Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103029**

ID профиля: **807503**

Вариант 20

Черновик

$(a_1+5d)(a+10d) > \frac{2a+4d}{2}\cdot 5 + 15$

$(a+7d)(a+8d) < \frac{2a+4d}{2}\cdot 5 + 39$

$a^2+15ad+50d^2 > 5a+10d \cancel{+15 \; a^2 + 15ad + 56d^2}$

$a^2+15ad+56d^2 < 5a+10d+39$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

$d \in (0;2)$ т.к. $\uparrow$

12 – 16

$a^2 + a(15d-5) + 50d^2 - 10d - 15 > 0$

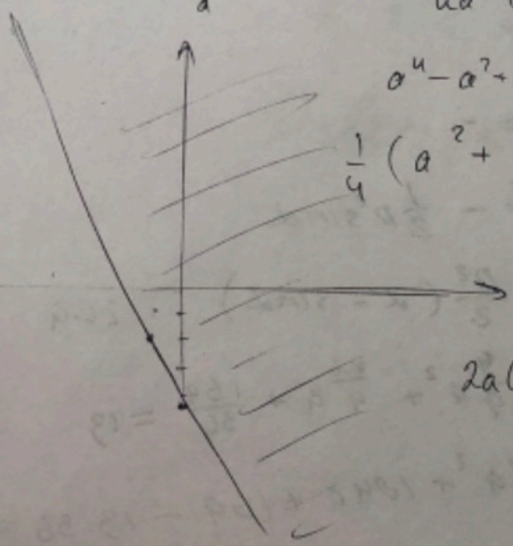
$D = 225d^2 - 150d + 25 - 200d^2 + 40d + 60 =$

$= 25d^2 - 110d + 85 =$

$4\cdot 13$

$\frac{4\cdot 8}{9}$

$\cancel{4a^3(a^2-1) - 2a\cdot a^4}$



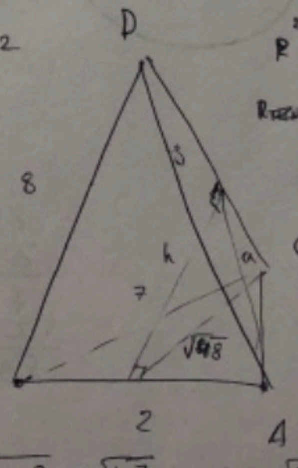
$a^4 - a^2 + a^2$

$\frac{1}{4}\left(a^2 + \frac{a^2}{a^2-1}\right)$

$-4a - 6b < 13$

$a > -\frac{3}{2}b - \frac{13}{4}$

$2a(a^2-1) - 2a\cdot a^2$



$R^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4(a^2-1)}$

$R = \min$ при $R^2 = \min$

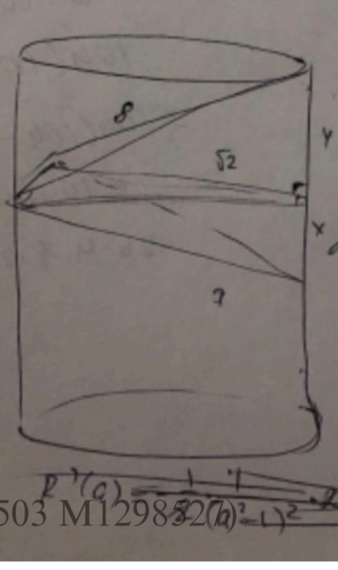
$\frac{a}{2} + \frac{2a(a^2-1) - 2a\cdot a^2}{4(a^2-1)^2} =$

$= 2a(a^2-1)^2 - 2a = 0$

$2(a^2-1)^2 = 2$

$a^2 - 1 = 1$

$a = \sqrt{2}$



$x = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$, $y = \sqrt{64-2} = \sqrt{62}$

~~R = min когда d между AB и DC~~

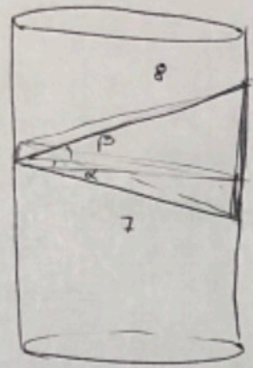
$R = r$ опт. около AHB окр-ти

$(a+1)(a-1)\cdot 1\cdot 1 = \left(\frac{2a^2}{4R}\right)^2$

$R^2 = \frac{a^4}{4(a^2-1)} = \frac{a^2-1+1}{2(a^2-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(a^2-1)}$

