Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102966**

ID профиля: **103659**

Вариант 20

Вариант 20

№1.

$\{a\}: a_1, a_2, a_3 \ldots$ $\qquad a_6 \cdot a_{11} > S+15 \qquad a_1 = ?$

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \qquad a_8 \cdot a_9 < S+39$

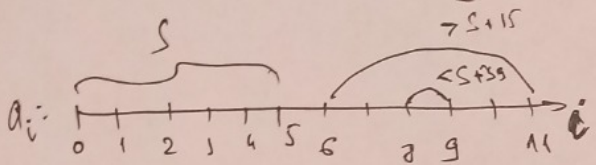
$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{11} = a_1 + 10d = a_6 + 5d$

$a_8 = a_1 + 7d = a_6 + 2d$

$a_9 = a_1 + 8d = a_8 + \cancel{d}$

$S = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = 5a_1 + 10d$



$5a_1 - 20 < S < 5a_1 + 20$

$S_{6,11\,min} < a_6 \cdot a_{11} <$

(1) $a_6 \cdot a_{11} = (a_1+5d)(a_1+10d) = \underline{a_1^2 + 15da_1 + 50d^2 > S+15}$

(2) $a_8 \cdot a_9 = (a_1+7d)(a_1+8d) = \underline{a_1^2 + 15da_1 + 56d^2 < S+39}$

~~(2) − (1) = 6d²~~

(1): $a_1^2 + 15da_1 + 50d^2 > S+15 \overset{+24}{+24}$

(2) $a_1^2 + 15da_1 + 56d^2 < S+15+24$

$\Downarrow$

$a_1^2 + 15da_1 + 56d^2 < S+39 < a_1^2 + 15da_1 + 50d^2 + 24$

$\Downarrow$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

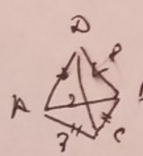
$d \in (-2; 2)$

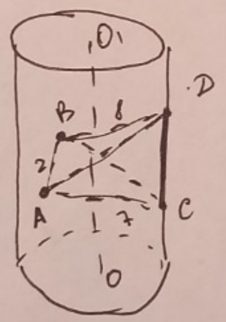
$a_6 \cdot a_{11}: \; d_6 = \frac{-15a_1}{100} := S_{6,11\,min}$

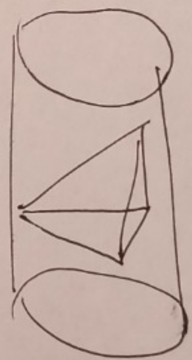
$a_8 \cdot a_9: \; d_6 = \frac{-15a_1}{112} := S_{89\,min}$

$$\begin{array}{r} \times\, 112 \\ 112 \\ \hline 224 \\ 112 \\ 112 \\ \hline 12544 \end{array}$$

№2.







Тестовик Вариант 20 (4)

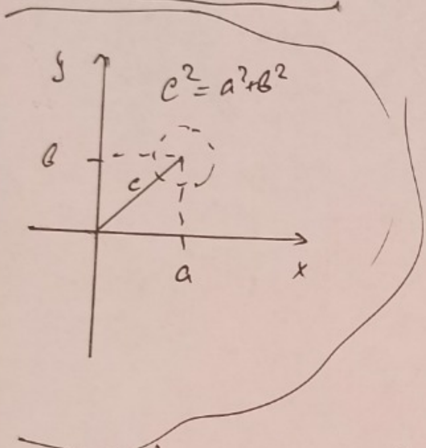
№3.

