Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102642**

ID профиля: **852222**

Вариант 20

Чистовик

① $S = \frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5 = (a_1+2q)5$

$a_6 a_{11} = (a_1+5q)(a_1+10q) > S+15$ (1)

$a_8 a_9 = (a_1+7q)(a_1+8q) < S+39$ (2)

(1) $\Rightarrow -(a_1+5q)(a_1+10q) < -S-15$ (3)

(2)+(3): $\cancel{a_1^2} - \cancel{a_1^2} + \cancel{15a_1q} - \cancel{15a_1q} + 56q^2 - 50q^2 < 24$

$6q^2 < 24$

$q^2 < 4$

$\boxed{q < 2}$

Но по условию $\boxed{q > 0}$, и при этом $\boxed{q - \text{целое}}$,

(иначе $a_2 = a_1 + q$ — было бы не целое. прот.)

Значит $q = 1$

(2) и (1): $\begin{cases} (a_1+5)(a_1+10) > S+15 = (a_1+2)5+15 \\ (a_1+7)(a_1+8) < (a_1+2)5+39 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 15a + 50 > 5a_1 + 25 \\ a_1^2 + 15a + 56 < 5a_1 + 49 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 10a + 25 > 0 \quad (4) \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \quad (5) \end{cases}$

(4): $(a_1+5)^2 > 0$ — верно для любого $\boxed{a_1 \neq -5}$

(5): $a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

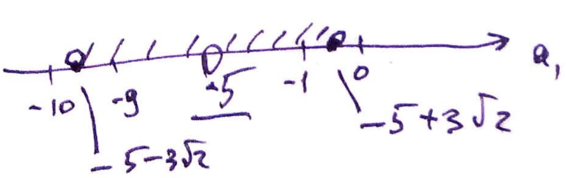
$\frac{D}{4} = 25 - 7 = 18$

$a_1 = -5 \pm 3\sqrt{2}$

$4 < 3\sqrt{2} < 5$

$-1 < -5 + 3\sqrt{2} < 0$

$-10 < -5 - 3\sqrt{2} < -9$

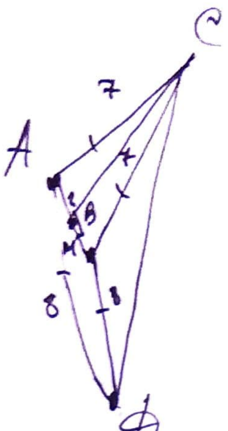


$a_1 \in [-9; -1] \setminus \{-5\}$

Ответ: $[-9; -1] \setminus \{-5\}$

Чистовик

(2)



Заметим, что ребро AB не может быть парал-но оси цилиндра т.к тогда $AB \parallel CD$ и тетр-др лежит в одной плоскости.

Значит проекция AB на основание цил-дра — это хорда. А т.к диаметр всегда ~~меньше~~ больше либо равен хорде, то

$2R \geq AB$

$R \geq \frac{AB}{2} = 1$

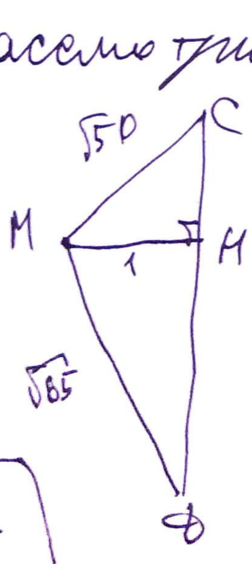
Наименьшее значение радиуса $R = 1$, достигается, когда AB — проецируется в диаметр.

~~Проекция CD на пл. (ABC) — это сер. пер. => т.к AC = BC и AD = BD она ⊥ AB~~

Пусть M — сер AB, тогда $MD \perp AB$ и $MC \perp AB$ т.к (MD и MC — мед в равноб △) но CD проецируется в CM на пл. (ABC)

Значит $AB \perp CD$

Рассмотрим $\triangle MCD$: 1) MH — высота и радиус т.к M — сер. диам. т.е центр $\Rightarrow MH = 1$



2) $MC = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$ (из прям △MCB)

3) $MD = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$ (из прям △MBD)

4) $CH = \sqrt{50-1} = 7$ (из прям △HCM)

5) $HD = \sqrt{65-1} = 8$ (из прям △HMD)

$CD = CH + HD = 7 + 8 = 15$

Ответ: 15

Чистовик

3) $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;13) & (2) \end{cases}$

Рассмотрим выражение (2)

1) При $-4a-6b \geq 13$ (3), оно примет вид:

$a^2+b^2 \le 13$ (4)

