Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102974**

ID профиля: **345660**

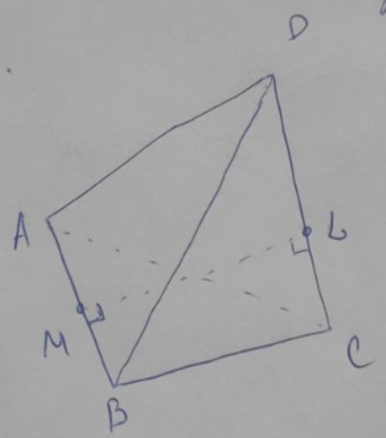
Вариант 20

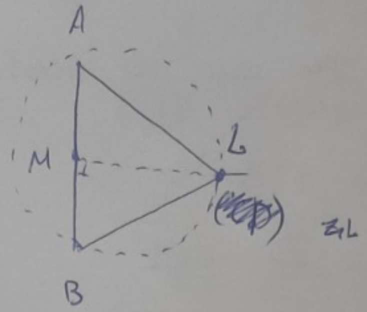
Чистовик

Математика, 11 кл

Вариант 20, часть 1

2.





Заметим, что $AD = DB$ и $AC = CB$, тогда C и D лежат на пл-ти, пер-ной AB и проходящей через середину AB — M.

Тогда $AB \perp CD$. L такова, что $ML \perp CD$ и $L \in$ прямой CD, тогда $AB \perp ML$ и $ML \perp CD$.

Рассмотрим ортогональную проекцию вдоль CD. боковая сторона Цилиндра перейдет в ок-ть такого же радиуса, C и D перейдут в L на сер. пер-ре к AB.

Радиус описанной ок-ти ABL больше или равен $\frac{1}{2}AB = AM$, при чем равенство достигается ~~тогда~~ тогда и только тогда, когда $ML = AM$ (AB – диаметр).

По теореме Пифагора:

$BD^2 = BM^2 + ML^2 + LD^2$, откуда $LD^2 = 62$

Аналогично $LC^2 = 47$ $(= BC^2 - MB^2 - ML^2 = 49 - 1 - 1)$

тогда или

$CD = \sqrt{62} - \sqrt{47}$ (C и D по одну сторону от L)

или

$CD = \sqrt{62} + \sqrt{47}$ (по разные)

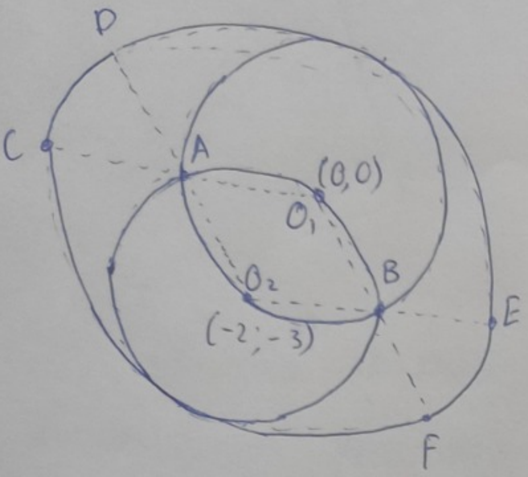
Ответ: $\sqrt{62} - \sqrt{47}$ или $\sqrt{62} + \sqrt{47}$

Математика, 11 кл.

Чистовик

Вариант 20, часть 1

3.



$a^2+b^2 \le 13$ — ~~...~~ круг с центром в (0;0) радиуса $\sqrt{13}$.

$a^2+b^2 \le -4a-6b \Leftrightarrow (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$ —

Круг радиуса $\sqrt{13}$ с центром в $(-2;-3)$.

Заметим, что растояние между центрами равно $\sqrt{13}$.

$a^2+b^2 \le \min(13; -4a-6b)$ — их пересечение.

Раз для пары (x,y) $\exists a,b \in \mathbb{R}: (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$, то (x,y) располоткена от пересечение не дальше, чем на $\sqrt{13}$.

У границы искомой области есть четыре ~~разных~~ участка: ~~(ибо O_1O_2A равносторон.~~

От C до D — ближайшая точка — A, при чем $D \in O_2A$ и $C \in O_1A$, тут кривая — дуга ок-ти с центром в A и радиусом $\sqrt{13}$.

От E до F — аналогично, равная ок-ть с центром в B.

Границы DE и FC — дуги ок-тей радиуса $2\sqrt{13}$ с центрами в O_2 и O, соответственно.

