Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102808**

ID профиля: **334610**

Вариант 20

Чистовик

№1 Вариант 20

Пусть d - разность последовательности:

$a_1, a_1+d, a_1+2d, \ldots$

Тогда:

$$S = \frac{a_1+a_1+4d}{2}\cdot 5 = 5a_1+10d$$

$$\begin{cases} a_6 a_{11} > S+15 \\ S+39 > a_8 a_9 \end{cases} \Rightarrow a_6 a_{11} + S + 39 > a_8 a_9 + S + 15$$

$$(a_1+5d)(a_1+10d)+24 > (a_1+7d)(a_1+8d)$$

$$a_1^2+15a_1d+50d^2+24 > a_1^2+15a_1d+56d^2$$

$$24 > 6d^2 \Rightarrow 4 > d^2,$$ так как $d>0$, то $\underline{d=1}$

- $a_6 a_{11} > S+15$

$(a_1+5)(a_1+10) > 5a_1+10+15 = 5(a_1+5)$

$(a_1+5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -5.$

- $S+39 > a_8 a_9$

$5a_1+10+39 > (a_1+7)(a_1+8)$

$5a_1+49 > a_1^2+15a_1+56$

$a_1^2+10a_1+7<0$

$t^2+10t+7<0$

$D = 100-28 = 72$

$t_1 = \frac{-10+\sqrt{72}}{2} = -5+3\sqrt{2}$

$t_2 = -5-3\sqrt{2}$

$-5-3\sqrt{2} < a_1 < -5+3\sqrt{2}$

$-10 < -5-3\sqrt{2} < -9$

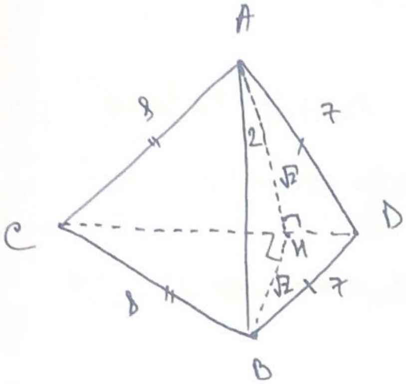
$-1 < -5+3\sqrt{2} < 0$

Отсюда следует, что $-9 \le a_1 \le -1$ и $a_1 \neq -5$.

$\boxed{\text{Ответ: } a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1}$

Чистовик

№2 Вариант 20.



$AB=2$

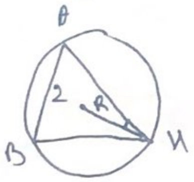
$AC=CB=7$

$AD=DB=8$

Так как $AC=CB=7$ и $AD=DB=8$, то $\Delta BDC=\Delta ADC$

Так как $\Delta BDC=\Delta ADC$, то основания перпендикуляров из точек B и A на CD совпадают, пусть эта точка H, тогда плоскость ABH перпендикулярна CD.

Так как CD перпендикулярна оси цилиндра, то плоскость ABH паралельна основанию, то радиус описанной окр. ABH равен радиусу основания:



$2=AB=2R\sin\angle AHB\leq 2R \Rightarrow R\geq 1 \Rightarrow$ минимальный $R=1$.

Тогда AB диаметр описанной окр. $ABH \Rightarrow \angle AHB=90^\circ$

Т.к. $\Delta BDC=\Delta ADC$, то $AH=BH$.

Т.к. $\angle AHB=90^\circ \Rightarrow AH^2+BH^2=AB^2=4 \Rightarrow AH=BH=\sqrt{2}$

$CH^2=64-2=62 \Rightarrow CH=\sqrt{62} \Rightarrow CD=CH+HD=\sqrt{62}+\sqrt{47}$

$HD^2=49-2=47 \Rightarrow HD=\sqrt{47}$

$\boxed{\text{Ответ: } \sqrt{62}+\sqrt{47}}$

Чистовик

№3 Вариант 20

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,13)\end{cases}$$

Из II ур. следует $\begin{cases}a^2+b^2\le 13\\ a^2+b^2\le -4a-6b\end{cases}$

$a^2+b^2+4a+6b\le 0$

$(a^2+4a+4)+(b^2+6b+9)\le 13 \Rightarrow (a+2)^2+(b+3)^2\le 13$, тогда

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 13\\ (a+2)^2+(b+3)^2\le 13\end{cases}$$

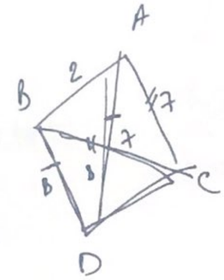
Из I следует что точка (a,b) лежит внутри окр. с центром $(0,0)$ и радиусом $\sqrt{13}$. А из II следует что точки с координатами (a,b) наход. внутри окр. с центром $(-2,-3)$ и радиусом $\sqrt{13}$.