~~Из (3):~~ $6b \le -4a-13$

$b \le -\frac{2a}{3}-\frac{13}{6} = -\frac{1}{6}(4a+13)$

$b^2 \le \frac{1}{36}(16a+169+2\cdot4\cdot13a)$

~~подставляя в (4) и домножая обе части нер-ва на 36:~~

$(36+16)a^2+2\cdot4\cdot13a+169 \le 13\cdot36 \quad |:13$

$4a^2+8a+13 \le 36$

$4a^2+8a-23 \le 0$

$\frac{D}{4} = 16+4\cdot23$

Заметим, что график (4) – это круг (в Oab) с центром в т. $(0;0)$ и $R=\sqrt{13}$,

а гр. (3) – это область, которая лежит ниже

пр. $b = -\frac{2}{3}a - \frac{13}{6}$

Это значит, что решение системы из нер (3) и (4) может лежать только в круге (4)

2) При $-4a-6b < 13$ (5), нер-во (2) примет вид:

$a^2+b^2 \le -4a-6b$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$ (6)

гр. (6) – круг с центром в т. $O'(-2;-3)$ и $R=\sqrt{13}$

Черновик

$a_i \in \mathbb{Z}$

$a_1 \ldots a_5$

S

$S = \frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5 = \frac{2a_1+4q}{2}\cdot 5 = (a_1+2q)\cdot 5$

$a_6 a_{11} > S+15$

$a_9 a_8 < S+39$

$a_6 = a_1+5q < a_1+20$

$a_{11} = a_1+10q < a_1+40$

$a_9 = a_1+8q < a_1+32$

$a_8 = a_1+7q < a_1+28$

$a_1 - ?$

$q \in \mathbb{Z}$? V

$$\begin{cases}(a_1+5q)(a_1+10q) > 5a_1+10q+15\\ (a_1+8q)(a_1+7q) < 5a_1+10q+39\end{cases}$$

(1) − (2) − ?

$5+10 = 7+8$

оценка

$(2)-(1): \cancel{a_1^2 - a_1^2} + \cancel{15a_1q - 15a_1q} + 56q - 50q < 39-15 = 24$

$6q < 24$

$0 < q < 4$!

$a_6 a_{11}$

$a_9 a_8 < (a_1+32)(a_1+28)$

$S = 5a_1+10q < 5a_1+40$

$S+15 < a_6 a_{11} < (a_1+20)(a_1+40)$

$5a_1+10q+15 < 5a_1+55$

$q=1: (a_1+5)(a_1+10) > 5a+25$

$a_1^2+15a_1+50 > 5a+25$

$a_1^2+10a_1+25 > 0$

$(a+5)^2 > 0$

$\cancel{a_1 = -5}$

a_1 − люб

$a_1^2 + 15a_1q + 56q^2 < 5a_1+10q+39$

49

$a_1^2+10a_1+7 < 0$

$(a_1+5)^2 - 18 < 0$

$-\begin{array}{r}56\\49\\ \hline 7\end{array}$

q − 6 <

$\frac{D}{4} = 25-7 = 18 = 9\cdot 2$

$4 < \sqrt{18} < 5$

$a_1 = -5 \pm 3\sqrt{2}$

$-1 < -5+3\sqrt{2} < 0$

$-10 < -5-3\sqrt{2} < -9$

1

Черновик

③ M - ф $(x;y)$ $\exists\, a, b$:

S_M - ?

$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b;\ 13) \end{cases}$

← круг

← без пар

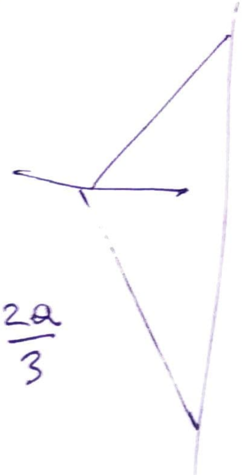
мб круг (часть) ?

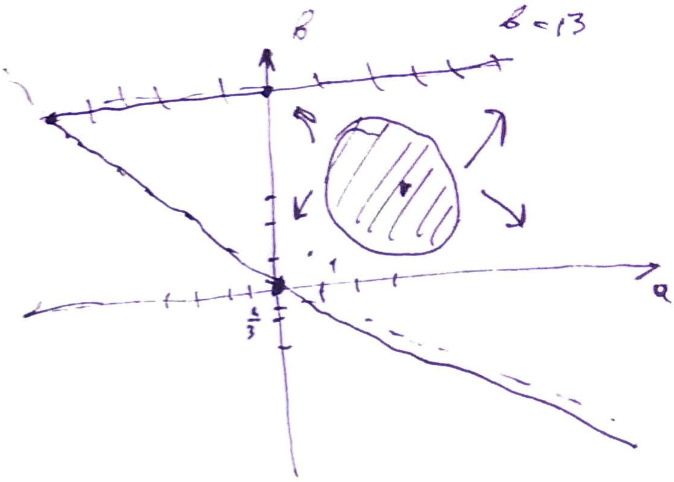
не гр

Граф метод

$x;y$ - пар

a,b - пер.