Раз AO_1O_2 и O_1O_2B — равносторонние, то $\angle DO_2E = \angle CO_1F = \frac{2}{3}\pi$;

$\angle CAD = \angle EBF = \frac{\pi}{3}$

Искомая пл-дь — сумма пл-дей всех этих сегментов, минус площади AO_1O_2 и O_1O_2B. маленькие секторы, большие секторы, пл-ди треугольников

$$S = 2\left(\frac{1}{6}\pi \sqrt{13}^2\right) + 2\left(\frac{1}{3}\pi\left(2\sqrt{13}\right)^2\right) - \frac{13\sqrt{3}}{4} \cdot 2 =$$

$$= 13\left(3\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

21102974 (U345660 M1302856)

AB⊥DC

1

$a_i = a_0 + ik$

$S = 5a_0 + k\sum_{i=1}^{5} i = 5a_0 + 15k$

$(a_0 + 6k)(a_0 + 11k) > 5a + 15k + 15$

$(a_0 + 8k)(a_0 + 9k) < 5a + 15k + 39$

$a_0^2 + 17a_0k + 66k^2 > S + 15$

$a_0^2 + 17a_0k + 72k^2 < S + 39$

$6k^2 < 24$

$\cancel{k^2 < \frac{7}{3}}$ $k^2 < 4$

$\cancel{k^2 \le 1}$

$k=1$

$\cancel{k = \pm 1}$ $k = 1$

$S = 5a_0 + 15$

$(a_0 + 6)(a_0 + 11) > 5a_0 + 30$

$(a_0 + 8)(a_0 + 9) < 5a_0 + 54$

$a_0^2 + 17a_0 + 66 > 5a_0 + 30$

$a_0^2 + 12a_0 + 36 > 0$

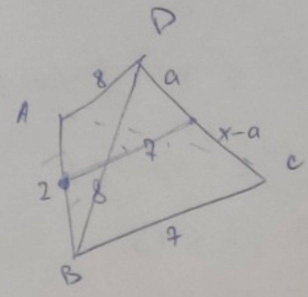
$(a_0 + 6)^2 > 0$

$a_0^2 + 17a_0 + 72 < 5a_0 + 54$

$a_0^2 + 12a_0 + 18 < 0$

$-6 \pm \sqrt{36 - 18} = -6 \pm 3\sqrt{2}$

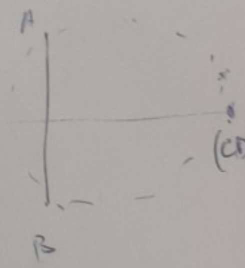
$-6 - 3\sqrt{2} < a_0 < 3\sqrt{2} - 6$



проектируем ортогонально вдоль CD.

Тогда задача равносильна на

$H_{(CD)\ на\ AB}$ ⟶ ~~т...~~



$r \ge AB/2$

тогда AB диаметр

тогда $h = \frac{AB}{2}$

$1 + 1 + a^2 = 8^2$

$1 + 1 + (x - a)^2 = 7^2$

$a = \sqrt{62}$

$x - \sqrt{62} = \sqrt{47}$

$x = \sqrt{62} + \sqrt{47}$

$\sqrt{62} \pm \sqrt{47}$

−10

$\begin{cases} -4 \cdot 1 > -20 \\ (-2 \cdot -1) < 4 \end{cases}$

$4 \cdot 9 > 20$

$6 \cdot 7 < 44$

$\sqrt{2} \approx 1{,}4142$

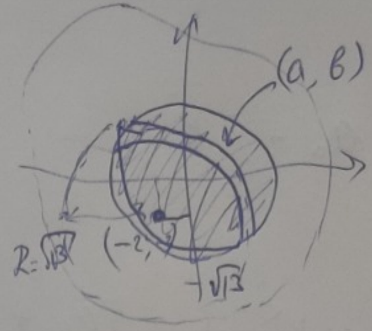
$3\sqrt{2} \approx 4{,}2\ldots$

$-10{,}2 < a_0 < -1{,}8$

$-10 \le a_0 \le -2$

без −6!