$\cancel{R'(a) = \frac{1}{\ldots} \cdot \frac{1}{(a^2-1)^2}\cdot 2a} =$

Черновик



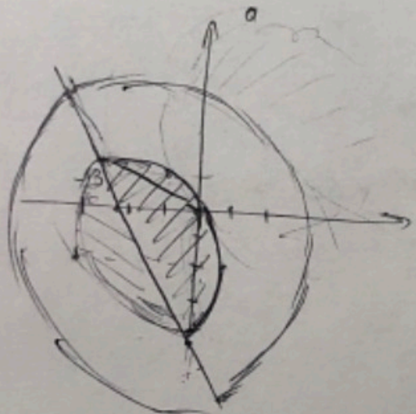
$R_1 = \sqrt{8\cdot 1\cdot 1\cdot 6} = \frac{7^4\cdot 2^2}{4\cdot 16 R_1^2}$

$R_1^2 = \frac{7^4}{48\cdot 4}$

$R_2 \cdot 4$

$9\cdot 1\cdot 1\cdot 7 = \frac{8^4}{4R_2^2}$

$R_2^2 = \frac{8^4}{4\cdot 63}$



$-4a-6b<13$

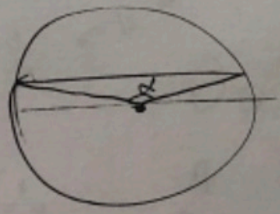
$a > -\frac{3}{2}b - \frac{13}{4}$

$a^2+4a+4+b^2+6b+9 \le 13$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$

$b > -\frac{2}{3}a - \frac{13}{6}$

$\frac{3}{2} - \frac{13}{6} = \frac{9-13}{6} = -\frac{4}{6} = -$



$S = \frac{\pi R^2\cdot\alpha}{2\pi} - \frac{1}{2}R^2\sin\alpha$

$\frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$ 26,4

$a^2+\frac{4}{9}a^2+\frac{26}{9}a+\frac{169}{36}=13$

$52a^2+104a+169-13\cdot 36=0$

$D = 104^2 - 2\cdot 104(169-13\cdot 36)$

$104(104-2(169-13\cdot 36)) =$

$= 104(104-26(13-36)) =$

$= 104(104+26\cdot 23)$

$26\cdot 4 + 26(4+23)$

26
23
78
52
598

№5

черновик

$a^2 + a(15d-5) + 50d^2 - 10d - 15 > 0$

$D = 225d^2 - 150d + 25 - 200d^2 + 40d + 60 =$

$= 25d^2 - 110d + 75$

$D = 110^2 - 25 \cdot 75 =$

$= 22^2 \cdot 25 - 25 \cdot 75 =$

$121 \cdot 4 = 484$

$= 25(484 - 75) =$

$= 25 \cdot 409$

$175 - 220$

$100 - 28 = 72 = \cancel{9 \cdot 8} = 36 \cdot 2$

$a = \frac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2} = -5 \cancel{\pm 3\sqrt{3}}$