$-4a-6b=0$

$b = -\frac{4a}{6} = -\frac{2a}{3}$

$a=0;\ b=13$

$-4a-6b \underset{\le}{=} 13$

$b = -\frac{2a}{3} - 13$

$\max(b) - \sqrt{13}$

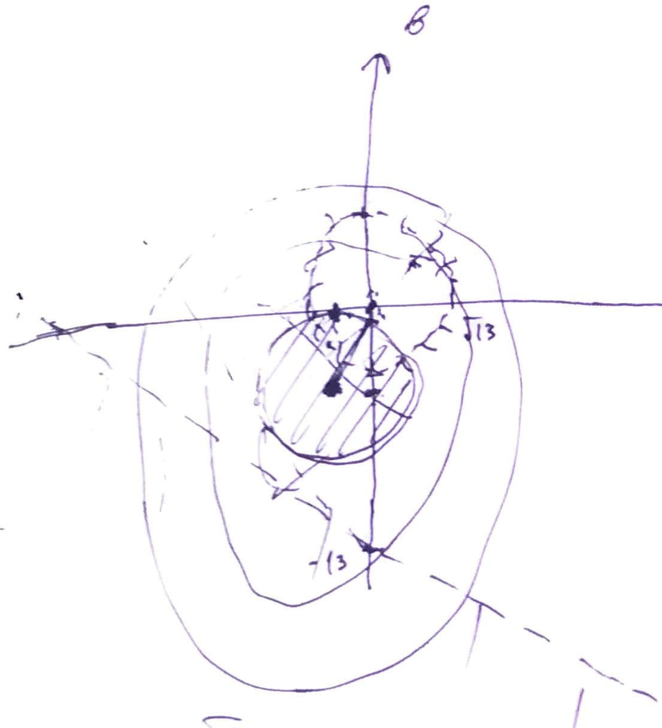
1) $b \ge -\frac{2a}{3} - 13$:

$a^2+b^2 \le -4a-6b$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le +4+9 = 13$

2) $b < -\frac{2a}{3} - 13$:

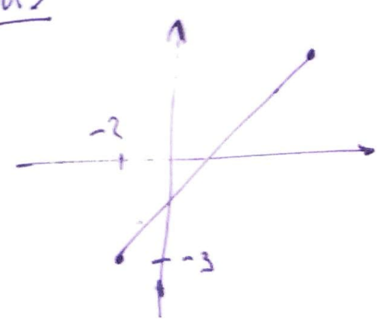
$a^2+b^2 < 13 = (\sqrt{13})^2$



$x = -2$

$R = 3\sqrt{13}$

$S = \pi R^2 = \pi\, 9 \cdot 13$



$b \le -\frac{2a}{3} - \frac{13}{6}$

$a^2 + \frac{4}{9}a^2 + \frac{169}{36} - \frac{4\cdot 13}{36}a \le 13 \quad | \cdot 9 : 13$

