Часть 1

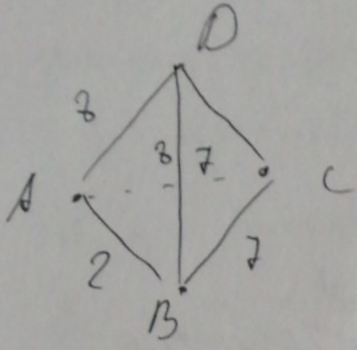
Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102626**

ID профиля: **281868**

Вариант 20

Черновик



$\frac{2}{\sin\alpha}$ $\angle = 90°$

$\sqrt{49-2} = \sqrt{47}$

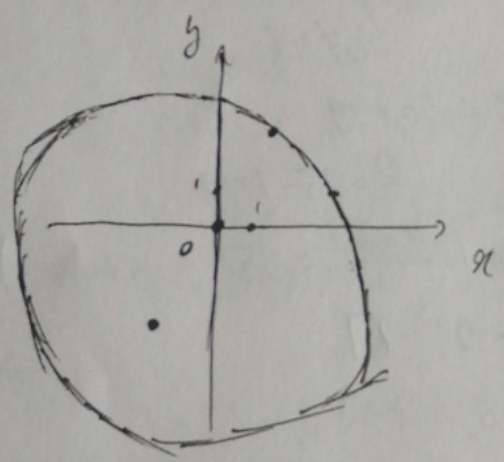
$\sqrt{64-2} = \sqrt{62}$

$\sqrt{62} \pm \sqrt{47}$

$a^2+b^2 \leq 13$ $a^2+b^2 \leq 13$

$a^2+b^2 \leq -4a-6b$ $(a+2)^2+(b+3)^2 \leq 13$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 13$



21102626 (U281868 M1299071)

Черновик

$a_i = a_1 + (i-1)b$

$(a_1+5b)(a_1+10b) = a_1^2 + 15a_1b + 50b^2 > 5a_1 + 10b + 15$

$(a_1+7b)(a_1+8b) = a_1^2 + 15a_1b + 56b^2 < 5a_1 + 10b + 39$

$\cancel{a_1^2 + 15a_1b + 50b^2 + 5a_1 + 10b + 39} > a_1^2 + 15a_1b + 56b^2 + 5a_1 + 10b + 15$

$b^2 < 4$

$b < 2$

$b = 1$

$(a_1+5)(a_1+10) = a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 25$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1+5)^2 > 0 \qquad a_1 \neq -5$

$(a_1+7b)(a_1+8b) = a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 49$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \qquad \frac{D}{4} = 25 - 7 = 18$

$a_1 \in (-5-\sqrt{18}; -5+\sqrt{18})$

$a_1 \in [-9; -1]$

$-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

$(-1)+0+1+2+3$

$5+39=44$

$6 \cdot 7 = 42$

$81 - 135 + 50 > -20 \qquad 81 - 135 + 56 < 4$

$-4 > -20 \qquad 2 < 4$

$1 - 15 + 50 > 20 \qquad 1 - 15 + 56 < 44$

$36 > 20$

✓

Чистовик   Вар. 20   з.1   кл. 11

1

формула арифметической прогрессии

$a_i = a_1 + (i-1)b$

$a_6 \cdot a_{11} = (a_1+5b)(a_1+10b) = a_1^2 + 15a_1 b + 50b^2 > 5a_1 + 10b + 15$

$a_8 \cdot a_9 = a_1^2 + 15a_1 b + 56b^2 < 5a_1 + 10b + 39$

$6b^2 < 24$

$b^2 < 4$ ф. возр. $\rightarrow b > 0$

$0 < b < 2$ состоит из целых чисел $\rightarrow b \in \mathbb{Z}$

$b = 1$

$a_i = a_1 + i - 1$

$a_6 \cdot a_{11} = a_1^2 + 15a_1 + 50 > 5a_1 + 25$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1+5)^2 > 0$ $a_1 \neq -5$