$1 \cdot 4 \cdot 3 = 4 \cdot 2$

$-5 \pm 3\sqrt{2}$

$-10 \vee -5 - 3\sqrt{2} \vee -9$

$10 \wedge 5 + 3\sqrt{2} \wedge 9$

$5 \wedge 3\sqrt{2} \wedge 4$

$25 \wedge 18 \wedge 16$

$-1 \vee -5 + 3\sqrt{2} \vee 0$

$4 \vee 3\sqrt{2} \vee 5$

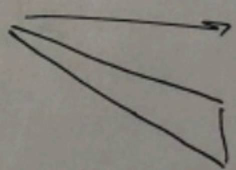
18

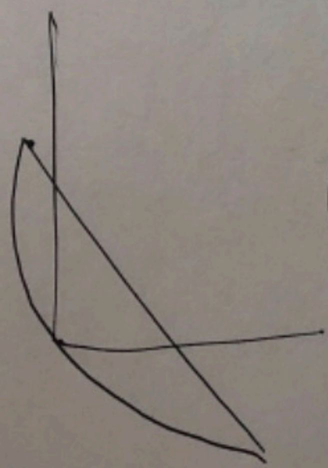
$13 \cdot 12$

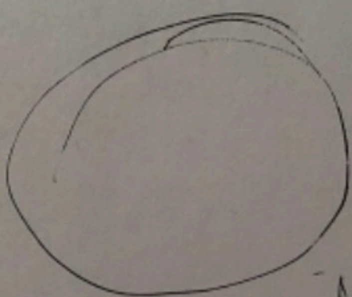
$(a_1 + 5)^2 - 18 < 0$

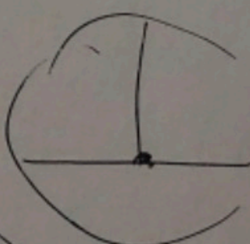
$144 + 12$

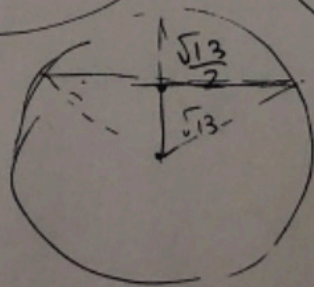
$\frac{156}{3}$











21103029 (U807503 M1298527)

Вариант 20

Чистовик

№1

$S = \frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5 = \frac{2a_1+4d}{2}\cdot 5 = (a_1+2d)\cdot 5$, $d>0$

т.к. прогрессия ↑

$a_6 = a_1+5d,\ a_8 = a_1+7d,\ a_9 = a_1+8d,\ a_{11} = a_1+10d$

$$\begin{cases}(a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1+10d+15\\(a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1+10d+39\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+15a_1d+50d^2 > 5a_1+10d+15\\a_1^2+15a_1d+56d^2 < 5a_1+10d+39\end{cases}$$

$6d^2 < 39-15 = 24$

$d^2 < 4$

$d \in (0;2)$ т.к. прогрессия состоит из целых чисел, то и разность прогрессии тоже целая, тогда $d=1$.

$$\begin{cases}a_1^2+15a_1+50-5a_1-10-15>0\\a_1^2+15a_1+56-5a_1-10-39<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+10a_1+25>0\\a_1^2+10a_1+7<0\end{cases} \sim \begin{cases}(a_1+5)^2>0\\(a_1+5+3\sqrt{2})(a_1+5-3\sqrt{2})<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1 \neq -5\\a_1 \in (-5-3\sqrt{2};\ -5+3\sqrt{2})\end{cases}$$

$-10 \vee -5-3\sqrt{2} \vee -9$

$5 \wedge 3\sqrt{2} \wedge 4$ $\uparrow^2$

$25 > 18 > 16$

$-1 \vee -5+3\sqrt{2} \vee 0$

$4 \vee 3\sqrt{2} \vee 5$ $\uparrow^2$

$16 < 18 < 25$

$$\begin{cases}a_1 \in [-9;-1]\\a_1 \neq -5\end{cases},\ a_1 \in \mathbb{Z}$$

1

Ответ: $a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

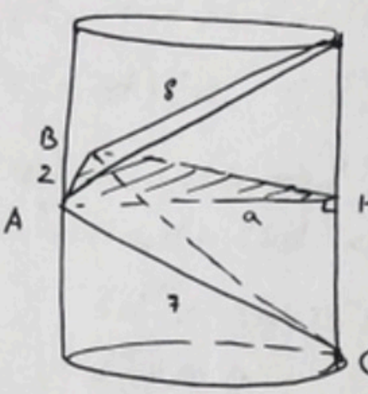
21103029 (U807503 M1298527)

Чистовик Вариант 20

~~№3~~
№2 (Продолжение на листе 3)

Дано:
$AB = 2$
$AC = BC = 7$
$AD = DB = 8$
$CD \parallel$ оси
$R = min$

$CD - ?$



Решение:

1) Проведем сечение α через AB, перпендикулярное DC, тогда оно $\parallel$ основаниям (т.к. основания $\perp DC$) (~~т.к.~~ т.к. $DC \parallel$ оси) следовательно, окружность, описанная около полученного сечения имеет ~~того~~ ~~же~~ радиус, равный радиусу цилиндра.

$\exists \alpha \cap CD = H$, $AH = BH = a$

~~равенство можно~~ ~~доказать из т. Пифаго~~

$AC = BC$, HC – общ,

$\angle AHC = \angle BHC = 90^\circ$

т.е. $\triangle AHC = \triangle BHC$,

т.е. $AH = BH$

$$S^2_{ABH} = (a+1)(a-1)\cdot 1 \cdot 1 = \left(\frac{2\cdot a \cdot a}{4R}\right)^2$$

по формуле Герона

$$R^2 = \frac{a^4}{4(a^2-1)} = \frac{1}{4}\left(a^2 + \frac{a^2}{a^2-1}\right) \qquad a \neq \pm 1,\ a > 0$$