$\cancel{13a^2} + a^2 - 12a - 12 \le 0$

$52 \,|\, \frac{13}{4}$

$36 - 13 = 23$

②

Черновик

$a^2 - \cancel{12}a + \frac{13}{\cancel{14}} \le 1$

$a^2 - \frac{\cancel{12}}{2}a + \frac{9}{4} \le 0 \quad |\cdot 4$

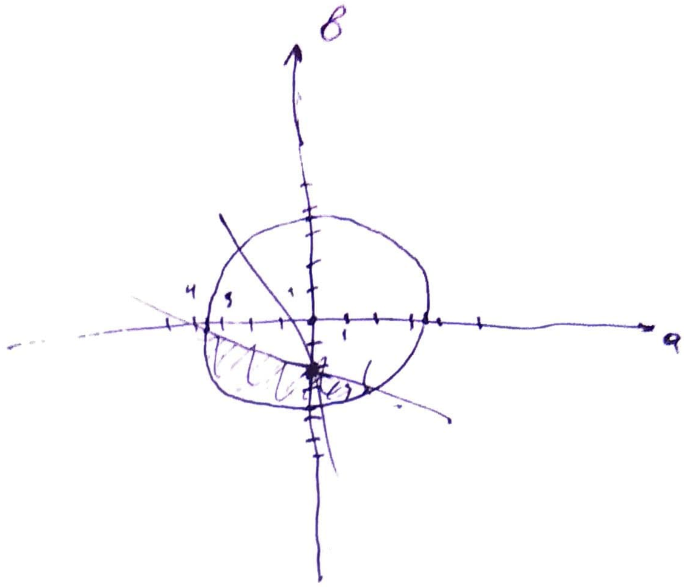
$a^2 - 2a$

$4(a^2 + 2a + 1) - 27 \le 0$

$4(a^2 - 1)^2 - 27 < 0$

$|a^2 - 1| \le \frac{27}{4}$

$< a <$



$b = \frac{2a}{3} - \frac{13}{6}$

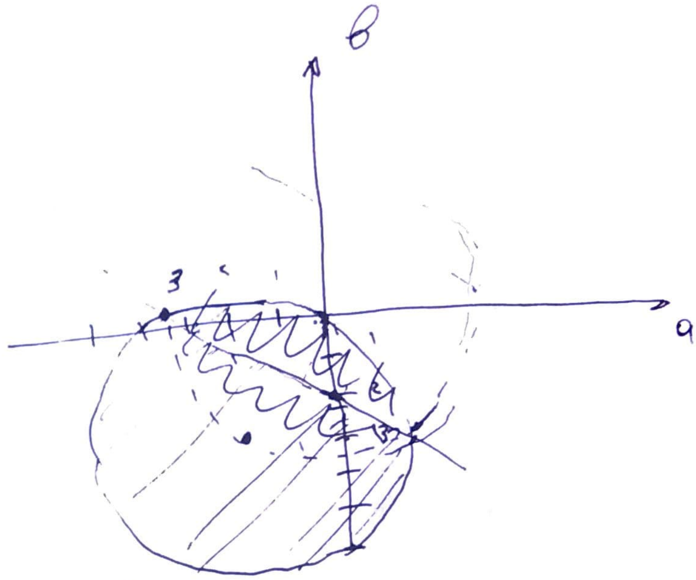
$a = 0$

$-4a - 6b \ge 13$

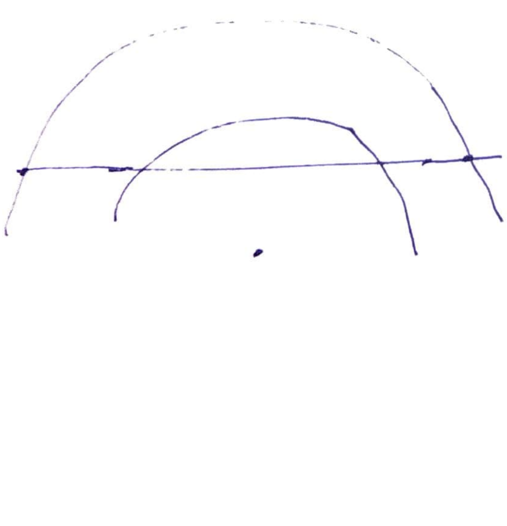
$6b \le -4a + 13$

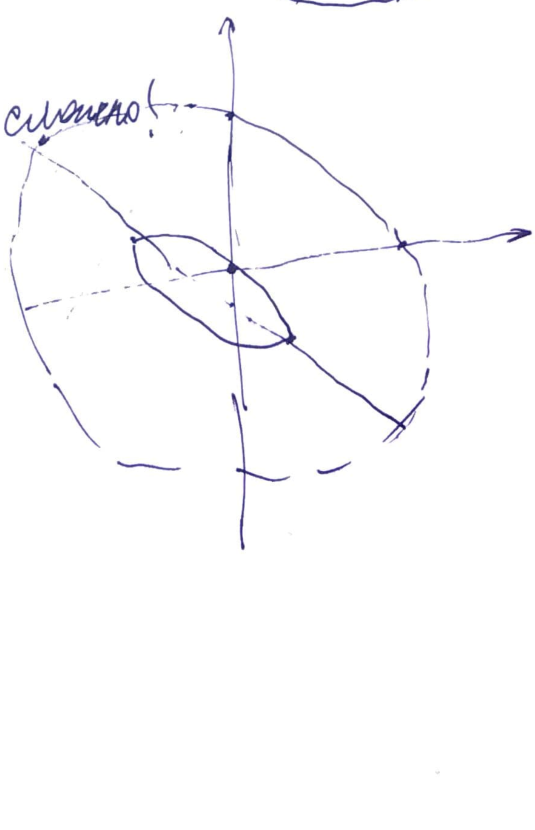
$-4a - 6b < 13$

$6b > -4a + 13$



не может быть так сложно!