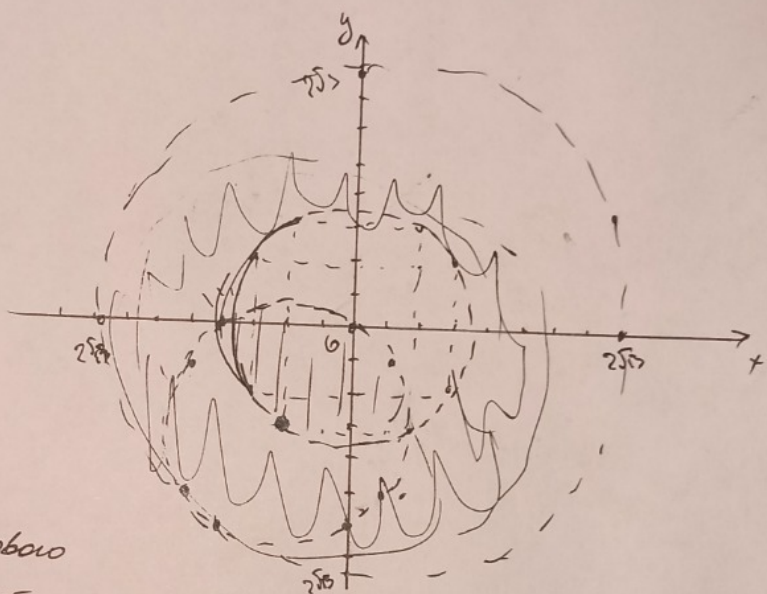
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13) \end{cases}$$

$$\min(\hat{a},\hat{b}) = \frac{\hat{a}+\hat{b}-|\hat{a}-\hat{b}|}{2}$$

первое ~~уравнение~~ неравенство задает ~~окружность~~ круг радиуса $\sqrt{13}$, смещенную на a вдоль OX и на b вдоль OY.

$\underbrace{13 = 3^2+2^2}$





Второе неравенство ограничивает смещение первого круга, т.е его центр не может ~~[illegible]~~ выйти вне круга $x^2+y^2 \le 13$

(a^2+b^2 - квадрат расстояния, на которое смещается центр круга)

$0 \le -4a-6b < 13$ т.к $a^2+b^2 \ge 0$

$a^2+b^2 \le -4a-6b$

$(a^2+4a+4)-4+(b^2+6b+9)-9 \le 0$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$ - круг радиуса $\sqrt{13}$ с центром смещенным на 2 влево и 3 вниз.

Исходя из вышесказанного множество точек представляемо на чертеже

Листовая вариант 20 (3)

№1.

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_5 = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = (a_1 + 2d)5 \;;\; d > 0$

$a_6 = a_1 + 5d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_9 = a_1 + 8d$

$a_6 \cdot a_{11} = (a_1 + 5d)(a_1 + 10d) = a_1^2 + 15da_1 + 50d^2 = N_1$

$a_8 \cdot a_9 = (a_1 + 7d)(a_1 + 8d) = a_1^2 + 15da_1 + 56d^2 = N_2$

$\left.\begin{array}{l} N_1 > S + 15 \\ N_2 < S + 39 \end{array}\right\}$

$N_2 < N_1 + 24$

$a_1^2 + 15da_1 + 56d^2 < a_1^2 + 15da_1 + 50d^2 + 24$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

$d \in (-2; 2)$, но $d > 0 \Rightarrow \underbrace{d \in (0; 2)}$

N_1 и N_2 – квадратные уравнения относительно d

$\Rightarrow$ минимум достигается в вершине (d_6)

$N_1: d_6 = \frac{-15a_1}{100} : N_{1min} = a_1^2 - \frac{225a_1^2}{100} + \frac{50 \cdot 225a_1^2}{10000}$

$N_2: d_6 = \frac{-15a_1}{112} : N_{2min} = a_1^2 - \frac{225a_1^2}{112} + \frac{56 \cdot 225a_1^2}{(112)^2}$

$N_{1min} = \frac{1000a_1^2 - 2250a_1^2 + 1125a_1^2}{1000}$

$N_{2min} = \frac{112^2a_1^2 - 225 \cdot 112a_1^2 + 56 \cdot 225a_1^2}{112^2}$

$\left\{\begin{array}{l} 5a_1 < S < 6a_1 + 20 \\ N_{1min} > S + 15 \\ N_{2min} < S + 39 \end{array}\right.$

– решая это неравенство, можно найти ограничения на a_1.

Чистовик Вариант 20

2

β – угол между AD и BD и основанием цилиндра.