$a_8 \cdot a_9 = a_1^2 + 15a_1 + 56 < 5a_1 + 49$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$ $\frac{D}{4} = 25 - 7 = 18$

$a_1 \in (-5-\sqrt{18}; -5+\sqrt{18})$

$a_1 \in [-9; -1]$

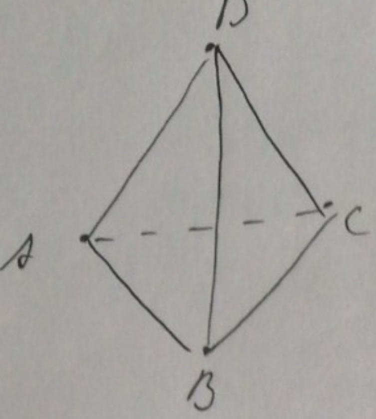
$a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $\{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

1

21102626 (U281868 M1299071)

Чистовик   вар. 20   з.1   кл. 11



№2

$AB=2$
$AD=BD=8$
$AC=BC=7$

проведём плоскость $\perp DC$, проходящую через AB

(такая есть; $\triangle ACD=\triangle BCD$ (по 3-ём сторонам), проведём высоты к AB из D и C, т.к. $\triangle ADB$ и $\triangle ACB$ – р/б, то они пройдут через сер. AB, т.е. одну точку M; относительно плоскости MDC, A симметрична B, значит, AB ей перпендикулярна, ей принадлежит CD $\to$ $AB\perp CD$)

заметим, что плоскость этого сечения параллельна основаниям цилиндра $\to$ эта плоскость отсекает у цилиндра окружность, радиус которой равен радиусу цилиндра

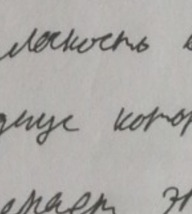
пусть DC пересекает эту плоскость в точке K, тогда

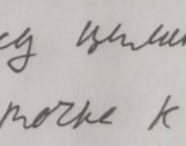
$\angle AKB=\alpha$ $2R=\dfrac{AB}{\sin\alpha}$

откуда R_{min} при $\alpha=90^\circ$

$\triangle ACD=\triangle BCD$ (по 3-ём сторонам), значит, их высоты равны, а из доказанного, перпендикулярны и $\to$
$\to$ они $=\sqrt{2}$

$\triangle BCD$

1) 

2) 

(2)

$DC=\sqrt{64-2}+\sqrt{49-2}=\sqrt{62}+\sqrt{47}$ $DC=\sqrt{62}-\sqrt{47}$

Ответ: $\sqrt{62}\pm\sqrt{47}$

Гистовин Вар. 20 г.1 кл.11

№3

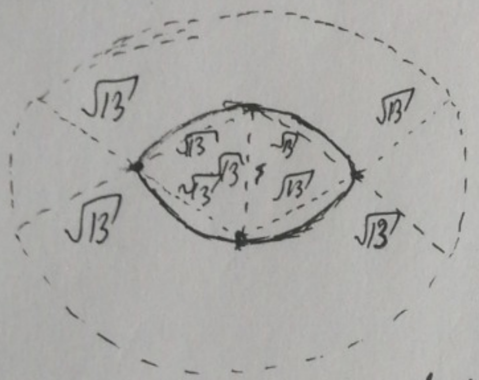
$a^2+b^2 \le \min(-4a-6b; 13)$

$\begin{cases} a^2+b^2 \le 13 \\ a^2+b^2 \le -4a-6b \Rightarrow (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13 \end{cases}$ $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

т.е. множество точек a и b — пересечение 2-ух кругов радиусе которых $= \sqrt{13}$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$

объединение всех окружностей радиуса $\sqrt{13}$ с центром в координатах $(a;b)$



на чертеже показаны формы этих 2-ух фигур (множество точек $(a;b)$ и множество точек $(x;y)$)