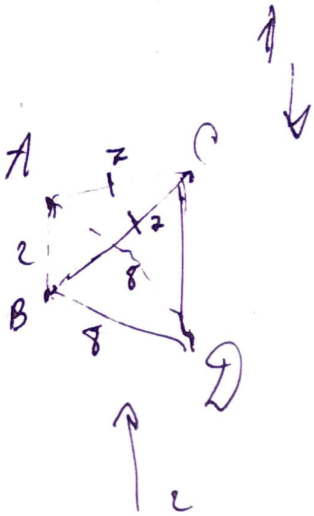


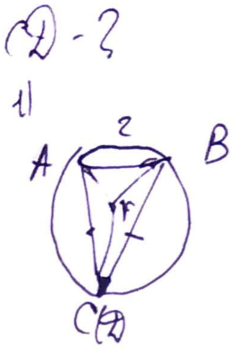
Черновик

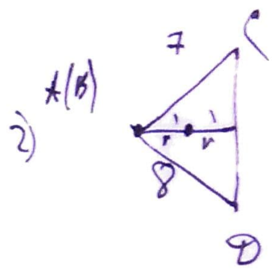
$$\begin{cases} x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 \le 13 \\ a^2 + b^2 \le \min(-4a - 6b;\ 13) \end{cases} +$$

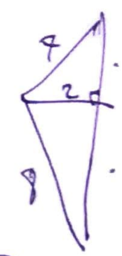
$$x^2 - 2ax + y^2 - 2yb +$$

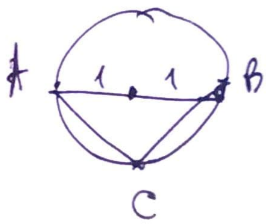
2





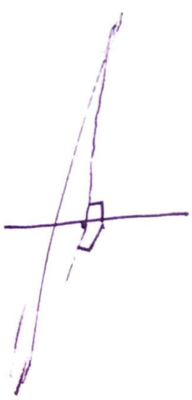






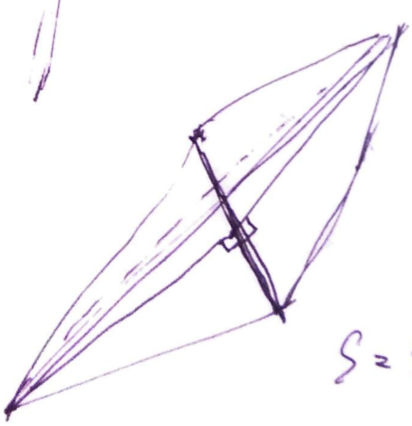
$\sqrt{49+4} + \sqrt{4+64}$

$\sqrt{53} + \sqrt{68}$



$-9 \quad -8 \quad -7 \quad -6 \quad -5$

$S =$



$S = 5$

$6 \cdot 7 = 42 < 5 + 39 = 44$

$-1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \ .. \ 3$

$4 \cdot 9 = 36 > 5 + 15$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102642**

ID профиля: **852222**

Вариант 20

Чистовик

④ $\begin{cases} НОД(a,b,c) = 2\cdot 5 & (1) \\ НОК(a,b,c) = 2^{17}\cdot 5^{16} & (2) \end{cases}$

числа a, b, c состоят только из простых множителей 2 и 5 (т.к иначе в ~~...~~ разложении НОКа на простые множители присутствовали бы ~~...~~ простые множители отличные от 2 и 5)

Пусть $a = 2^{\alpha}\cdot 5^{x}$ где $x,y,z \in \mathbb{N}$

$b = 2^{\beta}\cdot 5^{y}$ $\quad 1 \le x,y,z \le 16$

$c = 2^{\gamma}\cdot 5^{z}$ $\quad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{N}$

$1 \le \alpha,\beta,\gamma \le 17$

(1) и (2) $\overset{\text{(по опред.)}}{\Rightarrow}$

$\begin{rcases} \min(\alpha,\beta,\gamma) = 1 \\ \max(\alpha,\beta,\gamma) = 17 \end{rcases} (3)$

$\begin{rcases} \min(x;y;z) = 1 \\ \max(x;y;z) = 16 \end{rcases} (4)$

Посчитаем кол-во ~~пар~~ троек (α,β,γ) удовлет. усл (3):

Для ~~...~~ начало выберем число отличное от max и min (15 спб) и поставим его на одно из трех мест (3 спб), затем выберем место для max (2 спб) и на последнее место поставим ~~...~~ min

~~...~~ Воспользовавшись правилом умножения:

$15\cdot 3\cdot 2 = 15\cdot 6 = 90$ способов

Но надо учесть еще случаи, когда третье число совпадает с max или min. Всего 6 ~~...~~:

(max; min; min); (min; max; min); (min; ~~max~~ min; max)

(min; max; max); (max; min; max) и (max; max; min)

Итого кол-во троек $(\alpha;\beta;\gamma) = 90+6 = \boxed{96}$

Кол-во троек $(x; y; z)$ считается аналогично

(только способов выбрать число отличное от max и min будет 14)