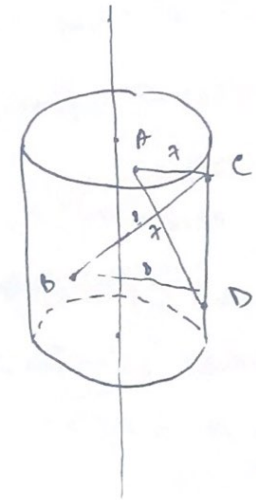
$(x-a)^2+(y-b)^2\le 13 \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\le\sqrt{13} \Rightarrow$ значит расстояние между точками с координатами (x,y) и (a,b) $\le\sqrt{13}$

Черновик

$(-4+5)\cdot(-4+10) > -20+10+25$

$1\cdot 6 > 15$



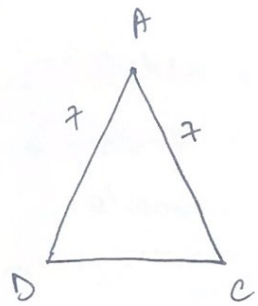


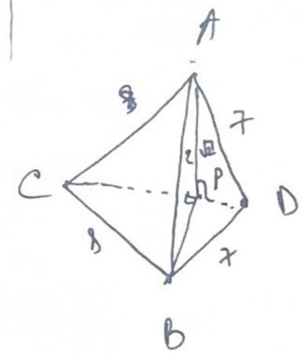
ACP
BCD

$\cancel{(x-a)^2}+(y-b)^2\le 13$

$a^2+b^2\le \cancel{\min(-4a-16}$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,13)\end{cases}$$

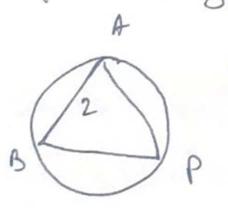




$\triangle ACD = \triangle BCD \Rightarrow P = P'$

плоскость APB ~~перпендикулярна~~ CD

$CD \parallel$ оси цилиндра $\Rightarrow$ $CD \perp$ основании и плоскость ABP пар. $\parallel$ основании



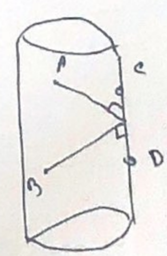
$2 = AB = 2R\sin\angle APB < 2R$

$R\ge 1 \Rightarrow R=1 \Rightarrow AB$ - диаметр $\Rightarrow \angle APB = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow AP = BP = \sqrt{2}$

$CP^2 = 64-2 \Rightarrow CP = \sqrt{62}$

$DP^2 = 49-2 \Rightarrow DP = \sqrt{47}$

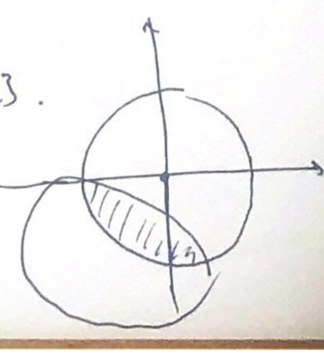


~~$a^2+b^2\le 13$~~

$a^2+b^2\le -4a-6b$

$(a+2)^2+(b+3)^2\le 13.$

$a^2+b^2\le 13$



Черновик.

