Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102979**

ID профиля: **351063**

Вариант 20

$x \to a$

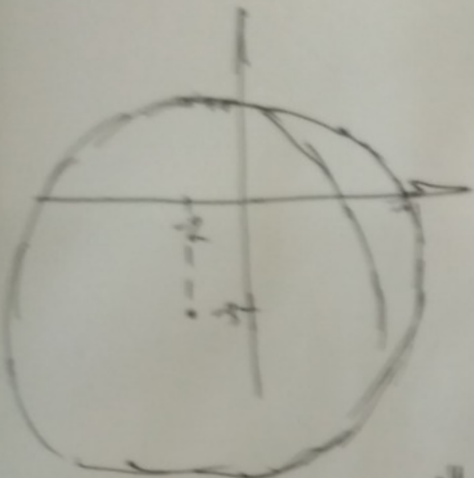
$y \to b.$

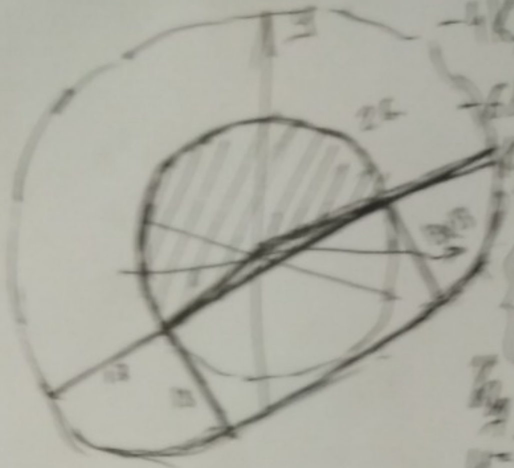
$$\begin{cases} -4a - 6b \le 13 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 13 \\ a^2 + b^2 \le -4a - 6b \end{cases}$$

$a^2 + 4a + b^2 + 6b \le 0 \; +13$

$a^2 + 4a + 4 + b^2 + 6b + 9 \le 13$

$(a+2)^2 + (b+3)^2 \le 13.$





$-4a - 6b \ge 13$

$-4x_a - 6x_y \ge 13$

$-6x_y \ge 13 + 4x_a$

$x_y \le \boxed{-\frac{13}{6} - \frac{4}{6}x_a}$

$$\begin{cases} -4a - 6b \ge 13 \\ a^2 + b^2 \le 13 \end{cases}$$

$y = \frac{-13 - 4x}{6}$

$y^2 + x^2 = 13$

$\frac{169 + 16x^2 + 104x}{36} + x^2 = 13$

$169 + 16x^2 + 104x + 36x^2 = 13 \cdot 36$

$52x^2 + 104x - 13 \cdot 36 + 169 = 0$

$26x^2 + 52x + \ldots = 0$

$13(2x^2 + 4x - 13) = 0$

$D_1 = 2^2 + 2 \cdot 13 = 30$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{30}}{2}$