$R = MIN$ при $R^2 = MIN$

$$(R^2)' = \frac{1}{4}\left(2a + \frac{2a(a^2-1) - 2a\cdot a^2}{(a^2-1)^2}\right) = 0$$

$$2a(a^2-1)^2 - 2a = 0$$

$$2a((a^2-1)^2 - 1) = 0$$

1) $a = 0$ 2) $(a^2-1)^2 = 1$

$$a^2 - 1 = \pm 1$$

$$a = 0;\ \pm\sqrt{2}$$

$(R^2)'$: $-$ на $(0; \sqrt{2})$, $+$ после $\sqrt{2}$

т.е. ~~R~~ при $a = \sqrt{2}$ $R^2 = MIN$

$CD \perp \alpha$ т.е. $CD \perp$ любой прямой в α, т.е. $CD \perp AH$ и AB

Тогда по т. Пифагора в $\triangle ACH$: $CH = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$

в $\triangle ADH$: $DH = \sqrt{64-2} = \sqrt{62}$

$CD = \sqrt{47} + \sqrt{62}$

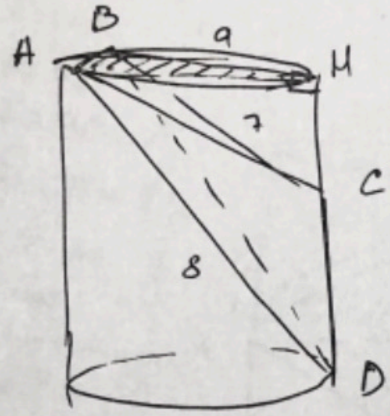
~~Ответ: $\sqrt{47}+\sqrt{62}$~~

2

21103029 (U807503 M1298527)

Чистовик Вариант 20

№ 2 (Продолжение)



2) здесь все аналогично п. 1,

но $CD = \sqrt{62} - \sqrt{47}$.

Ответ: $CD = \sqrt{62} \pm \sqrt{47}$

3

21103029 (U807503 M1298527)

Чистовик Вариант 20

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b;13)\end{cases}$$

— ур-ие окр-ти с центром $a;b$ и радиусом $\sqrt{13}$

~~если~~ если $-4a-6b<13 \Leftrightarrow a>-\frac{3}{2}b-\frac{13}{4}$, то

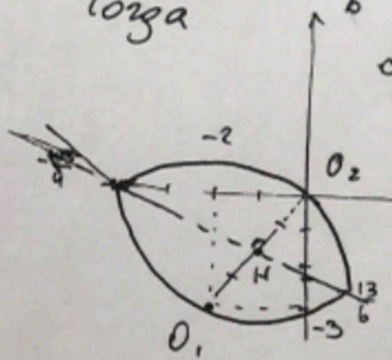
$a^2+4a+b^2+6b\le 0$

$(a+2)^2+(b+3)^2\le 13$ — ур-ие окр-ти с ц. $-2;-3$ и радиусом $\sqrt{13}$

если $a\le-\frac{3}{2}b-\frac{13}{4}$, то

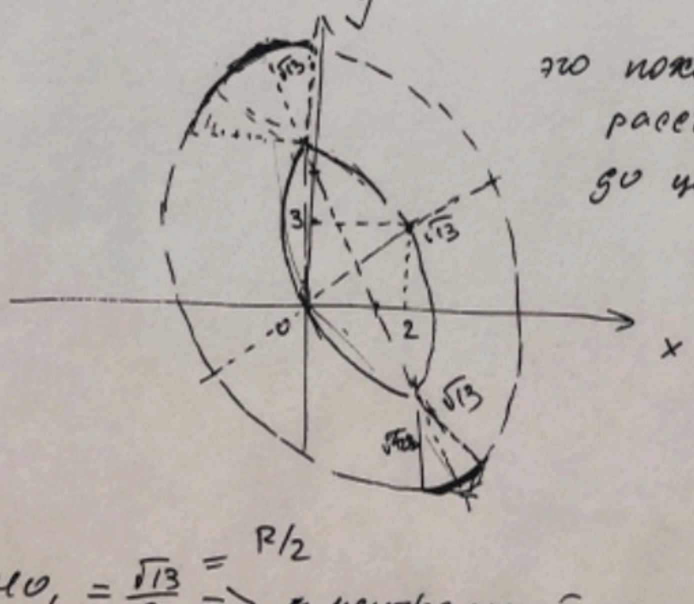
$a^2+b^2\le 13$ — ур-ие окр-ти с ц. $0;0$ и радиусом $\sqrt{13}$

Тогда центр лежит в этой области.