$a, a+d, a+2d, a+3d$ –

$a_1, a_2, a_3,$

$\frac{a+a+4d}{2}\cdot 5=(a+2d)\cdot 5=5a+10d$

$S=5a+10d$

$(a+5)(a+10)>5a+25$

$a^2+15a+50>5a+25$

$a^2+10a+25>0$

$\cancel{D=100}$

$(a+5)^2>0$

$\begin{cases} a_6a_{11}>S+15 \\ S+39>a_8+a_9 \end{cases}$

$a_6+a_{11}+24>a_8a_9$

$(a+5d)(a+10d)+24>(a+8d)(a+8d)$

$\cancel{a^2}+\cancel{15ad}+50d^2+24>\cancel{a^2}+\cancel{15ad}+56d^2$

$24>6d^2$

$4>d^2\Rightarrow d=1$

$5a+49>(a+7)(a+8)$

$5a+48>a^2+15a+56$

$\frac{-10-\sqrt{72}}{2}=-5-\sqrt{18}=-5-3\sqrt{2}$

$-5-3\cdot1{,}4=-5-4{,}2=-9{,}2$

$a\geq-9$

$a\leq-1$

$\frac{-10+\sqrt{72}}{2}=-5+3\sqrt{2}$

$-5+3\cdot1{,}2=-5+4{,}2$

$-1<-5+3\sqrt{2}$

$(a+5d)(a+10d)>5a+10d+15$

$a^2+15ad+50d^2>5a+10d+15$

$(a+7d)(a+8d)<5a+10d+39$

$a_6a_{11}>S+15=S+39-24>a_8a_9-24$

$24+(a+5d)(a+10d)>(a+7d)(a+8d)$

$24+\cancel{a^2}+\cancel{15ad}+50d^2>\cancel{a^2}+\cancel{15ad}+56d^2$

$24>6d^2\Rightarrow d=1$

$d=2\Rightarrow 24>24\ \varnothing$

$(a+7)(a+8)<5a+49$

$a^2+15a+56<5a+49$

$a^2+10a+7<0$

$(a+5)(a+10)>5a+10d+15$

$(a+5)(a+10)>5(a+5)$

$(a+5)^2>0.$

$a^2+10a+7<0$

$D=100-28=72$

$a_1=\frac{-10+\sqrt{72}}{2}$

$a_2=\frac{-10-\sqrt{72}}{2}$

$+ \quad - \quad +$

$\frac{-10-\sqrt{72}}{2} \qquad \frac{-10+\sqrt{72}}{2}$

-10 $\quad -5-3\sqrt{2}<-10$

$5<3\sqrt{2}$

$25<18\ \varnothing$

$-5<3\sqrt{2}<-9$

$4<3\sqrt{2}$

$16<18.$

$1<-5+3\sqrt{2}$

$6 \quad 2<\sqrt{2}$

$5<3\sqrt{2}$

~~Чистовик.~~

Черновик.

Вариант 20.

№1

Пусть d - разность последовательности:

$a_1, a_1+d, a_1+2d, \dots$

Тогда:

$S = \frac{a_1+a_1+4d}{2}\cdot 5 = (a_1+2d)\cdot 5 = 5a_1+10d$

$\begin{cases} a_6 a_{11} > S+15 \\ S+39 > a_8 a_9 \end{cases} \Rightarrow a_6 a_{11} + S + 39 > S + 15 + a_8 a_9$

$(a_1+5d)(a_1+10d)+24 > (a_1+7d)(a_1+8d)$

$a_1^2+15a_1d+50d^2+24 > a_1^2+15a_1d+56d^2$

$24 > 6d^2$

$4 > d^2$, так как $d>0$, то $d=1$.

- $a_6 a_{11} > S+15$

$(a_1+5)(a_1+10) > 5a_1+10+15 = 5(a_1+5)$

$(a_1+5)^2 > 0$, верно для любого a_1.

- $S+39 > a_8 a_9$

$5a_1+10+39 > (a_1+7)(a_1+8) = a_1^2+15a_1+56$

$a_1^2+10a_1+7<0$

$t^2+10t+7<0$

$D = 100-28 = 72$

$t_1 = \frac{-10+\sqrt{72}}{2} = -5+3\sqrt{2}$

$t_2 = -5-3\sqrt{2}$

$-5-3\sqrt{2} < a_1 < -5+3\sqrt{2}$

$-10 < -5-3\sqrt{2} < -9$

$-1 < -5+3\sqrt{2} < 0$

Значит $-9 \le a_1 \le -1$

Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; \dots; -1\}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102808**

ID профиля: **334610**

Вариант 20

Чистовик

№4 Вариант 20.

$НОД(a,b,c) = 10 = 2\cdot5$

$НОК(a,b,c) = 2^{17}\cdot5^{16}$

Т.к. $НОК(a,b,c) = 2^{17}\cdot5^{16}$ и делится на каждое из a,b,c ~~то~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a = 2^{a_1}\cdot5^{a_2},\ b = 2^{b_1}\cdot5^{b_2},\ c = 2^{c_1}\cdot5^{c_2}$

Т.к. $НОД(a,b,c) = 2\cdot5$, то $\min(a_1,b_1,c_1) = 1$ и $\min(a_2,b_2,c_2) = 1$.

Т.к. $НОК(a,b,c) = 2^{17}\cdot5^{16}$, то $\max(a_1,b_1,c_1) = 17$ и $\max(a_2,b_2,c_2) = 16$

Из чисел a_1, b_1, c_1 одно равняется 1, другое равняется 17, а третье равняется k, где k может принимать значения от 1 до 17, тогда найдём ~~всевозможные упор~~ кол-во всевозможных упорядоченных комбинаций:

1) $k=1 \Rightarrow (a_1,b_1,c_1) = (1,1,17)$ – всего 3 различных комбинаций упорядоченных

2) $k=17 \Rightarrow (a_1,b_1,c_1) = (1,17,17)$ – 3 различных комбинаций упорядоченных

3) $k = 2,3,\dots,16 \Rightarrow (a_1,b_1,c_1) = (1,k,17)$ – $15\cdot3!$ – различных комбинаций упор.

Всего $3+3+15\cdot6 = 16\cdot6 = 96$

Аналогично найдём кол-во комбинаций a_2, b_2, c_2 которые равняются $1, 16, l$ где $l = 1,2,\dots,16$.