$y = -\frac{13}{6}$

$-4x - 6y \le 13$

$-6y = 13 + 4x$

$y = -\frac{13 + 4x}{6}$

$13 + 8 = 21 \quad -\frac{21}{6} = -\frac{7}{2}$

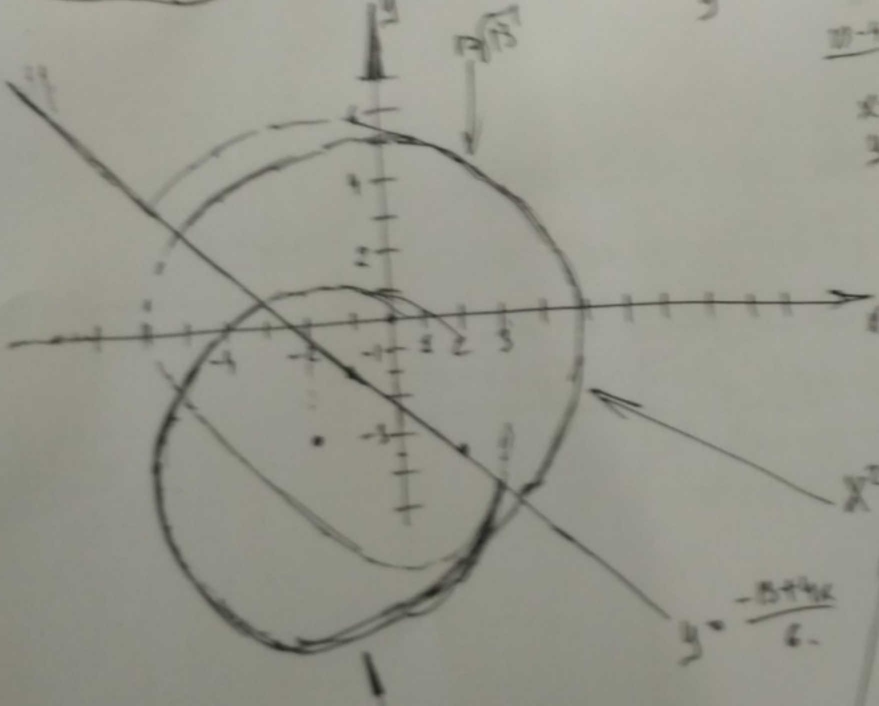
-3.5

$13 - 4 = 9$

$\frac{13 - 4}{6} = \frac{9}{6} = 1.5$

$x = -1$

$y =$



$x^2 + y^2 = 13$

$y = \frac{-13 + 4x}{6}$

$(x+2)^2 + (y+3)^2 = 13$

$x^2 + y^2 = x^2 + 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 13$

$x^2 + 4x + y^2 + 6y = 0$

$\boxed{4x + 6y = 13}$

1. $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_5$

$a_6 a_{11} > S + 15$

$a_8 a_9 < S + 39$

$a_1 - ?$

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_1 + 2d$

$a_4 = a_1 + 3d$

$a_5 = a_1 + 4d$

$\boxed{S = 5a_1 + 10d}$

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_9 = a_1 + 8d.$

$\frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n = 5\left(\frac{a_1 + a_1 + 4d}{2}\right)$ $a_1 + 2d$

$a_1^2 + \boxed{5ad + 10ad} + 50d^2 > 5a + 10d + 15$

$a_1^2 + \boxed{7ad + 8ad} + 56d^2 < 5a + 10d + 39$

$\cancel{5a} + \cancel{10d} + 39 - 56d^2 > a_1^2 + 15ad > \cancel{5a} + \cancel{10d} + 15 - 50d$

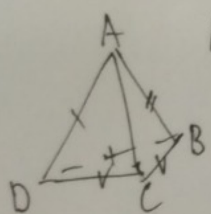
$39 - 6d^2 > 15.$ $\frac{39}{\frac{15}{24}}$

$6d^2 < 24$ $d^2 < 4.$ $d < 2;\ d \in \mathbb{Z};\ d \geq 0.$ $d = 1$

$49 - 1 = 48$

$$\boxed{\begin{aligned}(a+5d)(a+10d) &> 5a + 10d + 15\\ (a+7d)(a+8d) &< 5a + 10d + 39\end{aligned}}$$

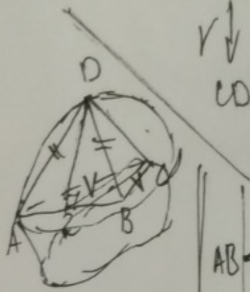
2\.



$AB = 2$

$AC = BC = 7$

$AD = BD = 8.$



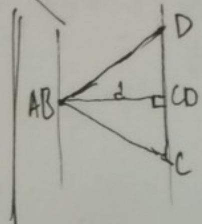
$r\downarrow$

$CD = ?$

$D \in L;\ C \in L \Rightarrow CD \in L$

$CD \parallel h$

$48|\sqrt{x}$



$A \in L;\ B \in L$

$\sqrt{64 - 1} =$

$\sqrt{63} =$

$3\sqrt{7}$

AD – изв. $d\downarrow$

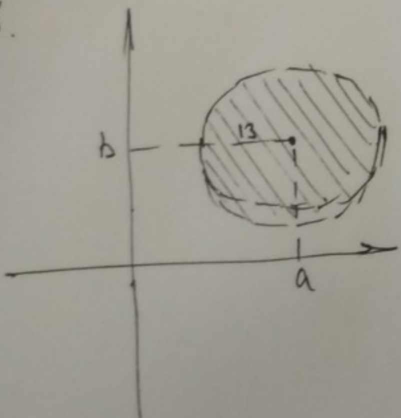
AC – изв.