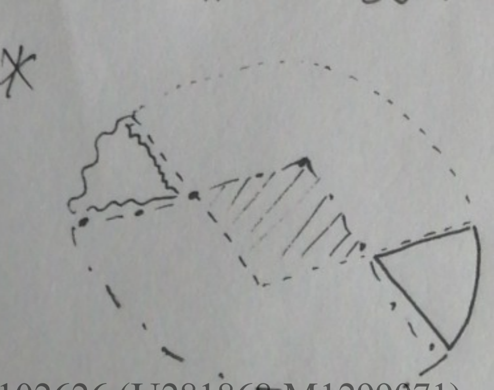
площадь можно рассчитать, ~~разд~~ разделив фигуру на 4 секции кругов за вычетом ромба по середине *

$$\frac{\pi\cdot(\sqrt{13})^2}{6}+\frac{\pi\cdot(\sqrt{13})^2}{6}+\frac{\pi\cdot(2\sqrt{13})^2}{3}+\frac{\pi\cdot(2\sqrt{13})^2}{3}-\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}\cdot\sin 60^\circ =$$

$$= \frac{13\pi}{3}+4\cdot\frac{13\pi}{3}+4\cdot\frac{13\pi}{3}-\frac{13\sqrt{3}}{2} = 39\pi-\frac{13\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $39\pi-\frac{13\sqrt{3}}{2}$

*



3

21102626 (U281868 M1299071)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102626**