1) $l=1 \Rightarrow (a_2,b_2,c_2) = (1,1,16)$ – всего 3 комбинаций (упорядоченных)

2) $l=16 \Rightarrow (a_2,b_2,c_2) = (1,16,16)$ – всего $C_3^1=3$ комбинаций (упорядоченных)

3) $l = 2,3,\dots,15 \Rightarrow (a_2,b_2,c_2) = (1,l,16)$ – всего $14\cdot3!$ упоряд. комбинаций.

Всего $3+3+14\cdot6 = 15\cdot6 = 90$

Тогда всего трёх натуральных чисел:

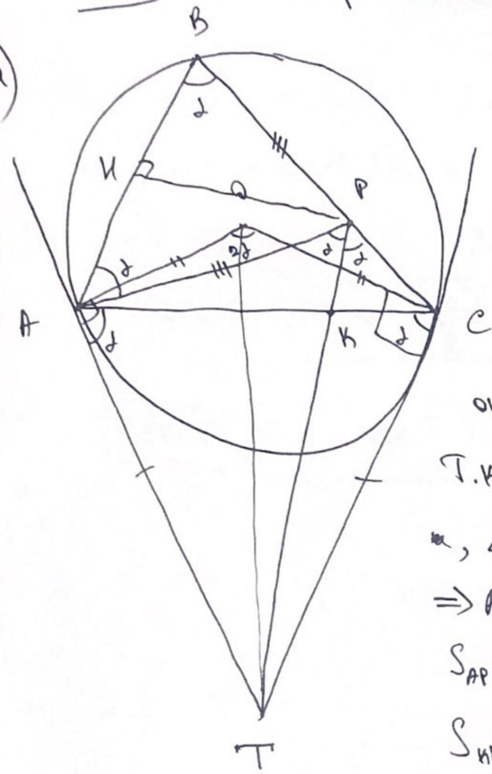
$96\cdot90 = 8640$.

$\boxed{\text{Ответ: } 8640}$

Чистовик

№6 Вариант 20.

a)



Пусть $\angle ABC=\alpha$, тогда $\angle CAT=\angle ACT=\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ATC=\pi-2\alpha$.

~~Т.к. $\angle AOC=2$~~

Т.к. O центр опис. ΔABC, то $\angle AOC=2\cdot\angle ABC=2\alpha$.
Т.к. $\angle AOC+\angle ATC=\pi$, то T лежит на опис. окр. ΔAOC, отсюда точки A,O,P,C,T - цикличны.
Т.к. A,O,P,C,T - цикличны, то $\angle APT=\angle AOT=\alpha$, $\angle TPC=\angle TOC=\alpha \Rightarrow \angle BPA=\pi-2\alpha \Rightarrow \angle BAP=\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow AP=BP$.

$$S_{APK}=\frac{AP\cdot PK\cdot\sin\alpha}{2}=10 \qquad S_{KPC}=\frac{KP\cdot CP\cdot\sin\alpha}{2}=8 \Rightarrow \frac{AP}{CP}=\frac{5}{4}\Rightarrow CP=\frac{4}{5}AP.$$

$$S_{APC}=\frac{AP\cdot\frac{4}{5}AP\cdot\sin2\alpha}{2}=18 \Rightarrow \frac{AP^2\cdot\sin2\alpha}{2}=\frac{45}{2}\ (1)$$

$$S_{ABP}=\frac{AP\cdot BP\cdot\sin2\alpha}{2},\ \text{т.к. } AP=BP, \text{ то } S_{ABP}=\frac{45}{2}\Rightarrow S_{ABC}=S_{APC}+S_{ABP}=$$
$$=18+22{,}5=40{,}5.$$

b) $\angle ABC=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2}\Rightarrow 4\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha\Rightarrow \sin\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt5}$

Т.к. ΔABC остроугольный, то $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt5}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt5}\Rightarrow\sin2\alpha=\frac{4}{5}\Rightarrow$ ~~$\cos2\alpha=\frac{3}{5}$~~

Подставим $\sin2\alpha=\frac{4}{5}$ в (1):

$AP^2\cdot\sin2\alpha=45\Rightarrow AP^2=\frac{45\cdot5}{4}\Rightarrow AP=7{,}5\Rightarrow CP=6$.

~~Используем теорему косинусов в ΔAPC~~:

~~$AC^2=AP^2+CP^2$~~ В ΔBPA опустим перпендикуляр PH, то

$\frac{BH}{BP}=\cos\alpha\Rightarrow BH=BP\cdot\cos\alpha=7{,}5\cdot\frac{2}{\sqrt5}=3\sqrt5\Rightarrow AB=6\sqrt5$

Чистовик

Используем теор косинусов в ΔABC:

$AC^2 = 36 \cdot 5 + 13,5^2 - 2 \cdot 6\sqrt{5} \cdot 13,5 \cdot \cos\alpha$.