$d \geq 2.$

$d = 2$ пример.

$d > 2.$

3\.



$M = \{\forall (x; y)\}:$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 13$

$a^2 + b^2 \leq \min(-4a - 6b; 13)$

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 \leq 13$

$a^2 + b^2 \leq \min(-4a - 6b; 13)$

$-4c - 6b \leq 13$ | $-4a - 6b \geq 13;$

$x^2 - 2ax + y^2 - 2by + a^2 + b^2 \leq 13$

$a^2 + b^2 \leq 13$

$\frac{-56}{39}$

$a_1^2 + 10a + 7 < 0.7$

$D_1: 25 - 7 = 18.$

$a_{1,2} = -5 \pm \sqrt{18}$

$K(a; b.)$ $r = 13$

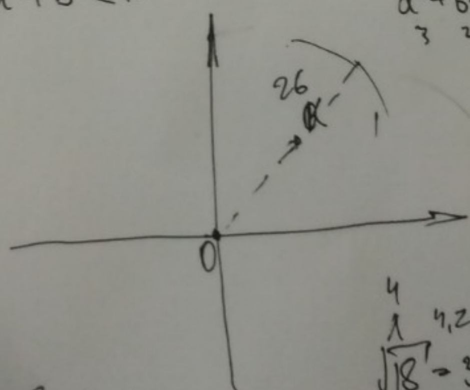
$a^2 + b^2 \leq 13.$

3 2.

$OK \leq 13.$

$r \leq 13.$

$R = 26.$



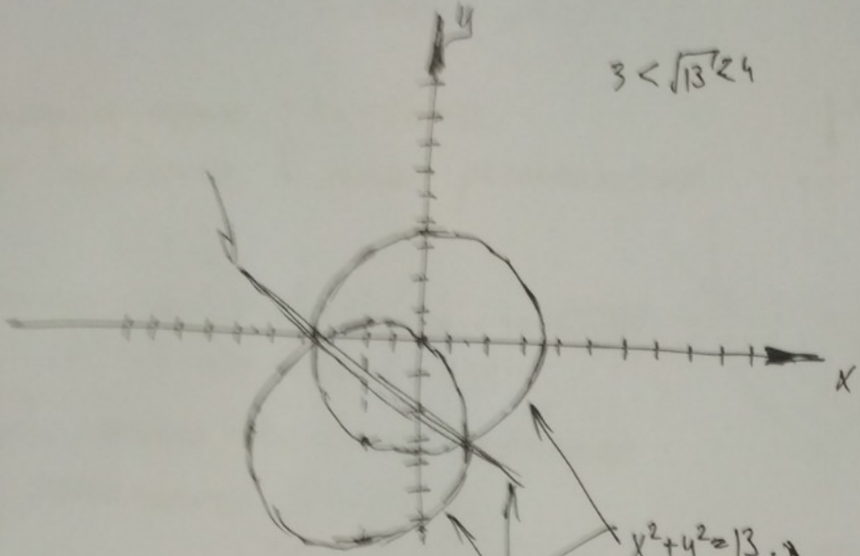
$S = \pi R^2.$

$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$ 4 4,2 $\frac{\times 1,4\ 3}{4,2}$

$$\begin{cases}-4a - 6b \geq 13.\\ a^2 + b^2 \leq 13\end{cases}$$

5\. $a \neq -5.$

$a \in (-9,2; -0,8)$



$3 < \sqrt{13} < 4$

$x^2+y^2=13.$

$(x^2+2)^2+(y+3)^2=13$

$\cancel{x^2}+4x+6y+13=\cancel{13}$

$6y=-13-4x.$

$-4x-6y=13$

Чистовик (№3)