ID профиля: **281868**

Вариант 20

Черновик ~~Чистовик~~ вар. 20 2.2 кл. 11

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

$x=\frac{a}{10}$ $y=\frac{b}{10}$ $z=\frac{c}{10}$

$$\begin{cases} НОД(x;y;z)=1 \\ НОК(x;y;z)=2^{16}\cdot 5^{15} \end{cases}$$

среди $x;y;z$ есть числа

$\not\vdots 2$ $\not\vdots 5$

$\not\vdots 2^{17}$ но $\vdots 2^{16}$ $\not\vdots 5^{16}$ но $\vdots 5^{15}$

упорядочим по степени вхождения 2

одно число $\not\vdots 2$

одно число $=k_1\cdot 2^{16}$ $k\not\vdots 2$

одно число $=k_2\cdot 2^{i}$ $k\not\vdots 2$ $i\in[0;16]$

Имеем 3 случая

1) $i=0$ $\times 1$

2) $i=16$ $\times 1$

3) $i\in[1;15]$ $\times 15$

разобрав таким же образом 5, получим также 3 случая

пусть все степени вхождения 2 различны, таких 5

случаев $15\cdot 14\cdot 3\cdot 2=30\cdot 42=1260$

различны только степени вхождения 2

$15\cdot 2\cdot 3=90$

только 5

$14\cdot 2\cdot 3=84$

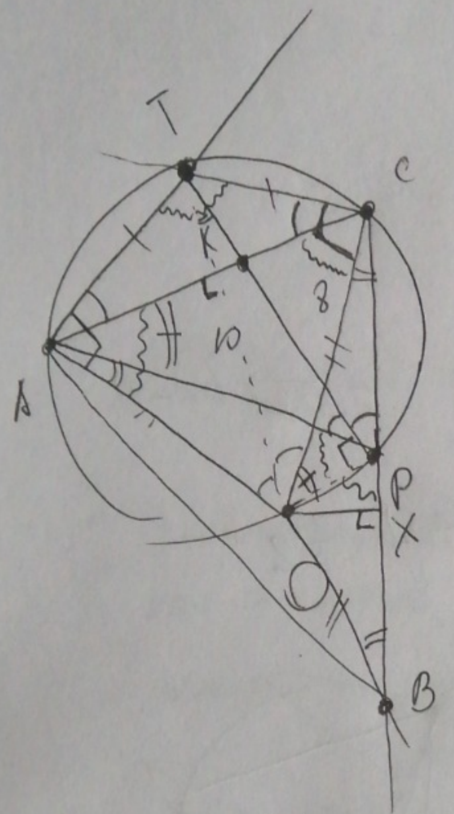
есть одинаковые степени как 5, так и 2

$2\cdot 2\cdot 2=8$

$1260+90+84+8=1350+90+2=1442$

21102626 (U281868 M1299072) Ответ: 1442

Черновик



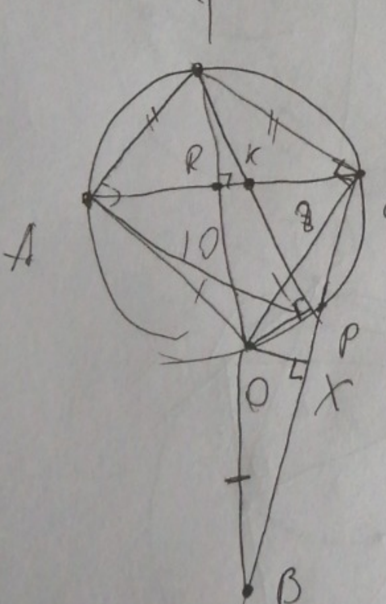
$$\frac{AK}{KC} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{OX}{PX} = \frac{OC}{TC}$$

$$\frac{OX}{OX} = \frac{OP}{PT}$$

$$\frac{CX}{PX} = \frac{PT \cdot OC}{TC \cdot OP} = \cancel{\frac{\sin(\cdot)\cdot\sin}{\sin(\cdot+\cdot)\cdot\sin(\cdot+\cdot)}} =$$

$$= \frac{\sin(\cup)\cdot\sin(\cong)}{\sin(\cong)\cdot\sin(\cup)}$$



$$RK = \frac{1}{18} AC$$

$$\triangle OXC \sim \triangle OPT$$

$$\frac{CX}{TP} = \cancel{\frac{OX}{OP}} = \frac{OC}{OT}$$

$$PX = \frac{TC \cdot OX}{OC}$$

$$CX = \frac{TP \cdot OX}{OP}$$

$$\frac{PX}{CX} = \frac{TC \cdot OP}{TP \cdot OC} = \frac{PO \cdot TR}{TP \cdot RC} = \cancel{\frac{TR^2}{RC}}\ \frac{TR \cdot RK}{RC \cdot TR} = \frac{RK}{RC} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{CK}{AK} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{OX}{XC} = \frac{OD}{PT}$$

$$\frac{OX}{XP} = \frac{OC}{CT}$$

$$\frac{XP}{XC} = \frac{CT \cdot PO}{OC \cdot PT}$$

$$\cancel{PX = \frac{CT \cdot PO}{TO}}$$

$$TP \cdot CO = CP \cdot TO + CT \cdot PO$$

$$PX \cdot TO = CT \cdot PO$$

$$\frac{RC}{PX} = \frac{CP \cdot TO}{CT \cdot PO} \qquad \frac{PX \cdot TO}{CT \cdot PO} = 1$$

№4

Черновик

НОД$(a;b;c)=10$

НОК$(a;b;c)=2^{17}\cdot5^{16}$

$\cancel{a=10\cdot2^{a_1}\cdot5^{a_2}}$

$\cancel{b=10\cdot2^{b_1}\cdot5^{b_2}}$

$c=10\cdot2^{c_1}\cdot5^{c_2}$

НОК$\left(\frac{a}{10};\frac{b}{10};\frac{c}{10}\right)=2^{16}\cdot5^{15}$ $\vdots 2^{16}$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$ $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$ $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$\log_{(2x-8)}(x-4)^2\cdot\log_{(x-4)^2}(5x-26)\cdot\log_{(5x-26)}(2x-8)^2=2$