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$

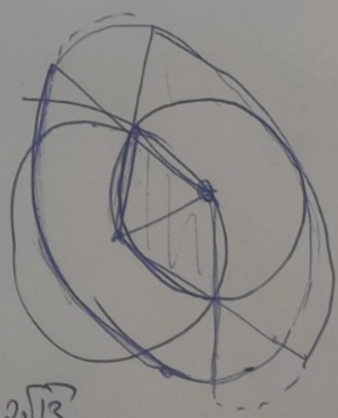


$a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13)$

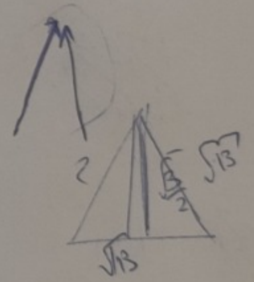
$$\begin{cases} a^2+b^2 \le -4a-6b \\ -4a-6b < 13 \end{cases}$$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$

$13\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$



$\frac{1}{4}$



два сектора по $\frac{2\pi}{3}$ с $R=2\sqrt{13}$

− два △ со сторонами $\sqrt{13}$

+ два сектора по $\frac{\pi}{3}$, $R=\sqrt{13}$

$\frac{1}{3}\pi(\sqrt{13})^2+\frac{2}{3}\pi\cdot 4(\sqrt{13})^2-\frac{13\cdot\sqrt{3}}{2}$

$13\pi\cdot 3-13\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$13\left(3\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Чистовик

Вариант 20, часть 1

1.

пусть $a_i = a_0 + ik$, при чем по условию $a_0 \in \mathbb{Z}$; $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} (a_0+6k)(a_0+11k) > S+15 \\ (a_0+8k)(a_0+9k) \leq S+39 \end{cases}$$

вычтем из второго первое, получим $6k^2 < 24$, $k^2 < 4$, откуда $k=1$

Заметим, что $S = 5a_0 + 15k = 5a_0 + 15$

$$\begin{cases} (a_0+6)(a_0+11) > 5a_0+30 \\ (a_0+8)(a_0+9) < 5a_0+54 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0^2 + 12a_0 + 36 > 0 \\ a_0^2 + 12a_0 + 18 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 \neq 6 \\ a_0 > -6-3\sqrt{2} \\ a_0 \leq -6+3\sqrt{2} \end{cases}$$

раз a целое, то (раз $3\sqrt{2} \in (4;5)$)

$$\begin{cases} a_0 \neq 6 \\ a_0 \geq -10 \\ a_0 \leq -2 \end{cases}$$

тогда a_1 – целое из $[-9;-6] \cup [-4;-1]$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102974**

ID профиля: **345660**

Вариант 20

Чистовик

Математика, 11 кл.

Вариант 20, часть 2.

4.

Заметим, что каждое из чисел должно быть вида:

$a = 10 \cdot 2^{a_1} \cdot 5^{a_2}$

$b = 10 \cdot 2^{b_1} \cdot 5^{b_2}$

$c = 10 \cdot 2^{c_1} \cdot 5^{c_2}$

При чем $a_1 b_1 c_1 = 0$ и $\max(a_1, b_1, c_1) = 16$

$a_2 b_2 c_2 = 0$ и $\max(a_2, b_2, c_2) = 15$

Сначала расставим a_1, b_1, c_1:

I) есть две 16 среди a_1, b_1, c_1, остается 1 ноль, 3 способа

II) есть два нуля и 16, 3 сп-ба

III) 0, 16 и одна от 1 до 15, 15 способов третьей, для каждого еще 6 перестановок

всего $6 \cdot 16$. ~~всего 15 · 6~~

Для a_2, b_2, c_2 — аналогично $6 \cdot 15$, раз они независимы, то всего $15 \cdot 16 \cdot 36$ способов выбрать упорядоченную тройку

Математика, 11кл

Чистовик

Вариант 20, часть 2

5.

пусть два равных логарифма равны k, третий — $k+1$

Если равны первые два:

$(2x-8)^k = (x-4)^2$

$(x-4)^{2k} = 5x-26$

$(5x-26)^{k+1} = (2x-8)^2$

Тогда $(2x-8)^{k^2} = 5x-26$

~~5x-26~~ $(2x-8)^{k^2(k+1)} = 2x-8$ $D>0$

Откуда $k^2(k+1)=1$. $k^3+k^2-1=0$; $(k-1)(k^2+k+1)=0$

$k=1$.