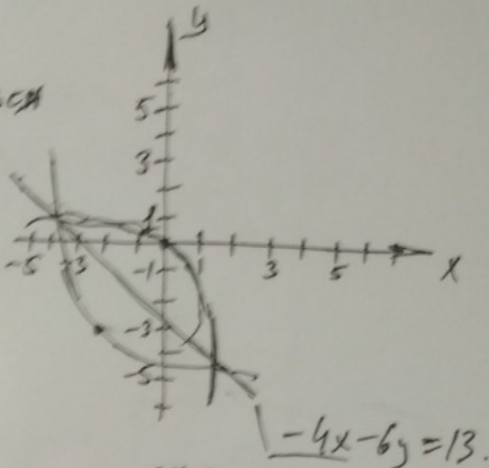
№3

Рассмотрим линию $-4a-6b=13$.

Центр окружности K может располагаться в $K(a;b)$

окружности $(a+2)^2+(b+3)^2=13$ для $-4a-6b\geq 13$

и $a^2+b^2=13$ для $-4a-6b<13$.



Тогда линия $-4a-6b=13$ совпадет с решениями $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ (x+2)^2+(y+3)^2=13 \end{cases}$, т.е. центр может

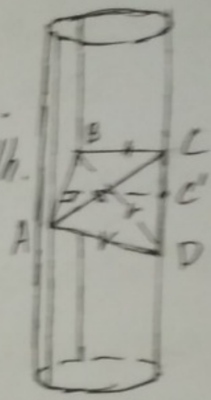
находится

Чистовик (№2)

№2. Дано:
ABCD – тетр.
$CD \parallel h$.
$\{A;B;C;D\} \in \alpha$
$AB = 2$.
$AC = BC = 7$
$AD = BD = 8$
$r \downarrow$

CD – ?

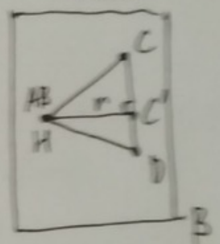
Решение:



1) Назовем боковую поверхность цилиндра – α.
Тогда $\{A;B;C;D\} \in \alpha$, т.е $CD \in \alpha$; $CD \parallel h$.
Назовем ось цилиндра – h.

2) Введем сечение β, такое, что
$CD \in \beta$; $CD \parallel \beta$; $h \in \beta$.

3) Назовем $AB \cap \beta = H$.
Тогда CH – высота в ΔABC;
ΔACH – п/у; $CH = \sqrt{AC^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 4\sqrt{3}$
(В р/б ΔABC CH – высота и медиана)



4) Аналогично, $DH = \sqrt{AD^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 3\sqrt{7}$

5) $\min(r)$ достигается, когда $2r = AB$. Отметим, что $2r \geq AB$, т.к. иначе невозможно расположить AB в цилиндре
$AB \parallel$ осн. – это необходимо, т.к $CD \perp$ осн, а $CD \perp AB$ (т.к ΔABC и ΔADC – р/б, по т. о 3 перп: $CH \perp AB$; $C'H \perp CD$)

6) Из. п. 5) AB – диаметр, $\Rightarrow O \in AB \Rightarrow C'H = r$ ($CD \perp C'H$)

7) $2r = AB \Rightarrow r = 1$.

8) $CC' = \sqrt{CH^2 - r^2} = \sqrt{47}$; $DC' = \sqrt{DH^2 - r^2} = \sqrt{62}$

9) $CD = CC' + DC' = \sqrt{62} + \sqrt{47}$

Ответ: $CD = \sqrt{62} + \sqrt{47}$

21102979 (U351063 M1298339)

Чистовик (№1)

№1.

Т.к. это возрастающая прогрессия, $d>0$; $a_n\in Z$; $a_{n+1}-a_n\in Z \Rightarrow d\in Z$.