$2=x\cdot x\cdot(x+1)=x^3+x^2$

$x^3+x^2-2=0$

$(x-1)(x^2+2x+2)=0$

$(x-1)((x+1)^2+1)=0$

$x=1$

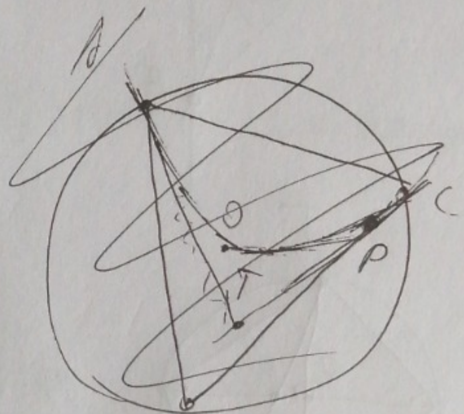
$\sqrt{2x-8}=x-4$ $(x-4)^2=5x-26$

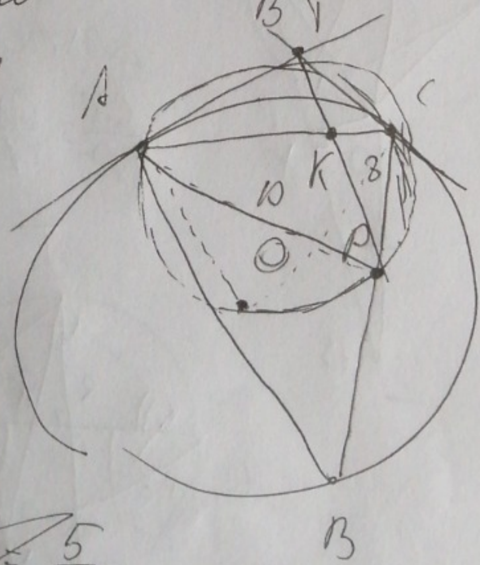
$\cancel{\sqrt{2x-8}}$ $2x-8=5x-26$

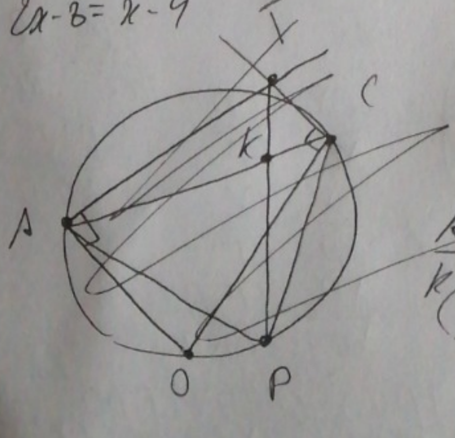
$(2x-8)=\sqrt{5x-26}$

$5x-26=(x-4)^2$

$2x-8=x-4$







$\frac{AK}{KC}=\frac{5}{4}$

21102626 (U281868 M1299072)

чистовик Вар. 20 Т.2 Кл. 11

№4

$x = \frac{a}{10}$ $y = \frac{b}{10}$ $z = \frac{c}{10}$

НОД $(x; y; z) = 1$ $\exists$ число $\not\vdots$ 2
$\exists$ число $\not\vdots$ 5 среди $x; y; z$

НОК $(x; y; z) = 2^{16} \cdot 5^{15}$ $\exists$ число $= k_1 \cdot 2^{16}$ $k_1 \not\vdots 2$ среди $x; y; z$
$\exists$ число $= k_2 \cdot 5^{15}$ $k_2 \not\vdots 5$ среди $x; y; z$

рассмотрим степень вхождения 2
кол-во случаев $15 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 6 \cdot 16 = 96$
аналогично для 5
$14 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 6 \cdot 15 = 90$
общее кол-во случаев: $90 \cdot 96 = 9600 - 960 = 9600 - 1000 + 40 =$
$= 8640$

Ответ: 8640

1

21102626 (U281868 M1299072)

$5x-2x=(x-4)^4=(2x-8)^2=4(x-4)$

Чистовик вар. 20 22 Кл. 11

№5

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x-4)$; $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$; $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-3)$

перемножим

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x-4)\cdot\log_{(x-4)^2}(5x-26)\cdot\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-3)=$