$AC^2 = 180 + 182,25 - 27 \cdot 6\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$

$AC^2 = 362,25 - 324 = 38,25$

$AC = \sqrt{\frac{153}{4}} = \frac{\sqrt{153}}{2}$

Ответ: $S_{ABC} = 40,5$; $AC = \sqrt{38,25}$

Чистовик

№5 Вариант 20.

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$, $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$, $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

Пусть $(x-4) = \sqrt{2x-8}^{\,a}$, $5x-26 = (x-4)^{2b}$, $2x-8 = \sqrt{5x-26}^{\,c}$

Черновик

~~$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4),\ \log_{(x-4)^2}(5x-26),\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$~~

$НОД(a,b,c)=10$

$НОК(a,b,c)=2^{17}\cdot5^{16}$

$abc=2^{18}\cdot5^{17}$

WLOG: $a \vdots 2 \times 4$.

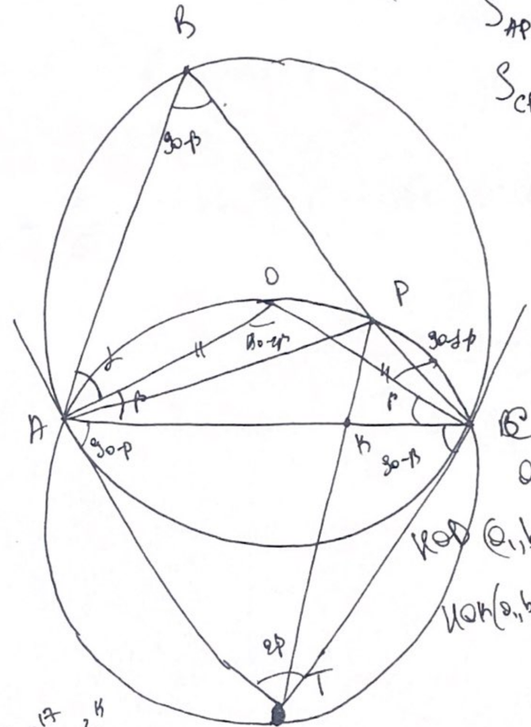
6, 5, 12   1

1, 6, 1

$5\cdot12=60$.

$S_{APK}=10$

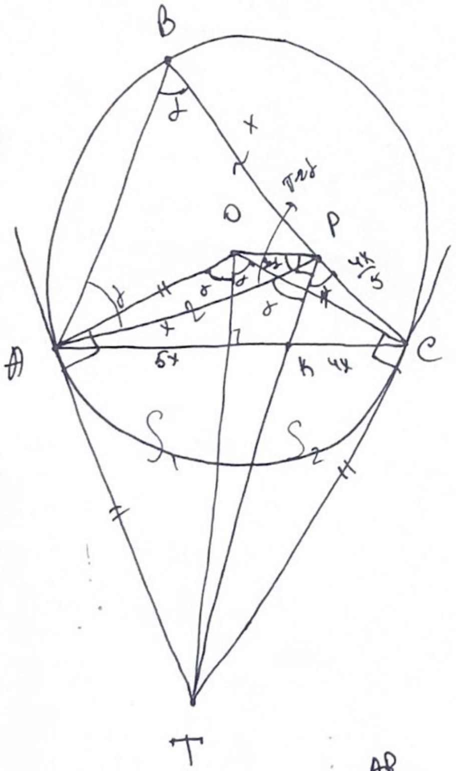
$S_{CPK}=8$.



$a=da_1$

$НОД(a_1,b_1,c_1)=d$

$НОК(a_1,b_1,c_1)=a_1b_1c_1\cdot d$



$2\ 2^{17}\ 2^k$

$5\ 5^{17}\ 5^t$

$2\ 2^{17}\ 2^{17}$

$5\ 5^{16}\ 5^{17}$

$2 \quad 5$

$2^{17} \quad 5^{16}$

$2^k \quad 5^t$

$17\geq k\geq1$

$16\geq t\geq1$

$2\cdot5^{16},\ 2^{17}\cdot5^5,\ 2^{15}\cdot5$

$72\times12=144+72\cdot10=864$

$k=1 \Rightarrow 3$

$k=17 \Rightarrow 3$

$k=2,\dots,16.$ $15\cdot6!$

$1,\dots,15$

3

3

$14!\cdot6.$

$(6+15\cdot6)\cdot(6+14\cdot6)=16\cdot6\cdot15\cdot6=36\cdot15\cdot16=$

$=72\cdot30\cdot4=72\cdot120=8640$

$\frac{AP}{PT}$

$45\times5=225$

$AP\cdot PK\sin\alpha=20$

$PC\cdot PK\cdot\sin\alpha=16$

$\frac{AP}{PC}=\frac{5}{4}$

$PC=\frac{4AP}{5}$

$5^{17},\ 5^{15},\ 2^{16}\cdot5^4,\ 2^{17}.$

$16\times6=96$, $96\times8=768$

$96\times9=864$

~~$\operatorname{arctg}\alpha=$~~

$\angle ABC=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2}$

$2\sin\alpha=\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$4\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha \Rightarrow 5\sin^2\alpha=1 \Rightarrow \sin\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt5}$