A_2D и B_2D – проекции AD и BD на плоскость параллельную основ-ю проходящую через D $\Rightarrow$ $\cos\beta = \frac{A_2D}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{8} \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sqrt{62}}{8}$

$\Rightarrow$ проекция $AD = BD$ ~~на~~ на высоту цилиндра: $h_2 = AD \cdot \sin\beta = 8\frac{\sqrt{62}}{8} = \sqrt{62}$

б) h – длина CD $\Rightarrow$ $h = h_1 + h_2$ (рис. 3.2) $\Rightarrow$ $h = \sqrt{47} + \sqrt{62} = CD$,

h – значение CD при $R = R_{min}$.

Ответ: $\sqrt{47} + \sqrt{62}$;

Вариант 20. Листовик

1

№2. Дано:

ABCD-тетраэдр.

$AB=2$

$AC=CB=7$

$AD=DB=8$

цилиндр с осью OO_1, радиуса R

CD ~~[illegible]~~ параллельно оси.

Все вершины ABCD лежат на бок. пов-ти цилиндра

$R=R_{min}$

$CD=?$ $[R=R_{min}]$

Рис. 1.1

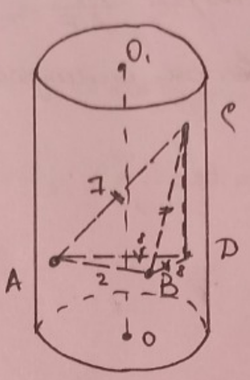


Рис. 2.1

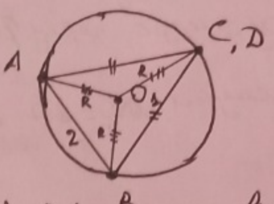


Рис. 3.1

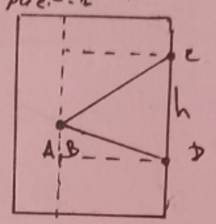
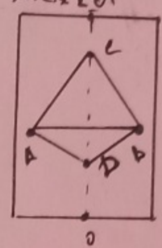


Рис. 4.1



1) Единственный способ разместить тетраэдр в цилиндре: C, D должны лежать на боков. поверхности и $CD \parallel O_1O$ => CD лежит на бок. пов-ти параллельно O_1O (C и D не могут лежать так, чтобы их проекции на основания цилиндра не совпадали); A и B симметричны относительно (OCD) => $AB \perp CD$.

2) По неравенству треугольника для $\triangle BCD$: $CD < CB+BD$

$CD < 15$

для $\triangle AO_1B$ на рис. 2 (проекция тетраэдра на основание цилиндра):

$AB < AO_1 + O_1B$

$2 < R+R$ => $R>1$ или $R\geq 1$ если учитывать случай, когда AB-диаметр.

Видно, что минимальное значение для R это 1, достигается ~~[illegible]~~ в случае, когда AB - диаметр окружности сечения цилиндра параллельно основаниям, проходящего через AB.

Рис. 1.2

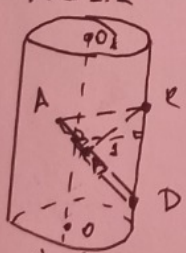


Рис. 2.2

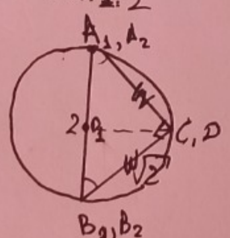


Рис. 3.2

Рис. 4.2

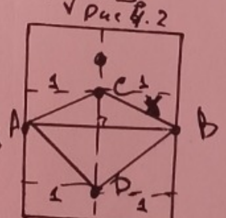
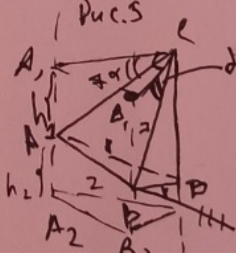


Рис. 5



3) В $\triangle ABC$ (Рис 2.2): $\angle ACB = 90°$, т.к. опирается на диаметр описанной окр-ти.