Всего: $14 \cdot \underbrace{3 \cdot 2}_{6} + 6 = 15 \cdot 6 = \boxed{90}$

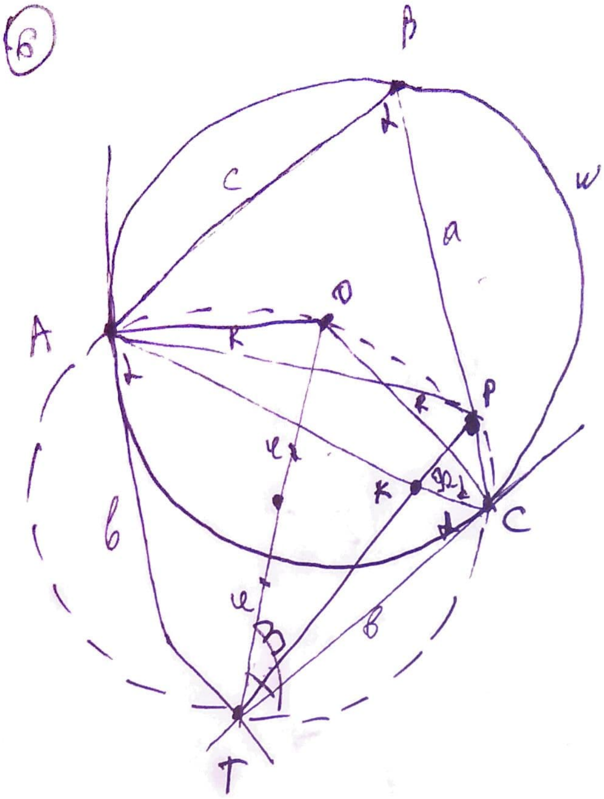
Каждому решению исходной системы будет соответствовать пара троек $(\alpha; \beta; \delta)$ и $(x; y; z)$, значит по правилу умножения кол-в троек $(a; b; c)$ будет равно:

$90 \cdot 96 = 8640$

Ответ: 8640

Чистовик

⑥



Дано: AT и TC - касат

$S_{APK} = 10$

$S_{PKC} = 8$

Найти: а) S_{ABC}

б) AC - ?

$\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

Решение:

а) 1) Пусть угол $\angle ABC = \alpha$

тогда $\angle AOC = 2\alpha$ (как центр)

2) Тк. AT - кас, то ~~∠ATC~~ $\angle TAC = \angle ABC = \alpha$ (по свойству угла между кас. и хордой)

аналогично $\angle ACT = \angle ABC = \alpha$

Рассмотрим 4-уг AOCT: $\angle AOC = 2\alpha$

$\angle ATC = 180° - 2\alpha$

значит AOCT - вписанный, а значит т. T лежит на окр опис около $\triangle AOC$

3) $\angle TPC = \angle TAC = \alpha$ (как опир на равные дуги)

4) Рассмотрим пр. AB и TP и сек. BC:

$\angle APC = \angle TPC = \alpha \Rightarrow AB \parallel TP$ и по Т Фалеса:

~~$\frac{BP}{PC} = \frac{AK}{KC}$~~ $\frac{PC}{BC} = \frac{KC}{AC}$

5) $S_{\triangle ABC} = \frac{S_{\triangle APC} \cdot BC}{PC} = \frac{S_{\triangle APC} \cdot AC}{KC} = \frac{S_{\triangle APC} \cdot S_{\triangle APC}}{S_{\triangle KPC}} =$

$= \frac{(S_{\triangle APK} + S_{\triangle PKC})^2}{S_{\triangle PKC}} = \frac{(10+8)^2}{8} = \frac{(9 \cdot 2)^2}{8} = \boxed{\frac{81}{2}}$

~~8~~ Чистовик

$$R^2 = \frac{24^2}{\sqrt{5}}$$

Чистовик

(5) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$ (1)

$\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x-4>0 \\ x>\frac{26}{5} \\ x\neq\frac{27}{5} \\ x\neq 3;5 \\ x\neq\frac{9}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x>\frac{26}{5} \\ x\neq\frac{27}{5} \end{cases}$$

Заметим, что на ОДЗ:

(1) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\log_{(x-4)}2+1}$

и $x-4>1$ $\Rightarrow$ $\log_{(x-4)}2 > 1 \Rightarrow (1) < \frac{1}{4}$

Пусть (1) - это третье число из условия, тогда:

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)+1 =$

$= \log_{(x-4)^2}(x^2-3x-10) = \log_{(x-4)^2}\left((x+2)(x-5)\right)$

Черновик

(14) кол-во (a, b, c):

$$\begin{cases} НОД(a, b, c) = 2 \cdot 5 \\ НОК(a; b; c) = 2^{17} \cdot 5^{16} \end{cases}$$

2	5
α	α'
β	β'
γ	γ'

$\boxed{\min(\alpha; \beta; \gamma) = 1}$

$\min(\alpha'; \beta'; \gamma') = 1$

$\boxed{\max(\alpha; \beta; \gamma) = 17}$

$\max(\alpha'; \beta'; \gamma') = 16$

$\alpha \geq \beta \geq \gamma$?