$=\log_{(2x-3)}(x-4)^2\cdot\log_{(x-4)^2}(5x-26)\cdot\log_{(5x-26)}(2x-3)^2=2$

пусть 2 из этих чисел равны y, тогда 3-е $-y+1$

$2=y^2(y+1)$

$y^3+y^2-2=0$

$(y-1)(y^2+2y+2)=0$

$(y-1)((y+1)^2+1)=0 \rightarrow y=1$

имеем 3 случая) 1) $\begin{cases}\sqrt{2x-3}=x-4\\(x-4)^2=5x-26\\\sqrt{5x-26}=\sqrt{2x-3}\end{cases} \Rightarrow 2x-3=5x-26=(x-4)^2$

$2x-3=5x-26$

$3x=18 \quad x=6$

$2\cdot 6-3=4$

$5\cdot 6-26=4$

$(6-4)^2=4$

$x=6$

2) $\begin{cases}\sqrt{2x-3}=x-4\\(x-4)^4=5x-26\\\sqrt{5x-26}=2x-3\end{cases} \Rightarrow$ ~~$x-4=5x-26=(2x-8)^2=\sqrt{2x-3}$~~

~~$x-4=5x-26$~~

~~$4x=22$~~

~~$x=5,5$~~

2

~~вар. 20 7. 2 кл. 11~~

чистовик вар. 20 2 2 кл. 11

~~$5,5-4=1,5$~~

~~$5\cdot 5,5-26=1,5$~~

~~$(2\cdot 5,5-8)^2=9$?~~

$5x-26=(x-4)^4=(2x-8)^2=4(x-4)^2$

$4(x-4)^2=(x-4)^4$

$\left[\begin{array}{l} x-4=2 \quad (ОДЗ) \quad x=6 \\ x-4=0 \ ?(ОДЗ) \end{array}\right.$

3) $\begin{cases} 2x-8=x-4 \\ (x-4)^2=5x-28 \\ \sqrt{5x-28}=2x-8 \end{cases}$

$2x-8=x-4=\sqrt{5x-28}$

$2x-8=x-4$

$x=4$

$x-4=0$? (ОДЗ)

$x=6$

Ответ: $x=6$

3

чистовик

вар. 20 7.2 кл. 11

№ 6

а) $\angle OAT = \angle OCT = 90° \Rightarrow \angle OAT + \angle OCT = 180° \Rightarrow OATC$ – вписан.

$\angle OAT = 90° \Rightarrow OT$ – диаметр $\Rightarrow \angle OPT = 90°$

$\angle OCP = \angle OTP$

$OX \perp BC$; $X \in BC$

$\triangle OCX \sim \triangle OTP \sim \triangle KTR$ $(AC \cap OT = R)$

$\angle OPX = \angle OAC = \angle OTC$

$\triangle OPX \sim \triangle CRT$

$\frac{PX}{CX} = \frac{\cancel{TR} \cdot RK}{RC \cdot \cancel{TR}} = \frac{RK}{RC}$

$KC = \frac{4}{9} AC$ $RC = \frac{1}{2} AC$

$RK = \left(\frac{9}{18} - \frac{8}{18}\right) AC = \frac{1}{18} AC$

$\frac{RK}{RC} = \frac{1}{9} = \frac{PX}{CX}$

$S_{ABC} = (8+10) \cdot \frac{BP+CP}{CP} = (8+10) \cdot \frac{2CP + 2PX}{CP} =$

$= 36 + 36 \frac{PX}{CP} = 36 + 36 \frac{1}{\frac{CP}{PX}} = 36 + 36 \frac{1}{\frac{CX}{PX} - 1} =$

$= 36 + 36 \cdot \frac{1}{8} = 36 + 4{,}5 = 40{,}5$

Ответ: 40,5

б) $\begin{cases} \angle OAB = \angle OBA \\ \angle OAP = \angle OCP = \angle OBP \end{cases} \Rightarrow \triangle APB$ – р/б $\Rightarrow$

$\triangle AOB$ – р/б

$\Rightarrow PO \perp AB$

$PO \cap AB = Y$

$\triangle PYB \sim \triangle PXO \sim \triangle ORA$ ...

4

21102626 (U281868 M1299072)