=> ~~[illegible]~~ $AC=CB=\sqrt{2}$ (AC и CB равны => равны и их проекции)

$CO_1 = 1$.

4) α - угол между ребрами AC и CB и основанием цилиндра.

=> $A_1C = B_1C = AC\cdot\cos\alpha = BC\cdot\cos\alpha$ (Рис. 5. т.к. AC=CB и их проекции равны)

=> $\cos\alpha = \frac{B_1C}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{7}$ => $\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{2}{49}} = \frac{\sqrt{47}}{7}$ => проекция AC=BC на высоту цилиндра равна h_1

$h_1 = AC\cdot\sin\alpha = CB\sin\alpha = 7\cdot\frac{\sqrt{47}}{7} = \sqrt{47}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102966**

ID профиля: **103659**

Вариант 20

Чистовик вариант 20 (1)

№4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=2^d\cdot 5^e \\ b=2^f\cdot 5^g \\ c=2^h\cdot 5^k \end{matrix}$$

1) Так как $НОД(a;b;c)=2\cdot 5$, то в каких-то числах (одно число) в качестве множителя есть только одна 2, и так же в каком-то только одна 5. В то же время $НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16}$, значит в каких-то числах в качестве множителя есть 2^{17}, и так же в каких-то есть 5^{16}. Числа a, b, c представимы в виде $2^x\cdot 5^y$, где $x,y \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. (Доказательство представлено выше)

2) Какое-то из чисел d, f, h равно 1, какое-то равно 17. Оставшееся число может равняться любому целому из промежутка $[1;17]$ — 17 вариантов. Аналогично для e, g, k: одно из них равно 1, одно равно 16, оставшееся равно любому целому из $[1;16]$ — 16 вариантов.

3) Способов выбрать из чисел d, f, h число равное 1: 3, равное 17: 2, равное целому из промежутка $[1;17]$: 17. Но при этом мы посчитали дважды, когда одно число обязательно равно 1 или 17 и оно же в другом случае равно 1 или 17 из промежутка $[1;17]$, т.е. ~~из полученного вариантов нужно вычесть~~ нужно не учитывать 2й раз такие случаи: (d,f,h): (1,1,17), (1,17,17), (1,17,1), (17,1,1), (17,1,17), (17,17,1) — всего 6 вариантов.

Итого выбрать (d,f,h): $3\cdot 2\cdot 17 - 6 = 6\cdot 16$ — способов.

Способов выбрать из чисел e,g,k число равное 1: 3, равное 16: 2, равное целому из $[1;16]$: 16, Но при этом мы дважды посчитали случаи, когда число обязательно равно 1 или 16 и потом оно же равно 1 или 16 из $[1;16]$, т.е. нужно не учитывать 2й раз такие случаи: (e,g,k): (1,1,16), (1,16,16), (16,1,1) (1,16,1), (16,1,16), (16,16,1) — всего 6 вариантов.

Итого выбрать (e,g,k): $3\cdot 2\cdot 16-6 = 6\cdot 15$ — способов.

4) На каждый способ выбрать (d,f,h) есть несколько способов выбрать (e,g,k). Всего вариантов: $6\cdot 16\cdot 6\cdot 15 = 36\cdot 16\cdot 15 = 8640$ — столько есть неповторяющихся троек чисел (a,b,c)

Ответ: 8640

Итоговый вариант 20 (2)

N5. $a=\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$, $b=\log_{(x-4)^2}(5x-26)$, $c=\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$; ОДЗ: $x>5\frac{1}{5}$

Из ОДЗ чисел a,b,c следует, что $(x-4)>0$, $(5x-26)>0$, $(2x-8)>0$, тогда числа a, b, c можно преобразовать:

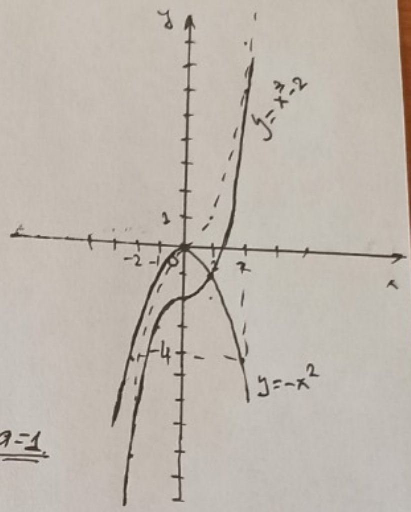
$a = 2\log_{2x-8}(x-4)$

$b = \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)$

$c = 2\log_{5x-26}(2x-8)$

Заметим, что $a\cdot b\cdot c = 2\log_{2x-8}(x-4)\cdot\frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)\cdot 2\log_{5x-26}(2x-8)$
$= 2$ (по св-ву логарифмов)

$\underline{a\cdot b\cdot c = 2}$



Рассмотрим 3 случая: 1) $a=b$, $c=a+1$;
2) $a=c$, $b=a+1$;
3) $b=c$, $a=b+1$;

1) $a\cdot b\cdot c = a^2\cdot c = a^2(a+1)=2$; $a^3+a^2=2$
$a^3-2=-a^2$

Из графика видно что имеется единственное решение $\underline{a=1}$
(на $(0;+\infty)$ $a^3-2\uparrow$, $-a^2\searrow$ и 1 решение,
на $(-\infty;0)$ $a^3-2\downarrow$ быстрее, чем $-a^2$ и решения нет)

1) $\begin{cases} a=1\\ b=1\\ c=2\end{cases}$ – в следующих случаях решения будут аналогичными: (2 числа равны 1 и другое 2)

2) $\begin{cases} a=1\\ c=1\\ b=2\end{cases}$

3) $\begin{cases} a=2\\ b=1\\ c=1\end{cases}$

В случае 1: $\begin{cases} 2\log_{2x-8}(x-4)=1\\ \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)=1\\ 2\log_{5x-26}(2x-8)=2\end{cases}$ $\begin{cases}\log_{2x-8}(x-4)=\frac{1}{2}\\ \log_{x-4}(5x-26)=2\\ \log_{5x-26}(2x-8)=1\end{cases}$ $\begin{cases}x-4=\sqrt{2x-8}\\ 5x-26=(x-4)^2\\ 2x-8=(5x-26)\end{cases}$

$\cancel{\begin{cases}x-4=\sqrt{2x-8}\\ 2x-8=(x-4)^2\end{cases} \Rightarrow x-4=|x-4|,\ x-4>0 \text{ из ОДЗ} \Rightarrow 0=0 \text{ и } x\in R, \text{ пересечение с ОДЗ}}$

$\begin{cases}(x-4)^2=2x-8\\ 5x-26=x^2-8x+16\\ 2x-8=5x-26\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-8x+16=2x-8\\ x^2-13x+42=0\\ 3x-18=0\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}x^2-10x+24=0\\ \left[\begin{array}{l}x=7\\ x=6\end{array}\right.\\ x=6\end{array}\right.$ $\begin{cases}(x-5)^2=1\\ \left[\begin{array}{l}x=7\\ x=6\end{array}\right.\\ x=6\end{cases}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=6\\ x=4\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=7\\ x=6\end{array}\right.\\ x=6\end{cases}$ $\underline{\underline{x=6.}}$

В случае 2: $\begin{cases}2\log_{2x-8}(x-4)=1\\ \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)=2\\ 2\log_{5x-26}(2x-8)=1\end{cases}$ $\begin{cases}x-4=\sqrt{2x-8}\\ 5x-26=(x-4)^4\\ 2x-8=\sqrt{5x-26}\end{cases}$ $\begin{array}{l}(x-4)^2=2x-8\\ 5x-26=x^4-16x^3+6\cdot16x^2-256x+256\\ (2x-8)^2=5x-26\end{array}$

$\begin{cases}x^2-10x+24=0\\ x^4-16x^3+6\cdot16x^2-261x+282=0\\ 4x^2-32x+64=5x-26\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=6\\ x=4\end{array}\right.\\ x^4-16x^3+6\cdot16x^2-261x+282=0\\ 4x^2-37x+90=0\end{cases}$

Проверим подстановкой корни 6 и 4:
4 не удовлетворяет ОДЗ. значит

Чистовик Вариант го 3

№5 ... $\frac{1}{2}(\log_{6-4}(5\cdot 6-26))=2$

$\log_2(4)=4$

$2=4$ (неверно) $\Rightarrow$ система ~~корней~~ решений не имеет.