$S=a_1+a_2+\ldots+a_5=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\ldots+(a_1+4d)=5a_1+10d$.

$$\left.\begin{matrix}a_6=a_1+5d\\ a_{11}=a_1+10d\end{matrix}\right| \Rightarrow (a_1+5d)(a_1+10d)>5a_1+10d+15$$

$$\left.\begin{matrix}a_8=a_1+7d\\ a_9=a_1+8d\end{matrix}\right| \Rightarrow (a_1+7d)(a_1+8d)<5a_1+10d+39$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a_1^2+15ad+50d^2>5a_1+10d+15\\ a_1^2+15ad+56d^2<5a_1+10d+39\end{cases}$$

$$(5a_1+10d)+39-56d^2>a_1^2+15ad>(5a_1+10d)+15-50d^2 \quad (1)$$

Сравним левую и правую часть неравенства (1):

$$39-56d^2>15-50d^2 \Leftrightarrow 39-6d^2>15 \Rightarrow 6d^2<24 \Rightarrow$$

$\Rightarrow d^2<4$; $d\in(-2;2)$; $d>0 \Rightarrow d\in(0;2)$; $d\in Z \Rightarrow d=1$.

$S=5a_1+10$; $a_6a_{11}=a_1^2+15a_1+50$; $a_8a_9=a_1^2+15a_1+56$

$$\begin{cases}a_1^2+15a_1+50>5a_1+10+15, (2)\\ a_1^2+15a+56<5a_1+10+39, (3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1^2+10a_1+25>0, (2)\\ a_1^2+10a_1+7<0, (3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a_1+5)^2>0, (2)\\ a\in(-5-\sqrt{18};-5+\sqrt{18}) (3)\end{cases}$$

(2) выражение равносильно $a_1+5\neq0$; $a_1\neq-5$. Оценим $\sqrt{18}$: $4=\sqrt{16}<\sqrt{18}<\sqrt{25}<5$.

Тогда $a_1\in(-10;0)$, $a_1\neq-5$, $a_1\in Z \Rightarrow a_1=\{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\}$.

(убедимся в оценке $\sqrt{18}$, найдя его первую цифру после запятой: $\sqrt{18}\approx4{,}2$)

Ответ: возможные значения $a_1=\{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\}$

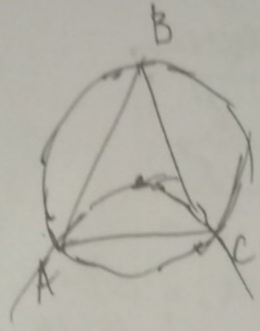
Часть 2

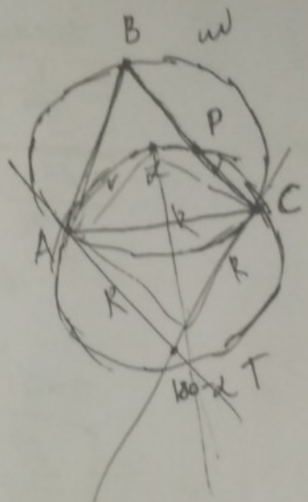
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102979**

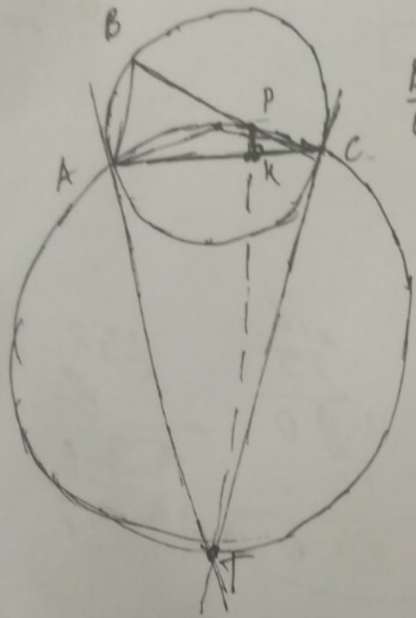
ID профиля: **351063**

Вариант 20



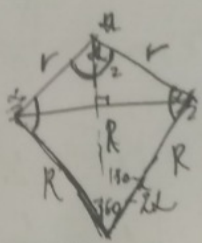


$T \in O(AOC)$



$\frac{AK}{CK}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$.