То есть

~~$(x-4)^2 = 2x-26$~~

$2x-8 = 5x-26$; $3x=18$; $x=6$ ~~тогда~~

$x=6$ — подходит

Если равны первое и третье:

$$\begin{cases} (2x-8)^k = (x-4)^2 \\ (x-4)^{2(k+1)} = 5x-26 \\ (5x-26)^k = (2x-8)^2 \end{cases} \Rightarrow (2x-8)^k = (5x-26)^{k^2/2} = (x-4)^{k^2(k+1)}$$

$k^3+k^2-2=0$

$(k-1)(k^2+2k+2)=0$

$k=1$

тогда $2x-8 = x^2-8x+16$ вне области определения

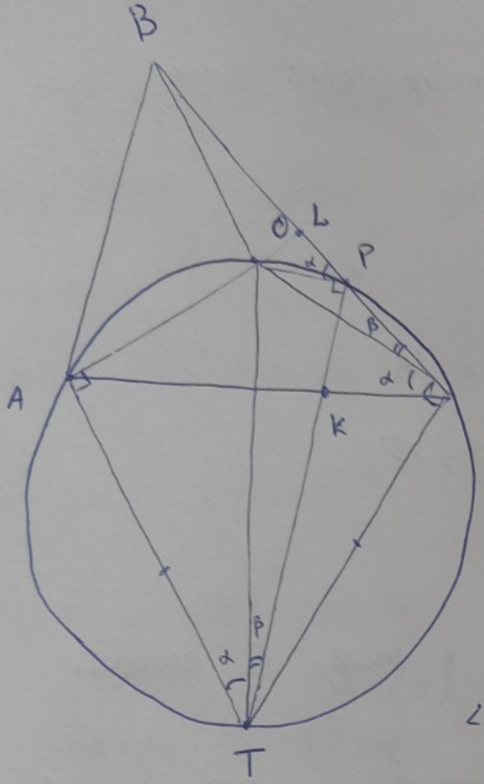
$x^2-10x+24=0$; $x_1=4$; $x_2=6$

Но ~~в~~ $x=6$ не подходит во второе ур-ие.

Чистовик Математика, 11 кл.

Вариант 20, часть 2

6.



$\angle OAT = \angle OCT = \frac{\pi}{2}$ (угол между радиусом и касательной)

Тогда AOCT коцикличны, при чем OT – диаметр.

Обозначим $\angle OTA = \alpha$; $\angle BCO = \beta$.

$AT = TC$ (отрезки касательных), откуда $\frown AT = \frown TC$, значит $\angle AOT = \angle TPC$

Но $\angle AOT = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (ΔOAT – пр-ный)

$\angle BPO = \pi - \angle OPT - \angle TPC = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \alpha.$

$$\frac{10}{8} = \frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{S_{AKT}}{S_{TKC}} = \frac{\frac{1}{2} AT \cdot TK \cdot \sin(\alpha+\beta)}{\frac{1}{2} AT \cdot TK \cdot \sin(\alpha-\beta)} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$4\sin(\alpha+\beta) = 5\sin(\alpha-\beta)$

$4(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) = 5(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)$

$\sin\alpha\cos\beta = 9\sin\beta\cos\alpha$

$tg\,\alpha = 9\,tg\,\beta.$

L – середина CB.

$tg\,\alpha = tg\angle LPO = \frac{OL}{LP}$; $tg\,\beta = tg\angle LCO = \frac{OL}{LC}$

$LC = 9LP$

тогда $PC/BC = 8/18$

$$S_{ABC} = \frac{BC}{CP} \cdot S_{APC} = \frac{BC}{CP} \cdot \frac{AC}{KC} \cdot S_{KPC} = \frac{18}{8} \cdot \frac{18}{8} \cdot 8 = \frac{18^2}{8} = \frac{81}{2} = 40,5$$

21102974 (U345660 M1302857)

Черновик

$x-4=\sqrt{2x-8}$

$(x-4)^2=(5x-26)$

$\sqrt{5x-26}=2x-8$

10

$5x-26=2x-8$

$3x=18$

$x=9$

$5^2=5\cdot 9-26$

$(x-4)^{2k}=(5x-26)$

$(5x-26)^{k/2}=(2x-8)^2$

$(2x-8)^{k+1}=x-4$

$(k+1)/2$

$(5x-26)$

$(x-4)^{k(k+1)}$

$<x-4$

$k(k+1)=1$

$k^2+k-1=0$

$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$(2x-8)^{2k}=(x-4)^2$

$(5x-26)^k=(2x-8)^2$

$(x-4)^{2(k+1)}=(5x-26)$

$(2x-8)^{k(k+1)}=5x-26$

$(5x-26)^{k^2(k+1)/2}=5x-26$

$k^2(k+1)=2$

k^3+k^2-2

$(k-1)(k^2+2k+2)$

$k=1$

$x^2-8x+16=2x-8$

$2x-8=(x-4)^2$

$(5x-26)=(2x-8)^2=(x-4)^4$

$(x-4)^4=(5x-26)$

$(2x-8)$

$x^2-10x+24=0$

$5\pm\sqrt{25-24}$

6 4

21102974 (U345660 M1302857)