сегменты ~~они~~ $\cap$ с прямой в одних точках т.к. центры лежат на прямой $b=\frac{3}{2}a$, а прямая $b=-\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}$, т.е. они $\perp$, а сами прямые $\cap$ в точке $-1;-1.5$, т.е. это середина O_1O_2, а радиусы окр-тей равны. Т.е. это одинаковые сегменты окружности

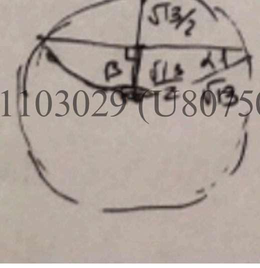
Тогда первый график выглядит след. образом:



это полученный график, расстояние в каждой точке до центра $=\sqrt{13}$

$HO_2=HO_1=\frac{\sqrt{13}}{2}=R/2 \Rightarrow$ центральный угол сегмента $=120°$;

4



катет $=\frac{1}{2}$ гип-зы $\Rightarrow \alpha=30° \Rightarrow \beta=120°$

№7

Вариант 20

Чистовик

№3 (продолжение)

в первом среднее:

S сегмента тогда $= \frac{1}{3}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 \sin \beta =$

$= \frac{1}{2}$ ~~...~~

У ~~графика S сегмента в 9 раз больше~~

$S = \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 13 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 13 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$(R = 2\sqrt{13})$

а крайних секторов $\frac{1}{6}\pi R^2 = \frac{13 \cdot 4\pi}{6}$

$S = \frac{13 \cdot 4}{3}\pi + \frac{8 \cdot 13\pi}{3} - \frac{4}{2} \cdot 13\sqrt{3} =$

$= 51\pi - 26\sqrt{3}$

Ответ: $51\pi - 26\sqrt{3}$

5

21103029 (U807503 M1298527)

Часть 2

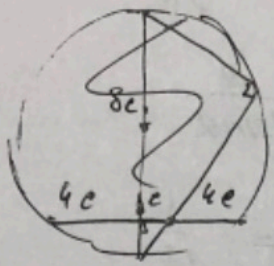
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

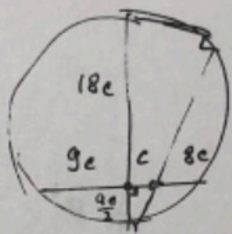
Шифр: **21103029**

ID профиля: **807503**

Вариант 20

Черновик





$10c \quad c \quad 9c$

$5c \quad \frac{y}{9}$

$\frac{c}{18} \quad \frac{y}{11}$

$x + c = y \qquad 5x = 5y - 5c$

$4(y + c) = 5x$

$4y + 4c = 5y - 5c$

$y = 9c$

$\sqrt{c^2 + \frac{81c^2}{4}} =$

$\sqrt{85}\,\frac{c}{2} \cdot x = 8c \cdot 10c$

$\frac{360}{18} = 20$

$x = \frac{160}{\sqrt{85}}$

$PK \cdot KC =$

$= \frac{160c \cdot 8c^2}{\sqrt{85}}$

$\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{AB}{AC} = \frac{20}{\sqrt{85}} = \frac{\sin C \cdot \sqrt{5}}{}$

$\sin C = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$AC \cdot \cancel{BC} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = \cancel{BC \cdot AB} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$