$AK=\frac{5}{9}AC$



$360-2\alpha$

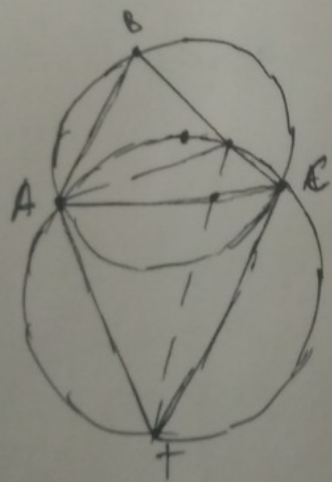
$\frac{r}{\sin(180-2\alpha)}=\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

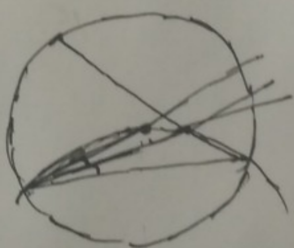
$\frac{r}{\sin 2\alpha}=\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

$S_{\triangle ABC}$ – ?

$S_{APK}=10$

$S_{CPK}=8$





$90-\frac{180-\alpha}{2}$

4. НОД$(a,b,c) = 10$ у k, m, n нет общ дел.

НОК$(a,b,c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$.

$10k; 10m; 10n$.

НОК$(k;m;n) = 2^{16} \cdot 5^{15}$

	$\vdots 5^n$	$\vdots 5^{15}$	не $\vdots 5$
$\vdots 2^n$			
$\vdots 2^{15}$			
не $\vdots 2$			

k не $\vdots 2$; n не $\vdots 5$: 1 $k \vdots 5^{15}$; k не $\vdots 2^{16}$: $1 \cdot 16$ m не $\vdots 2^{16}$; не $\vdots 5^{15}$ $16 \cdot 17$

$k \vdots 5^{15}$; $k \vdots 2^{16}$: 1 m не $\vdots 2^{16}$; не $\vdots 5^{15}$ $16 \cdot 17$

n не $\vdots 2$, $n \vdots 5^{15}$

НОК$(k;m;n) = 2^{16} \cdot 5^{15}$

НОД$(k;m;n) = 1$.

$k \neq m \neq n$.

$k = n$.

(15A B C)

(15; 1; 1)

(16; 1; 1) 48

$4 \cdot 15 \cdot 16$.

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$; $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$; $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = n$. $\sqrt{5x-26} = 2x-8$.

$x > 4$

$x > 5{,}2$

1) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) - 1$

$2\log_{2x-8}(x-4) = 0{,}5\log_{x-4}(5x-26) = \log_{\sqrt{5x-26}} \frac{2x-8}{\sqrt{5x-26}}$

$2\log_{5x-26}(2x-8)$

$2\log_a b = 0{,}5\log_b c = 2\log_c \frac{a}{c^{0,5}}$

$\log_a b^2 = \log_b \sqrt{c}$

$2t =$

$\log_{2x-8}(x-4)^2$; $\log_{x-4}\sqrt{5x-26}$; $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) - 1$

$2\log_a b = \log_b c = \log_c a - 1$.

$\log_a b^2 = \log_b c = \log_c \frac{a}{c} = m$.

$\boxed{\begin{array}{l} a^m = b^2 \\ b^m = c \\ c^m = \frac{a}{c} \end{array}}$

$a^m = b^2$ $b = \sqrt{a^m} = a^{0,5m}$

$b^m = c$ $b^{0,5m^2} = c$

$c^{m+1} = a$ $a^{0,5m^2(m+1)} = a^1$

$0{,}5m^2(m+1) = 1$.

$m^3 + m^2 = 2$

$(m-1)(m^2+2m+2)$

$m = 1$.

$m^3 + m^2 - 2 \mid m - 1$

$m^3 - m^2 \mid m^2 - m$

$a^{m^2} = b^{2m} = c$ $(a^m)^m = b^2$

$b^m = \sqrt{c}$

$a^m \cdot a^m =$

$\times \frac{37}{32}$ 1446

D: $37^2 - 4 \cdot 4 \cdot 90$.