$\alpha' \geq \beta' \geq \gamma'$

x x'

$\underline{1}\ \underline{1}\ \underline{17}$

$1 \cdot 17$ (1–17)

1 – 2 – 2 ч.

1 – 17 – 17 ч.

1 16 1 – 16

16

16 · 1 · 1

$\underline{17} \cdot \underline{1} \cdot \underline{1}$ $\underline{19}$

$a \geq b \geq c$, а потом · 6 учесть $a = b$

~~17~~ · 15 · 3 · 2 + 11 · 17 (3)

~~19~~

+ 1 17 17 (3) =

$= \underline{15 \cdot 3 \cdot 2 + 3 + 3}$

96 способов выбрать степени двойки

$14 \cdot \underbrace{3 \cdot 2}_{6} + \underbrace{3 + 3}_{6} = (28 + 2)3 = 90$ – сп ~~выбр~~. степени 5"

$15 \cdot 6 = 90$

$90 \cdot \cancel{9}\,96 =$

$$\begin{array}{r} \times\ 96 \\ 9 \\ \hline 5 \\ \hline 8640 \end{array}$$

8640

$96 \cdot 90 = 9600 - 960 =$

$= \ldots$ 0

$$\begin{array}{r} 9600 \\ -\ 960 \\ \hline 8640 \end{array}$$

1

5) $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$ ← x∈T?
$\log_{(x-4)^2}(5x-26)$) 1   x - ?
$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$.

два равны
третье > 1

все решаются

ОДЗ:
$x > 4$
$x > \frac{26}{5}$
$5x \neq 27$
$x \neq \frac{27}{5}$
$x \neq 3$
$x \neq 37$

упражн.-ном

$\frac{1}{2}\log_{2(x-4)}(x-4) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_{(x-4)} 2(x-4)} = \frac{1}{2},\ 1 > \frac{1}{2} \mid < 1$

$\log_{(x-4)} 2 + 1$
$\log_{(x-4)} > 1$

~~x-4~~
$x > \frac{26}{5}$
$x-4 > \frac{28}{5} - \frac{20}{5} = \frac{8}{5} > 1$

1)
$2\log_{(x-4)}(5x-26) = \frac{1}{2}\log_{2x-8}(x-4) = \frac{1}{2(\log_{(x-4)}2+1)}$

$\log_2$

$2x-8 \neq 1$
$2x \neq 9$
$x \neq \frac{9}{2} > 1$

~~x=2~~
$x = 8$
$x = 12$
$60-26 = 34$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)+1 \cup \frac{1}{4}$

$x^2+16-8x+5x-26 = x^2-3x-10 = 0$

$D = 9+40 = 49$ $(x+2)(x-5) > 0$

$(x-5)(x+2) \vee \sqrt{x-4}$

⑥ черновик

перекинуть тему

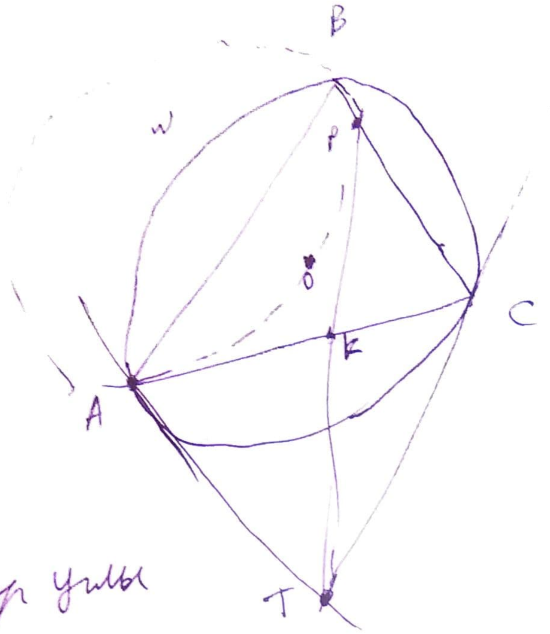
$S_{APK} = 10$

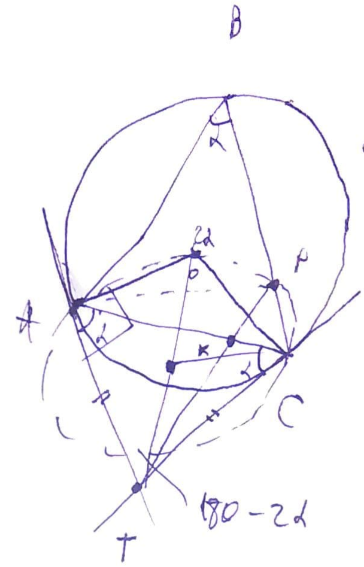
$S_{CPK} = 8$

$S_{ABC} - ?$

T ∈ Ω?