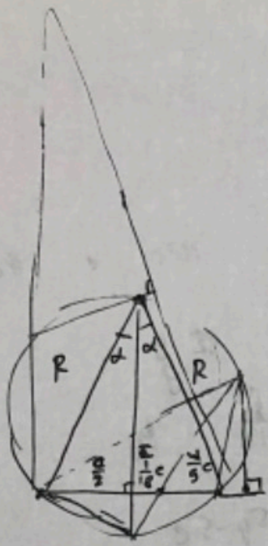
$\frac{400}{85}$

$2\alpha + \beta = 180°$

$\cancel{tg 2\alpha = tg B}$

tg

Черновик



$$\frac{c}{\sin\alpha} = 2R$$

$$R = \frac{c}{2\sin\alpha}$$

$\frac{1}{2} R^2$

$$\frac{5}{9} - \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$$

~~R·c·sinα~~

$$\frac{5c}{9} \cdot h = 10^2$$

$$ch = 18$$

$$R = \frac{c}{2\sin\alpha}$$

$$\frac{abc}{4R}$$

$$ab = 2S/\sin\alpha$$

$$2x-8 = x^2-8x+16$$

$$x^2-10x+24=0$$

$$x=6; \cancel{4}$$

$$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$$

$\log_{\sqrt{6}} 3$

1

$\log_3 6$

$$\log_{2a} a = \log_{5a-6} 2a$$

$$\log_{2a} a - \log_{5a-6} a = \log_{5a-6} 2$$

$5x-26 = 4x^2-32x+64$

$4x^2-37x+38=0$

$D = 37^2 - 38\cdot 16$

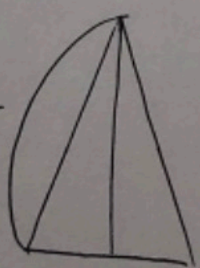
1 1 2

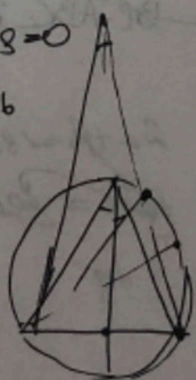
$x = 6$

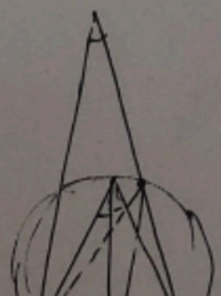
$x^2-8x+16 = 5x-26$

$x^2-13x+42=0$

$x = 6; 7$







21103029 (U807503 M1298528)

Чистовик Вариант 20

№4

$\exists\, a = 2^{a_1} \cdot 5^{a_2}$

$b = 2^{b_1} \cdot 5^{b_2}$

$c = 2^{c_1} \cdot 5^{c_2}$.

a, b, c не содержат иных множителей, т.к. число $2^{17} \cdot 5^{16}$ кратно им.

все числа $a_1, a_2 \ldots c_1, c_2 \geq 1$ т.к. a, b, c делятся на $10 = 2^1 \cdot 5^1$; также ~~все~~ числа a_1, b_1, c_1 не больше 17, причем среди них есть хоть 1, равное 17, а числа a_2, b_2, c_2 не больше 16, среди них тоже есть хоть одно, равное 16 (иначе НОК бы содержал меньшие степени этих множителей)

~~Тогда кол-во троек равно: 3·17·17·3·16·16~~

a_1, b_1, c_1 ~~если только 1 число равное 17 : $3 \cdot 16^2$~~

~~если 2 таких числа : 3·16~~

~~если три~~ :

Аналогичными рассуждениями среди a_1, b_1, c_1 и среди a_2, b_2, c_2 есть хоть по одной 1.

a_1, b_1, c_1 : есть 3 способа выбрать число равное 17, и еще 2 выбрать число, равное 1, третье число может быть каким угодно от 1 до 17

всего вариантов $6 \cdot 17$

Аналогично с a_2, b_2, c_2 : вариантов $6 \cdot 16$

Тогда всего $36 \cdot 16 \cdot 17 = 9792$

Ответ: 9792

1

21103029 (U807503 M1298528)

Чистовик

Вариант 20

№5

$x=6$ явл. реш:

$\cancel{\log_2 2} = \log_{\sqrt{12-8}}(6-4) = 1 = \log_{(6-4)^2}(30-26)$

$\log_{\sqrt{30-26}}(12-8) = 2 = 1+1$

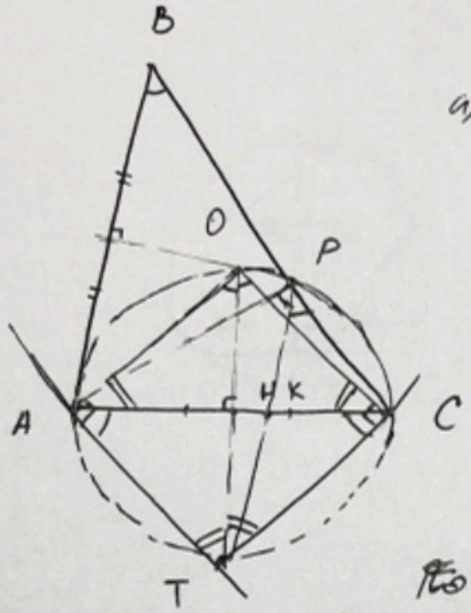
2

21103029 (U807503 M1298528)

Чистовик

№6

Вариант 20



а) O – т.п. сер.пер, т.е. $O \in$ сер.пер. к AC, т.~~е. $AO=OC$~~ (Пусть это OH),

$\exists$ O_1 – центр опис. около $\triangle AOC$ окр-ти, тогда $O_1 \in OH$.