Черновик

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{4}$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{5}\cdot x^2\cdot\frac{4}{5} = 36$$

$$x^2 = \frac{9\cdot 4\cdot 5^2}{4^2} = 9\left(\frac{3\cdot 5}{2}\right)^2 \Rightarrow x = 7{,}5$$

$$\underline{x\cdot\frac{4x}{5}\cdot\sin 2\alpha = 36}$$

$$x^2\sin 2\alpha = 2t.$$

$$x^2\cdot\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{5} = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2\cdot\sin^2\alpha = 45$$

$$18 + \frac{45}{2} = \underbrace{18+22}_{40},5 = 40{,}5.$$

$$\frac{x^2\cdot\frac{4}{5}}{x} = \frac{45}{x}$$

$$x^2 = \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 2} = \left(\frac{3\cdot 5}{2}\right)$$

135

$BC = 7{,}5 + 6 = 13{,}5$

Чистовик

№4 Вариант 20.

$НОД(a,b,c) = 10 = 2\cdot5$

$НОК(a,b,c) = 2^{17}\cdot5^{16}$

Т.к. $НОК(a,b,c) = 2^{17}\cdot5^{16}$ и делится на каждое из a,b,c ~~...~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a = 2^{a_1}\cdot5^{a_2},\ b = 2^{b_1}\cdot5^{b_2},\ c = 2^{c_1}\cdot5^{c_2}$

Т.к. $НОД(a,b,c) = 2\cdot5$, то $\min(a_1,b_1,c_1) = 1$ и ~~...~~ $\min(a_2,b_2,c_2) = 1$.

Т.к. $НОК(a,b,c) = 2^{17}\cdot5^{16}$, то $\max(a_1,b_1,c_1) = 17$ и $\max(a_2,b_2,c_2) = 16$

Из чисел a_1,b_1,c_1 одно равняется 1, другое равняется 17, а третье равняется k, где k может принимать значения от 1 до 17, тогда найдём ~~всевозможные упор~~ кол-во всевозможных упорядоченных комбинаций:

1) $k=1 \Rightarrow (a_1,b_1,c_1) = (1,1,17)$ – всего 3 различных комбинаций упорядочённых

2) $k=17 \Rightarrow (a_1,b_1,c_1) = (1,17,17)$ – 3 различных комбинаций упорядоченных

3) $k=2,3,\dots,16 \Rightarrow$ ~~...~~ $(a_1,b_1,c_1) = (1,k,17)$ – $15\cdot3!$ – различных комбинаций упор.

Всего $3+3+15\cdot6 = 16\cdot6 = 96$

Аналогично найдём кол-во комбинаций ~~...~~ a_2,b_2,c_2 которые равняются $1, 16, l$ где $l = 1,2,\dots,16$.

1) $l=1 \Rightarrow (a_2,b_2,c_2) = (1,1,16)$ – всего 3 комбинаций (упорядоченных)

2) $l=16 \Rightarrow (a_2,b_2,c_2) = (1,16,16)$ – всего $C_3^1=3$ комбинаций (упорядоченных)

3) $l=2,3,\dots,15 \Rightarrow (a_2,b_2,c_2) = (1,l,16)$ – всего ~~...~~ $14\cdot3!$ упоряд. комбинаций.

Всего $3+3+14\cdot6 = 15\cdot6 =$ ~~...~~ 90

Тогда всего трёх натуральных чисел:

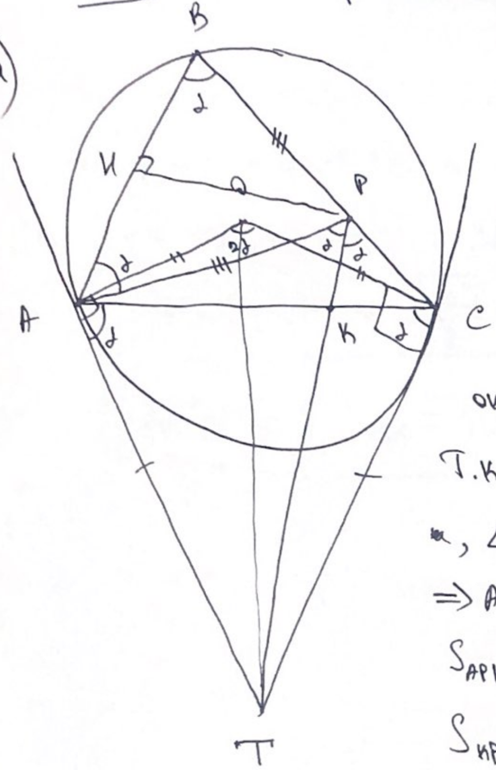
~~...~~ $96\cdot90 = 8640$.