сим окр.?





Кас → ... углы

↘ ~~сек~~ кас ∧ хорда

T ∈ Ω

$S \to \frac{1}{2}ah$

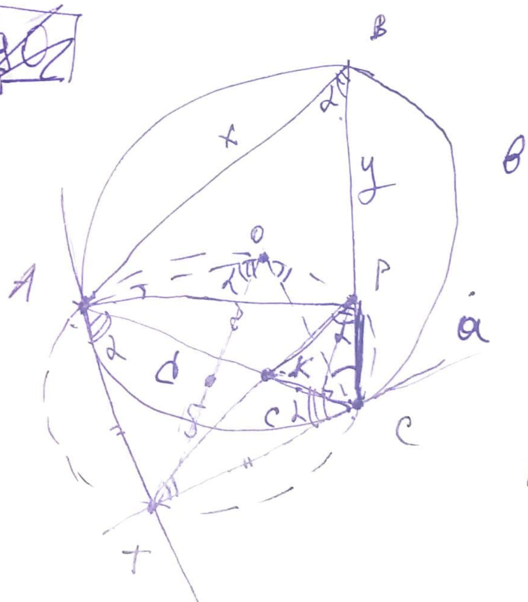
$\to \frac{1}{2}ab\sin\alpha - \frac{1}{2}$

$\boxed{ab} = 4 \cdot \frac{81}{2} = \cancel{\boxed{90}}$

$\boxed{162}$

$\frac{5}{4} = \frac{10}{8} = \frac{AK}{AC}$

$S_{ABC} = 18$



PK ∥ AB - ?

✓

б) ∠ABC = arctg $\frac{1}{2}$ = α

AC - ?

AC = 2R sin α

BP · PC =

$\frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{BP}{PC} = \frac{5}{4}$

$S_{ABC} = \frac{5}{4} \cdot \cancel{18} = \frac{81}{2}$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \; / +1$

$\frac{a+b}{b} =$

$\frac{AC}{KC} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$

③

$\frac{81}{\cancel{2}} = \frac{1}{\cancel{2}} ac \sin(\operatorname{arctg}\frac{1}{2})$ $= \frac{1}{5}$

$ac = 81 \cdot 5$

$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ac\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\angle ATP = 180° - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} =$

$\cos(90 - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}) =$

$= \sin\alpha$

$\cos\gamma = \cancel{\sin\alpha = \frac{2R}{d} = \frac{R}{4}}$

$\cos\gamma = \sin\alpha = \frac{b}{24} = \frac{b}{d}$

$\sin\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\gamma} =$

$= \frac{R}{d} = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$

$d = \frac{25R}{24}$

$R^2 = \frac{625 R^2}{576}\cos\alpha$ $\frac{4}{5}$

$24 \cdot 6$ 125

$24 \cdot 6 = 144$

$144 - 125 = 19$

$19R^2 = \cancel{d}$

$24 \cdot 6$

$R = \sqrt{\frac{24 \cdot 6}{19}}$

$s^2 + c^2 = 1 \quad | : c$

$t^2 + 1 = \frac{1}{c^2} = \frac{1}{1-s^2}$

$1 - s^2 = \frac{1}{t^2+1}$

$s^2 = 1 - \frac{1}{t^2+1} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{4}+1} =$

$= 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$\cancel{c^2 = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}}$

$\cancel{c^2 = \frac{1}{t^2+4} = \frac{1}{}}$

$c^2 = \frac{4}{5}$

$R^2 + b^2 = d^2$

$\frac{b}{\sin\alpha} = d$

$R^2 = d^2 - b^2 =$

$= d^2 - d^2\sin^2\alpha =$

$d^2\cos\alpha =$

$\cancel{\cos\alpha = \frac{2R}{d}} \Rightarrow \cancel{d = \frac{2R}{\cos\alpha}}$

$\cancel{R^2 = 4R^2}$

$R^2 = d^2\cos\alpha =$

$R^2 = 4^2\cos\alpha$

$AC = 2\sqrt{\frac{24 \cdot 6}{9} \cdot \frac{1}{5}}$

4