Черновик

$a_1 b_1 c_1 = 0$

$a_2 b_2 c_2 = 0$

$\max(a_1, b_1, c_1) = 16$

$\max(a_2, b_2, c_2) = 15$

две по 16: 3

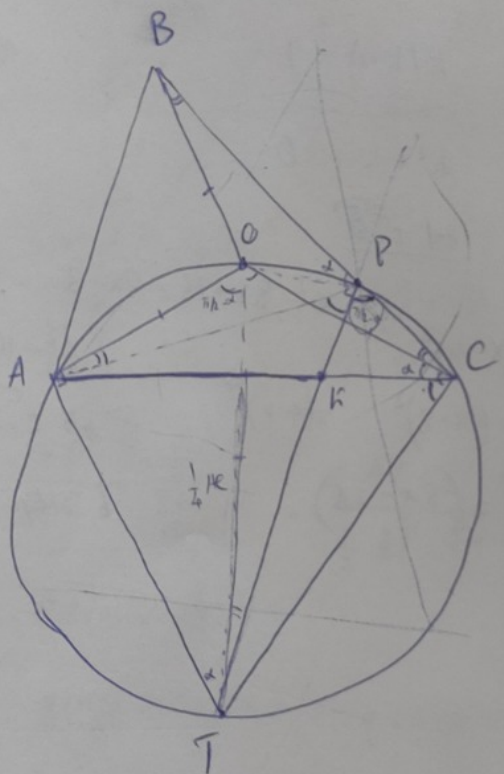
два нуля: 3

0; 16 и $0 < a < 16$ $15 \cdot 6$

$(6 \cdot 16) \cdot (6 \cdot 15)$

$6^2 \cdot 15 \cdot 16$

$tg(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$



$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta} =$$

$$= \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{10\, tg\beta}{1 - 9 tg^2\beta} = \frac{1}{2}$$

$20\, tg\beta = 1 - 9\, tg^2\beta$

$9 tg^2\beta + 20 tg\beta - 1 = 0$

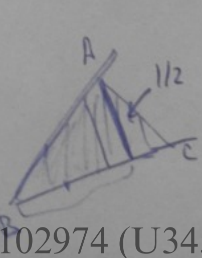
$$tg\,\beta = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 9}}{9}$$

$tg(\pi/2 - \alpha)$

$$\frac{\sin(\pi/2 - \alpha)}{\cos(\pi/2 - \alpha)}$$

$ctg\,\alpha = \frac{1}{2}$

$tg\beta = \frac{1}{?}$



21102974 (U345660 M1302857)

Черновик

$НОД(a, b, c) = 10$

$НОК(a,b,c) = 2^{17} \cdot 5^{16}$

$10a_1, \; b_1 10, \; 10c_1$

$10 \cdot$

одно из них 10

тогда $2^{16} \cdot 10$ и $5^{15} \cdot 10$ — подходят

$10 \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2}$

$10 \cdot 2^{\beta_1} \cdot 5^{\beta_2}$

$10 \cdot 2^{\gamma_1} \cdot 5^{\gamma_2}$

среди $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ есть 0

и среди $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$

$\max(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 16$

$\max(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 16$

$10 \cdot 2^{16} \cdot 5^{\alpha_2}$ | $10 \cdot 2^{16} \cdot 5^{15}$

$10 \cdot 2^{\beta_1} \cdot 5^{15}$ | $10 \cdot 2^{\beta_1} \cdot 5^{\beta_2}$

$10 \cdot 2^{\gamma_1} \cdot 5^{\gamma_2}$ | $10 \cdot 2^{\gamma_1} \cdot 5^{\gamma_2}$

$(2 \cdot 17) \cdot (2 \cdot 16)$ $+ \dfrac{(2 \cdot 17) \cdot (2 \cdot 16)}{2}$

$\underline{6,5 \, 16 \cdot 17}$

$\underline{8 \cdot 13 \cdot 17}$

$+ 16 \cdot 17 / 2$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) ; \log_{(x-4)^2} 5x-26$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$a = \sqrt{2x-8}; \; b = (x-4); \; c = \sqrt{5x-26}$