$\boxed{\text{Ответ: } 8640}$

Чистовик

№6 Вариант 20.

а)



Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle CAT = \angle ACT = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ATC = \pi - 2\alpha$.

~~т.к. $\angle AOC = \alpha$~~

Т.к. O центр опис. $\triangle ABC$, то $\angle AOC = 2 \cdot \angle ABC = 2\alpha$.

Т.к. $\angle AOC + \angle ATC = \pi$, то T лежит на опис. окр. $\triangle AOC$, отсюда точки A, O, P, C, T - циклигны.

Т.к. A, O, P, C, T - циклигны, то $\angle APT = \angle AOT = \alpha$, $\angle TPC = \angle TOC = \alpha \Rightarrow \angle BPA = \pi - 2\alpha \Rightarrow \angle BAP = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow AP = BP$.

$S_{APK} = \frac{AP \cdot PK \cdot \sin\alpha}{2} = 10$

$S_{KPC} = \frac{KP \cdot CP \cdot \sin\alpha}{2} = 8$

$\Rightarrow \frac{AP}{CP} = \frac{5}{4} \Rightarrow CP = \frac{4}{5} AP$.

$$S_{APC} = \frac{AP \cdot \frac{4}{5} AP \cdot \sin 2\alpha}{2} = 18 \Rightarrow \frac{AP^2 \cdot \sin 2\alpha}{2} = \frac{45}{2}. \quad (1)$$

$S_{ABP} = \frac{AP \cdot BP \cdot \sin 2\alpha}{2}$, т.к. $AP = BP$, то $S_{ABP} = \frac{45}{2} \Rightarrow S_{ABC} = S_{APC} + S_{ABP} =$

$= 18 + 22{,}5 = 40{,}5$.

b) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$

$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4\sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

Т.к. $\triangle ABC$ остроугольный, то $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow$

Подставим $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$ в (1):

~~$\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{3}{5}$~~

$AP^2 \cdot \sin 2\alpha = 45 \Rightarrow AP^2 = \frac{45 \cdot 5}{4} \Rightarrow AP = 7{,}5 \Rightarrow CP = 6$.

~~Используем теорему косинусов в $\triangle APC$~~:

~~$AC^2 = AP^2 + CP^2$~~ В $\triangle BPA$ опустим перпендикуляр ~~из P~~ PH, то

$\frac{BH}{BP} = \cos\alpha \Rightarrow BH = BP \cdot \cos\alpha = 7{,}5 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} \Rightarrow AB = 6\sqrt{5}$

~~Тогда~~

Чистовик

Используем теор косинусов в ΔABC:

$AC^2 = 36 \cdot 5 + \cancel{13} 13{,}5^2 - 2 \cdot 6\sqrt{5} \cdot 13{,}5 \cdot \cos\alpha.$

$AC^2 = 180 + \cancel{182{,}25}\ 182{,}25 - 27 \cdot 6\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$

$AC^2 = 362{,}25 - 324 = 38{,}25$

$AC = \sqrt{\frac{153}{4}} = \frac{\sqrt{153}}{2}$

$\boxed{\text{Ответ: } S_{ABC} = 40{,}5 \ ;\ AC = \sqrt{38{,}25}}$

$\boxed{\text{Чистовик}}$

N5 Вариант 20.

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4),\ \log_{(x-4)^2}(5x-26),\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

Пусть $(x-4) = \sqrt{2x-8}^{a}$, $5x-26 = (x-4)^{2b}$, $2x-8 = \sqrt{5x-26}^{c}$

Черновик

~~$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4),\ \log_{(x-4)^2}(5x-26),\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$~~

НОД$(a,b,c)=10$

НОК$(a,b,c)=2^{17}\cdot 5^{16}$

$abc=2^{18}\cdot 5^{17}$

WLOG: $a \vdots 2$ $\times 4$.

