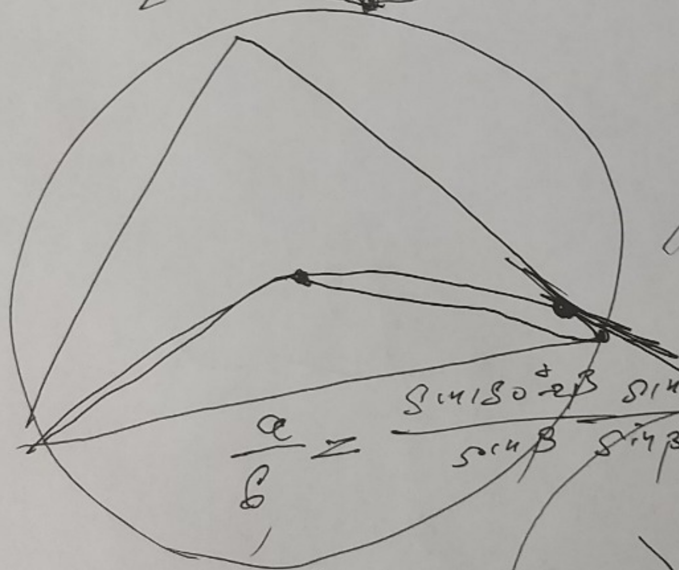
$4\beta - 180^\circ$

$2\beta - 80^\circ$

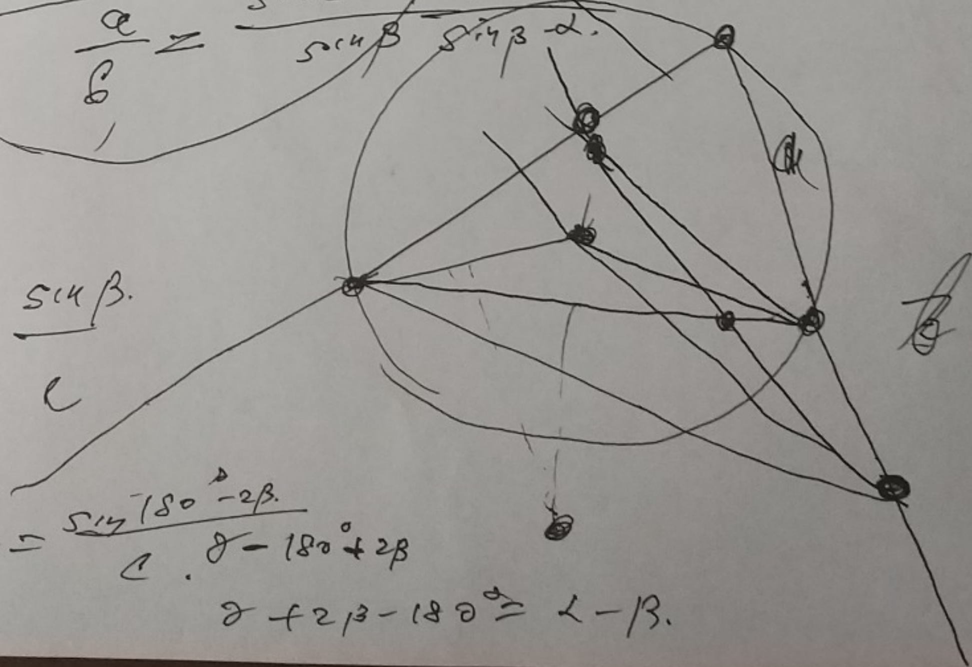
$\angle \beta \ldots$

$180^\circ - 2\beta$





$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(180^\circ - 2\beta)\,\sin\alpha}{\sin\beta\,\sin(\beta-\alpha)}$$



sin

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{c}$$

$$\frac{\sin(\beta-\alpha)}{b} = \frac{\sin(180^\circ-2\beta)}{c}$$

$\gamma - 180^\circ + 2\beta$

$\gamma + 2\beta - 180^\circ = \alpha - \beta.$

$a = 2\left(1 - \log_{2y}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ $\log(1-$ $\log_2 2$ $\log_2 4$

ЕРНОВИК $\log_4 4.$

$\frac{a}{2} = \log_{2y}(y)^{2(1-\log_{2y}(\frac{1}{2}))}$ $x^3 + x^2 = \frac{1}{2}.$

$\log_{2y}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$ $x^3 + x^2 - \frac{1}{2} = 0$

$\frac{c}{2} = \log_{5y-26}(2y)$ $\log$ $\frac{1}{8} + \frac{1}{4}.$ $\frac{1}{1}$ 2

$2\frac{b}{2} = \log_y(5y-6)$

$\frac{1}{\sqrt[3]{2^3}}$ 2.

$\frac{1}{\sqrt[1,5]{2}}$ $(x-1)(x^{\frac{m}{n^2}} + 2x + 2).$

$a = c.$ $\frac{m^3 + nm^2}{n^3.} = \frac{1}{2}$

$\log_{2y}(4) = \frac{1}{\log_{2y}(5y-6)}$ $2m^3 + 2nm^2 = n^3.$

$2m^3 = n(2n^2 - n^2)$

$x^3 + x^2 = 2$ $x^3 + 2x^2$ $-x^2 - x^{1,5} = x.$ $x - 1$

$\frac{1}{x^3}$ $2m^2(m+n) = n^3$

$x = 1$

$x\sqrt{x} = 2.$

$x^3 - x^2 = \sqrt{2}$ $\sqrt{x} = \sqrt{}$ $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \frac{x+1}{x^3}$ $b =$

$x^3 + x^2 - 2^{\frac{2}{3}} = 0.$ $2^{\frac{2}{3}}$ $\frac{2^{\frac{2}{3}} + 1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $a = \frac{1}{4}.$

$x^3 + x^2 - 2$

$\log_4(2)$ $c = \frac{1}{2}.$ $= 2a$

$2a = 1 - \log_{2y}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\log_4(4) = 2a$

$\log_2(4) = \frac{b}{2}.$

$\log_6 3.$

$y^2 - 5y + 6\ldots$

$\log_9 6.$ $5y - 6 = y^2$

$\log_3 9 =$ $\frac{b}{2}$

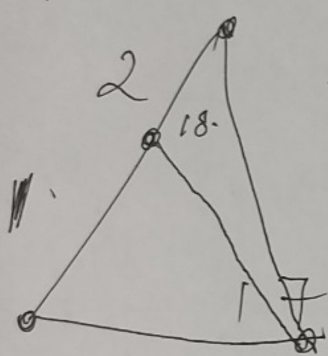
Черновик

$$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 10 \\ НОК(a; b; c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \end{cases}$$

$3_1 x^2 = \frac{1}{2}$.

$\cancel{2\ 18}$ $x-4=y$ $2c = \log_{5y-6} x$

$\log_{2x-8}(x-4)$ $3+3+15 \cdot 6$.



$\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{2}$. $6 \cdot 16 = 96$

17 $3+3+14 \cdot 6 =$

$= 6 \cdot 15 = 90$

$96 \cdot 90 = 8640$

$a = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$ $b = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$ $2abc = 1$.

$2x^3(x+1)=1$

$c = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$. $2a \cdot 2c \cdot \frac{b}{2} = 1$

$2a^2 + 3$

$2x^3 + 2x^2 = 1$

$2c = \log_{5x-26}(2x-8)$ $\frac{b}{2} = \log_{x-4}(5x-26)$

$2a = \log_{2x-8}(x-4)$ $a = c$.

21103047 (U193173 M1299918)