$4^2 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{10}^2$

37 $\boxed{12\sqrt{10}}$

$a = b^2$

$b = c$

$c^2 = a$.

$3x - 18 = 0$ $x^2 - 8x + 16 = 2x - 8$.

$x^2 - 10x + 24$

$a + b = 6$

$3 \cdot 4$

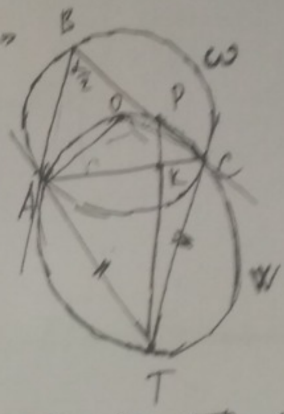
Чистовик. Вторая часть. №3

6 Дано:
ΔABC
$(O; r)$
$\perp A \cap \perp C = T.$
$PT \cap AC = K$

$S_{\Delta ABC}$ – ?

Решение:

1) В чет-угольнике $AOCT$ $\angle A = 90°; \angle C = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AOC + \angle ATC = 180° \Rightarrow$ Около $AOCT$ можно описать окружность.
Около AOC описана окр $W \Rightarrow$
$\Rightarrow T \in$ окр W



2) $\dfrac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4} = \dfrac{\frac{1}{2}AK \cdot h}{\frac{1}{2}CK \cdot h} = \dfrac{AK}{CK} \Rightarrow$
$\Rightarrow AK = \frac{5}{9}AC; \; CK = \frac{4}{9}AC.$

3) $AT = CT$ как касательные к ω.

4) $\angle ABC = \angle AOC / 2 = 90 - \dfrac{180 - \angle AOC}{2} = 90 - \angle ATC = 90 - \angle ATP - \angle PTC$

5) $(\angle ABC$ для $\odot W) = \frac{1}{2}(\smile ATP - \smile PTC) = \frac{1}{2}\angle ATP - \frac{1}{2}\angle PTC$
$\frac{1}{2}\angle ATP - \frac{1}{2}\angle PTC = 90 - \angle ATP - \angle PTC \Rightarrow \angle ATP + \angle PTC = 45°$

Чистовик. Вторая часть (№2)

№5.

$\log_{2x-8}(x-4)^2$; $\log_{x-4}\sqrt{5x-26}$; $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

Можно ~~преобразовать~~ заменить: $(a=2x-8;\ b=x-4;\ c=\sqrt{5x-26})$

Огр. о/х:
$$\begin{cases}5x-26>0\\ x-4>0\\ 2x-8>0\end{cases} \Rightarrow x>5{,}2.$$

1) $m=\log_a b^2=\log_b c=\log_c a-1.$

$m=\log_a b^2=\log_b c=\log_c \frac{a}{c}$. Тогда:

$$\begin{cases}a^m=b^2\\ b^m=c\\ c^m=\frac{a}{c}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^m=b^2\\ b^m=c\\ c^{m+1}=a\end{cases} \Rightarrow a^{0{,}5m^2}=c$$

$0{,}5m^2(m+1)=1$ или $a=1;\ b=1;\ c=1$ (решений нет)

$m=1 \Leftrightarrow (m-1)(m^2+2m+2)=0.$ ($m^2+2m+2>0$)

$m=1$, тогда $a=b^2;\ b=c;\ a=c^2$

$$\begin{cases}2x-8=(x-4)^2\\ 2x-8=5x-26\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2-10x+24=0\\ -8=3x-26\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4;6.\\ x=6\end{cases} \Rightarrow x=6.$$

2) $m=\log_a b^2=\log_b c-1=\log_c a=\log_b\frac{c}{b}$

$$\begin{cases}a^m=b^2\\ c^m=a\\ b^m=\frac{c}{b}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^m=b^2\\ c^m=a\\ b^{m+1}=c\end{cases}$$

$b=a^{\frac{m}{2}} \Rightarrow a^{0{,}5m(m+1)}=c \Rightarrow a^{0{,}5m^2(m+1)}=1.$ Из п.1 $m=1$:

$a=b^2;\ c=a;\ b^2=c$

$2x-8=(x-4)^2 \Leftrightarrow x=\{4;6\}$

$c=a$:

$(2x-8)^2=5x-26$

$4x^2-32x+64=5x-26$

$4x^2-37x+90=0.$

$D<0.\ x=\varnothing.$

$x=\varnothing \cap x=\{4;6\} \Rightarrow x=\varnothing.$

3) $m=\log_a b^2-1=\log_b c=\log_c a=\log_a\frac{b^2}{a}$

$$\begin{cases}b^m=c\\ c^m=a\\ a^m=\frac{b^2}{a}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b^m=c\\ c^m=a\\ a^{m+1}=b^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b^{m^2}=a\\ a^{m+1}=b^2\end{cases} \Rightarrow b^{m^2(m+1)}=b^2;$$

$m^2(m+1)=2 \Rightarrow 0{,}5(m^2(m+1))=1.$

Из п.1 $m=1$.

Тогда $b=c;\ c=a;\ a^2=b^2 \Rightarrow a=b;\ b=c;$

$$\begin{cases}x-4=\sqrt{5x-26}\\ 2x-8=x-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-4=\sqrt{5x-26},\ (1)\\ x=4,\ (2)\end{cases}$$

Подставив (2) в (1), получим $x=\varnothing$.

Из п.1, 2, 3 получили $x=6$.

Ответ: $x=6$.

Чистовик. Вторая часть (№1)

№4. НОД$(a;b;c)=10 \Rightarrow \{a,b,c\} \vdots 10 \Rightarrow a=10k;\ b=10n;\ c=10m$.

При этом НОД$(k;m;n)=1$; НОК$(k;m;n)=\frac{2^{17}\cdot 5^{16}}{10}=2^{16}\cdot 5^{15}$

Среди k, m и n есть одно или более чисел $\vdots\, 2^{16}$; 1 или более $\vdots\, 5^{15}$ (ввиду НОК), 1 не $\vdots\, 2$; 1 не $\vdots\, 5$ (ввиду НОД).
(или более)

Пусть одно из чисел не $\vdots\, 5$; второе $\vdots\, 5^{l}$ ($l\in[0;15]$), третье $\vdots\, 5^{15}$.
Аналогично одно из чисел не $\vdots\, 2$, второе $\vdots\, 2^{m}$ ($m\in[0;16]$), третье $\vdots\, 2^{16}$.

1) Рассмотрим $l\in[0;15]$; $m\in[0;16]$:
Способов собрать неупорядоченную тройку: $16\cdot 15$ вариантов.
~~Числа не равны ($l\in[1,14]$; $m\in[1,15]$)~~, при упорядочивании получит $3!\cdot 16\cdot 15$ троек $=6\cdot 15\cdot 16$

2) $m=0$: 2 числа не $\vdots\, 2$, 1 $\vdots\, 2^{16}$ $\Rightarrow$ 2 неуп. тройки:
$l=0$: 2 числа не $\vdots\, 5$, 1 $\vdots\, 5^{15}$ у 1 неуп. тройки 2 числа $=$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ вместо 6 вариантов получится 3. Тогда $(6\cdot 15\cdot 16-3)$ вариантов.

3) $m=0$: 2 числа не $\vdots\, 2$, 1 $\vdots\, 2^{16}$ $\Rightarrow$ Аналогично у 1 неуп тройки 2 числа $=$
$l=15$: 2 числа $\vdots\, 5^{15}$; 1 не $\vdots\, 5$ $\Rightarrow$ вместо 6 вариантов 3. $(6\cdot 15\cdot 16-6)$

4) $m=16$, $l=0$. Аналогично (т.к. относительное кол-во не меняется (2:1)) -3 варианта.

5) $m=16$, $l=15$. Вместо 6 вариантов -3. Еще (-3) варианта.

~~Всего:~~ В остальных случаях числа не равны (т.к. обладают разными степенями 2 или 5). Всего: $6\cdot 15\cdot 16-6-6=6(15\cdot 16-2)=1428$ вариантов.

Ответ: 1428 упорядоченных троек.