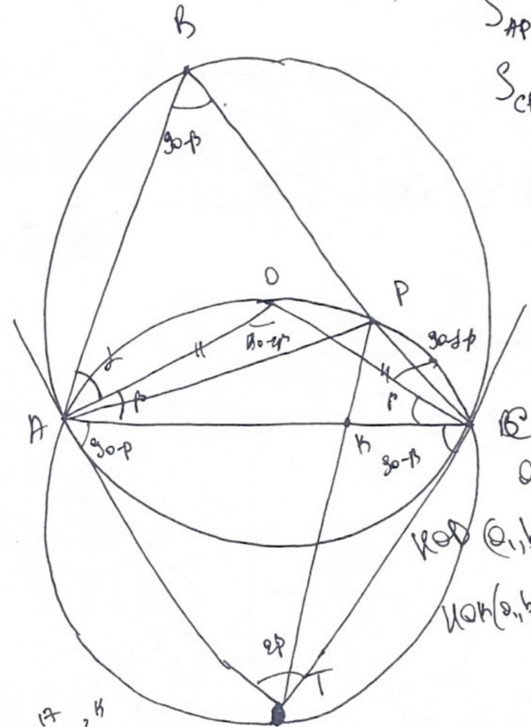
6, 5, 12 1

1, 6, 1

$5\cdot 12=60$.

$S_{APK}=10$

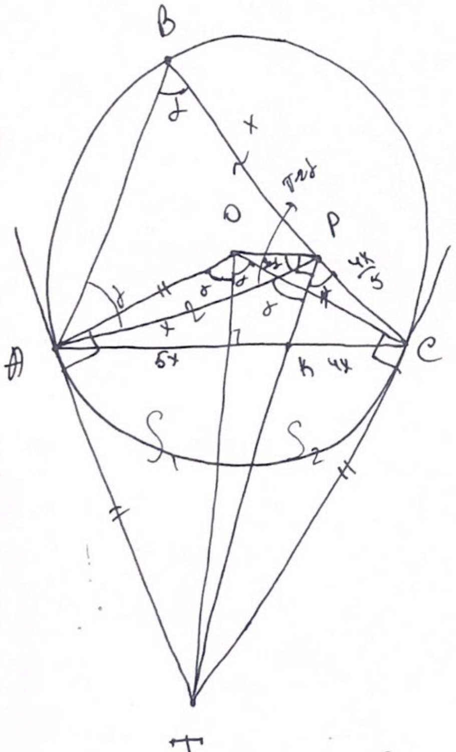
$S_{CPK}=8$.



$a=d a_1$

НОД$(a_1,b_1,c_1)=d$

НОК$(a_1,b_1,c_1)=a_1b_1c_1\cdot d$



$2\ 2^{17}\ 2^{k}$

$5\ 5^{17}\ 5^{t}$

$2\ 2^{k}\ 2^{17}$

$5\ 5^{16}\ 5^{17}$

2 5

2^{17} 5^{16}

2^{k} 5^{t}

$17\geq k\geq 1$

$16\geq t\geq 1$

$2\cdot 5^{16},\ 2^{17}\cdot 5^{5},\ 2^{15}\cdot 5$

$72\times 12=144+72=864$

$k=1 \Rightarrow 3$

$k=17 \Rightarrow 3$

$k=2,\dots,16.$ $15\cdot 6!$

$1,\dots,15$

3

3

$14!\cdot 6.$

$(6+15\cdot 6)\cdot(6+14\cdot 6)=16\cdot 6\cdot 15\cdot 6=36\cdot 150\cdot 16=$

$=72\cdot 30\cdot 4=72\cdot 120=8640$

$\frac{AP}{PT}$

$45\times 5=225$

$AP\cdot PK\sin\alpha=20$

$PC\cdot PK\cdot\sin\alpha=16$

$\frac{AP}{PC}=\frac{5}{4}$

$PC=\frac{4AP}{5}$

$5^{17},\ 5^{15},\ 2^{16}\cdot 5^{4},\ 2^{17}.$

$16\times 6=96$, $96\times 8=768$

$96\times 9=864$

~~arctg $\alpha=$~~

$\angle ABC=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2}$

$2\sin\alpha=\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$4\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha \Rightarrow 5\sin^2\alpha=1 \Rightarrow \sin\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt5}$

Черновик

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{4}$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{5}\cdot x^2\cdot\frac{4}{5} = 36$$

$$x^2 = \frac{9\cdot4\cdot5^2}{4^2} = \left(\frac{3\cdot5}{2}\right)^2 \Rightarrow x = 7{,}5$$

$$x\cdot\frac{4x}{5}\cdot\sin 2\alpha = 36$$

$$x^2\sin 2\alpha = 2t.$$

$$x^2\cdot\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{5} = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2\cdot\sin^2\alpha = 45$$

$$18+\frac{45}{2} = \underbrace{18+22}_{40}{,}5 = 40{,}5.$$

$$\frac{x^2\cdot\frac{4}{5}}{\cancel{x}} = \frac{45}{\cancel{x}}$$

$$x^2 = \frac{3\cdot3\cdot5\cdot5}{2\cdot2} = \left(\frac{3\cdot5}{2}\right)$$

135

$BC = 7{,}5 + 6 = 13{,}5$