$\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$ т.к. AT и CT – кас к окр-ти с центром O,

значит OT – диаметр второй окр-ти

~~По~~ $\angle CAT = \angle COT$, $\angle ACT = \angle AOT$ как опир на одну дугу, $\angle AOT = \angle COT$ т.к. OH – мед, высота, а значит и бис-са.

По т. об угле между кас. и хордой $\angle CAT = \angle CBA$

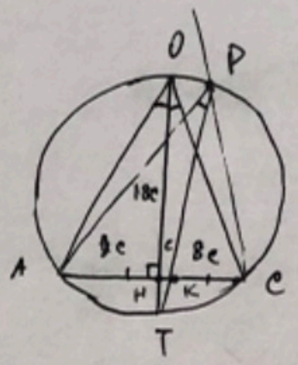
$\angle APT = \angle AOT = \angle TOC = \angle TPC$, т.е. PT – бис-са.

Тогда $\cancel{\frac{CH}{AH} = \frac{CP}{AP}}$ $\frac{CK}{AK} = \frac{CP}{AP} = \frac{S_{CPK}}{S_{APK}} = \frac{4}{5}$

$S_{PKC} \sim S_{BAC}$ по двум углам ($\angle ABC = \angle APC$, $\angle C$-общий)

$S_{ABC} = \frac{AC^2}{KC^2} \cdot S_{PKC} = \frac{16}{81} \cdot 8 = \frac{108}{81}$

б)



$tg\angle ABC = tg\angle AOT = \frac{1}{2} \Rightarrow OH = 2AH$

$18c \cdot HT = 81c^2$

$TH = \frac{9}{2}c$ по т. Пифагора $KT = \sqrt{\frac{81}{4}c^2 + c^2} = \frac{c}{2}\sqrt{85}$

$PK \cdot KT = AK \cdot KC$

$PK \cdot \frac{c}{2}\sqrt{85} = 10c \cdot 8c$; $PK = \frac{160c}{\sqrt{85}} = \frac{4}{9}AB$

~~PK~~

$AB = \frac{360}{\sqrt{85}}c = \frac{20\,AC}{\sqrt{85}}$

~~Ответ~~

$\sin\angle ACB = \frac{AB}{AC} \cdot \sin\angle ACB = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{1}{\sqrt{5}}$ по осн. триг. тожд.

3

Черновик

$2x-8>0 \Rightarrow x>4$

$\neq 1 \quad x \neq 4{,}5$

$x > 26/5$

$x \neq 5 \qquad x \neq \frac{27}{5}$

1) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$tg = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$2\log_{(x-4)}(5x-26)\log_{(x-4)}\sqrt{2x-8} = 1$