В случае 3: $\begin{cases} 2\log_{2x-8}(x-4)=2 \\ \frac{1}{2}\log_{x-4}(5x-26)=1 \\ 2\log_{5x-26}(2x-8)=1 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_{2x-8}(x-4)=1 \\ \log_{x-4}(5x-26)=2 \\ \log_{5x-26}(2x-8)=\frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-8=x-4 \\ 5x-26=(x-4)^2 \\ 2x-8=\sqrt{5x-26} \end{cases}$

$\begin{cases} x=4 \\ 5x-26=x^2-8x+16 \\ (2x-8)^2=5x-26 \end{cases}$ Единственный корень $x=4$ не удовлетворяет ОДЗ системы. значит решений она не имеет.

В итоге нашли только одно решение при $x=6$.

Ответ: 6.

21102966 (U103659 M1303637)

№6. Дано: Шестоков Вариант 20 (4)

$\triangle ABC$

окружность ω с центром O описана около $\triangle ABC$

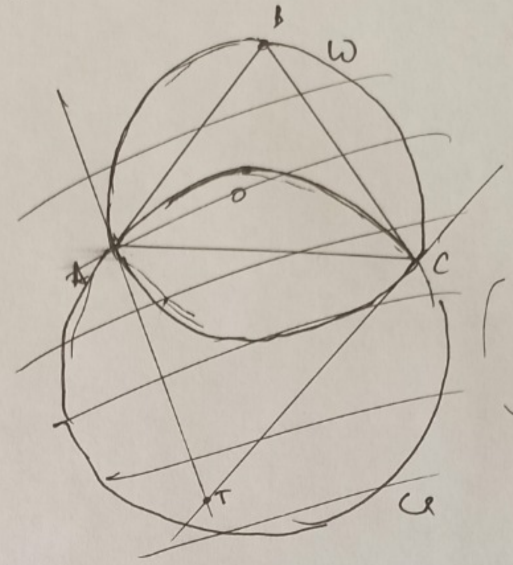
окружность ϑ через A, O, C пересекает BC в т. P

касательные к ω из A и C пересекаются в т. T.

$TP \cap AC = K$

$S_{APK} = 10 \quad S_{CPK} = 8$

$\angle ABC = \operatorname{arctg} 2$

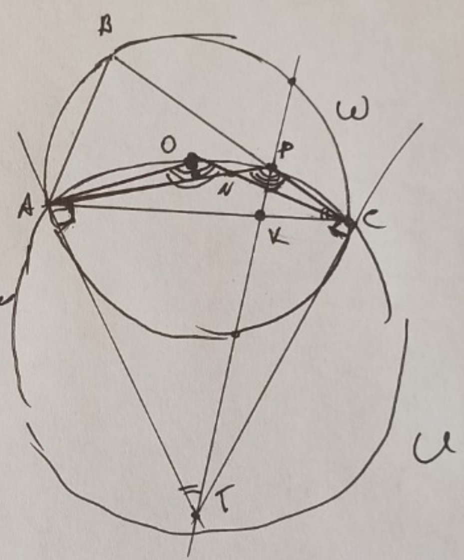


Из формулы S через стороны

$$\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \frac{CB \cdot CA}{CP \cdot CK}$$

a) S_{ABC}

б) $AC = 2$



1) Четырехугольники $AOCT$ и $APCT$ — вписанные, т.к. вершины лежат на ϑ

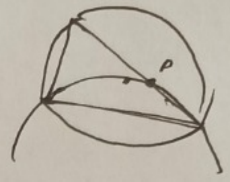
$\angle AOC = \angle APC$ (вписанные и опираются на одну дугу.)