$\log_a b \; ; \log_{b^2} c^2 \; ; 2\log_c a^2$

$\log_a b \; ; \log_b c \; ; 2\log_c a$

$x \qquad x \qquad x+1$

$b = a^x \qquad c = b^x = (a^x)^x \qquad a = c^{\frac{x+1}{2}}$

$a = \left((a^x)^x\right)^{\frac{x+1}{2}}$

$b = a^x$

$c = b^x$

$a^2 = c^x \cdot c = (c b)^x = b^{(x+1)x}$

$\overset{\shortparallel}{b^x}$

~~тогда~~ $\log_b a = \dfrac{1}{x}$

$\log_c a = \dfrac{2}{x^2} = x+1$

k

$\log_{\sqrt{5x-26}} \sqrt{2x-8} = \dfrac{1}{k^2}$

$\dfrac{k^2}{2} = k+1$

$k^2 - 2k - 2 = 0$

$1 \pm \sqrt{1+2}$

$\underline{1 \pm \sqrt{3}}$

$\dfrac{2}{k^2} = k+1$

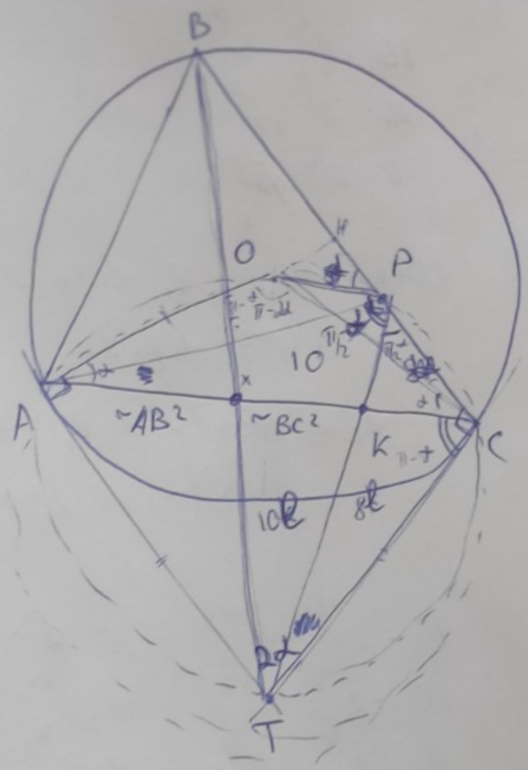
$2 = k^3 + k$

$(k-1)(k^2+k+2) = 0$

$\underline{k=1}$

21102974 (U345660 M1302857)

Черновик



$\frac{AK}{KC} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

$\frac{CP}{CB}$ $\quad$ $\underline{BA^2 = BP \cdot BC}$

PC

HC

$CB = 2HC$

$\frac{PC}{2HC}$ $\quad$ $\frac{PC}{HC} = 1 - \frac{PH}{HC} = 1 - tg$

$8(\ell+1)$

$AK \cdot KC = TK \cdot KD$

$AC^2 \cdot \frac{10}{18} \cdot \frac{8}{18} = TP \cdot \ell^2(1-\ell)$

$(\angle C - \alpha)$ $\quad$ $2\alpha - C$

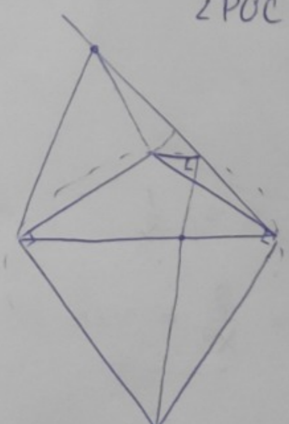
$\frac{PC}{CB} = k$

$\pi - \alpha$

$\angle OPC = \pi - \alpha$

$\angle POC = \alpha - (\angle C - \alpha) = 2\alpha - \angle C$

$\angle AOP = \pi - 2\alpha + 2\alpha - \angle C = \pi - \angle C$



$\angle BOC =$

$5\sin(\alpha - C) = 4\sin(\alpha + C)$

$\frac{\sin(\alpha + C)}{\sin(\alpha - C)} = \frac{5}{4}$

$5(\sin\alpha\cos C - \sin C\cos\alpha) = 4\sin\alpha\cos C + 4\sin C\cos\alpha$

$\sin\alpha\cos C = 9\sin C\cos\alpha$

$\underline{tg\,\alpha = 9\,tg\,C}$

log

21102974 (U345660 M1302857)