$\frac{\sin^2}{1-\sin^2} = \frac{1}{4}$

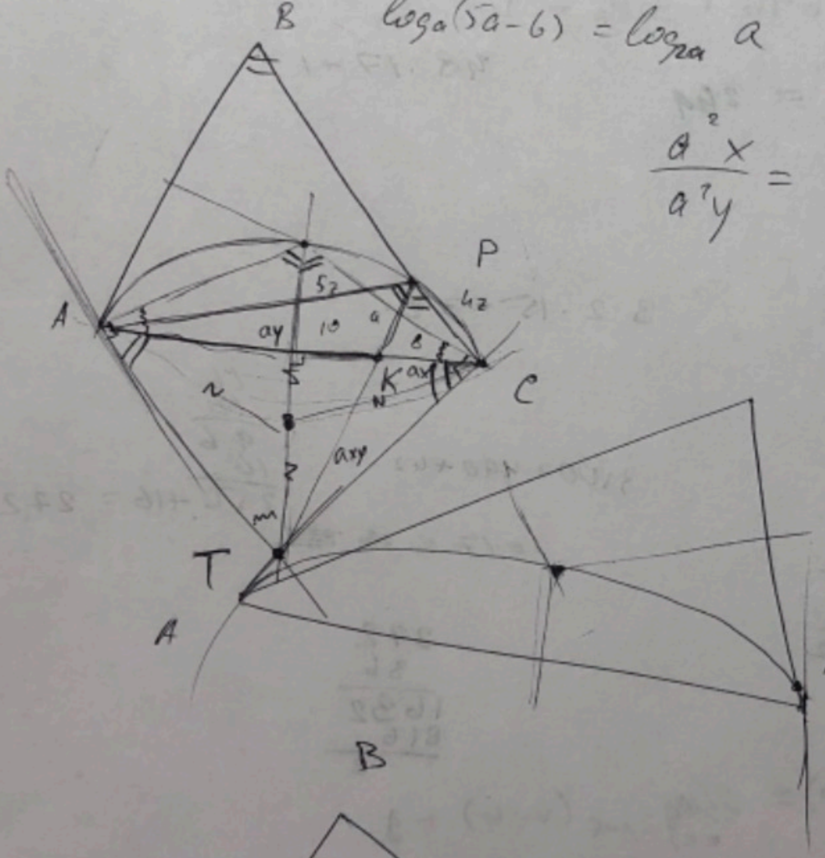
$\log_a(5a-6)\log_a 2a = 1$

$4\sin^2 = 1-\sin^2$

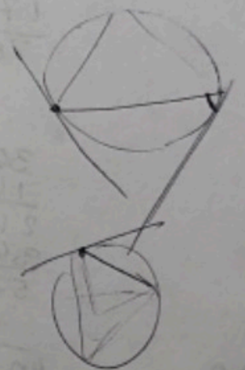
$\log_a(5a-6) = \log_{2a} a$

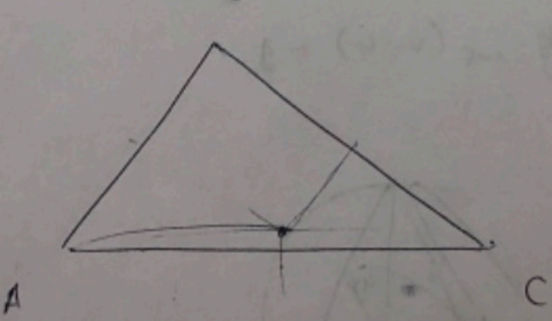
$\sin^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

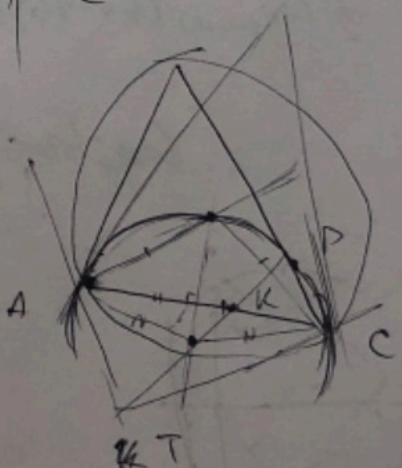
$\cos = \frac{2}{\sqrt{5}}$



$\frac{a^2 x}{a^2 y} = \frac{8}{10} \qquad \frac{x}{y} = \frac{4}{5}$







$\frac{1}{2}\, ab\, \cancel{\sin\alpha}$ $\qquad \frac{1}{2}ab \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{108}{81}$

$ab = \frac{216\sqrt{5}}{81}$

$\frac{abc}{4R} \qquad \frac{c\sqrt{5}}{\cancel{\ }} = R$

$AM = \frac{1}{4} HO, \quad TM = \frac{1}{4} HC$

$\frac{1}{4}\, AM \cdot MC$

21103029 (U807503 M1298528)

Черновик

$a = \cancel{2^{\dots}} \; 2^{a_1} 5^{a_2}$

1

$b = 2^{b_1} 5^{b_2}$

$a_1, a_2, \dots \; c_1, c_2 \; \ge 10$

$c = 2^{c_1} 5^{c_2}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

$\max(a_1, b_1, c_1) = 17$

$\max(a_2, b_2, c_2) = 16$

~~если 1 число = 17~~

$S_{AOC} = \frac{c^2}{2}$

$3 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 16 = (3 \cdot 16 \cdot 17)^2$

$S_{AOM} = \frac{c^2}{4}$

$3 \cdot 16 \cdot 16 + 3 \cdot 16 + 1$

$48 \cdot 17 + 1$

$17 \cdot 17 = 289$

$OH = \frac{4}{5} d = \frac{8}{5} c$

$\| \; c$

$17 \cdot 17$: 119, 17, 289

$3 \cdot 2 \cdot 15 + 3 \cdot 2 \cdot$

$\frac{abc}{4R} =$

$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

$36 \cdot 16$: 216, 36, 576

$576 \cdot 17$: 4032, 576, 9792

$3200 + 490 + 42$

$16 \cdot 16$: 96, 16, 256

$256 + 16 = 272$

$16 \cdot 17 =$

$\frac{c}{\sin 2\alpha} = 2R$

$272 \cdot 36$: 1632, 816

$\frac{1}{2} \log_{(x-4)}(5x-26) = 2\log_{2x-8}(x-4) + 1$

$\log_a b \cdot \log_b d$