$\Rightarrow \triangle AON \sim \triangle CPN$ ($\angle AON = \angle NPC$, $\angle ONA = \angle PNC$ (вертик.))

2) $S_{APC} = 18 = \dfrac{AP \cdot PC \cdot AC}{4R_{\vartheta}}$

№1. $\begin{cases} НОД(a,b,c)=10 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$

$\#(a;b;c)=?$



$\cancel{a=2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}}$
$\cancel{b=2^{\gamma}\cdot 5^{\varphi}}$
$\cancel{c=2^{\varepsilon}\cdot 5^{\delta}}$

$a=2\cdot 5^{\alpha}$
$b=2^{\beta}\cdot 5$
$c=2^{\gamma}\cdot 5^{\delta}$

$a=2\cdot 5$
$b=2^{\beta}\cdot 5^{\alpha}$
$c=2^{\gamma}\cdot 5^{\delta}$

Нод $=2\cdot 5 \Rightarrow$ в каком то не более 1×2 и не более 1×5

$НОК(a;b)=\dfrac{a\cdot b}{НОД(a;b)}$

$\cancel{\begin{cases}\alpha+\gamma+1=16\\ 1+\beta+\gamma=17\end{cases}}$

$\alpha,\beta,\gamma,\delta \in [0;\ldots)\cap \mathbb{Z}$

$a\cdot b = НОК\cdot НОД$

$a=2^{d+\alpha}\cdot 5^{e+\beta}$
$b=2^{d+\alpha}\cdot 5^{e+\beta}$
$c=2^{d+\gamma}\cdot 5^{d+\delta}$

Нод: $2^{d}\cdot 5^{e}=2\cdot 5$

НОК: $2^{d+\max(\alpha;\gamma)}\cdot 5^{e+\max(\beta;\delta)}=2^{1+\max(\beta;\gamma)}\cdot 5^{1+\max(\alpha;\delta)}$

2 : 3 вар.
5 : 3 вар.

× ...

$5^{\alpha}\to 2 \Rightarrow 5^{\delta}\to 1$
$2^{\beta}\to 2 \Rightarrow 2^{\gamma}\to 1.$

$\alpha<\delta=16$
$\beta<\gamma=17$

d e f g h k

$d=1$ ← 3 способа

$h\in[1;17]$ ← 17 способов

$h=17$ ← 2 способа

$3n+1 \geq 3\sqrt[3]{2\cdot 2\cdot \frac{1}{2}}=3\sqrt[3]{2}$

$d\in[1;17]$

$f=1$

$h=17$

$\begin{cases} a+b+c=3n+1 \\ a\cdot b\cdot c=2 \\ a=b \\ c=a+1=b+1 \end{cases}$

$a^2\cdot c=2$

$c=a+1$

$a^3+a^2=2$

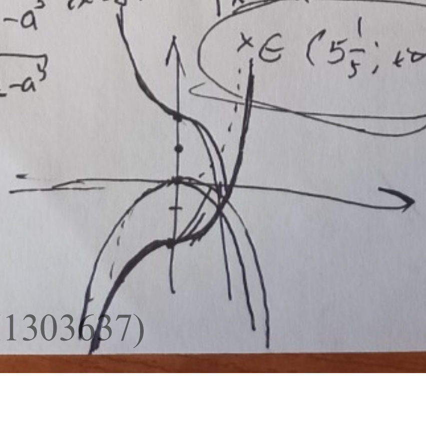
$x-4>0$
$5x-26>0$
$2x-8>0$

$x>4$
$x>5\frac{1}{5}$
$x>4$

$x\in(5\frac{1}{5};+\infty)$

$a^2=2-a^3$

$a=\sqrt{2-a^3}$



$\times\begin{array}{r}16\\15\\\hline 80\\+16\\\hline 240\end{array}$

$\times\begin{array}{r}36\\\hline 144\\+72\\\hline 8640\end{array}$

$\dfrac{13\pm\sqrt{169-4\cdot 42}}{2}=\dfrac{13\pm 1}{2}=7/6$

16
×16

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

21102966 (U103659 M1303637)