Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102581**

ID профиля: **229028**

Вариант 20

Черновик

a_1 - первый член d - ~~разно~~ шаг. $d>0$; $a_1, a_2 \dots$ - цел. $\Downarrow$ $d \in Z$

$S = \frac{a_1 + a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = 5(a_1 + 2d)$

$\begin{cases} a_6 a_{11} = (a_1+5d)(a_1+10d) > 5a_1 + 10d + 15 \\ a_8 a_9 = (a_1+7d)(a_1+8d) < 5a_1 + 10d + 39 \end{cases}$

$\begin{cases} \underbrace{a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 - 5a_1 - 10d}_{t} > 15 \\ \underbrace{a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 - 5a_1 - 10d}_{t+6d^2} < 39 \end{cases}$

$\begin{cases} t > 15 \\ t + 6d^2 < 39 \end{cases}$

$15 < t < 39 - 6d^2$

$a_1 \in Z$ и $d \in Z \Rightarrow t \in Z \Rightarrow t \geq 16 \Rightarrow 16 < 39 - 6d^2 \Rightarrow 6d^2 < 23$

$|d| < \sqrt{\frac{23}{6}}$

$1 = \sqrt{\frac{6}{6}} < \sqrt{\frac{23}{6}} < \sqrt{\frac{24}{6}} = 2$

$\Rightarrow d = 1$

$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+10) > 5a_1 + 10 + 15 = 5a_1 + 25 \\ (a_1+7)(a_1+8) < 5a_1 + 49 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 + 50 - 5a_1 - 25 > 0 \Rightarrow a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 15a_1 + 56 - 5a_1 - 49 < 0 \Rightarrow a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$

$(a_1+5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -5$

$\Downarrow$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 = 0$

при

$a_1 = -5 \pm \sqrt{25-7} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

$-5 + 3\sqrt{2}$

$a_1 < -5 + \sqrt{18} \Rightarrow a_1 \leq -1$

$4 = \sqrt{16} < \sqrt{18} < \sqrt{25} = 5$

$a_1 > -5 - \sqrt{18} \Rightarrow a_1 \geq -9$

$-1 < -5 + \sqrt{18} < 0$

$-5 < -\sqrt{18} < -4$

$-10 < -5 - \sqrt{18} < -9$

Ответ: $-9, -8, -7, -6, ~~-5~~, -4, -3, -2, -1$

$a_1 = -1 \quad d = 1$

$S = 5(-1+2) = 5$

$a_6 \cdot a_{11} = 4 \cdot 9 = 36 > 5 + 15 = 20$

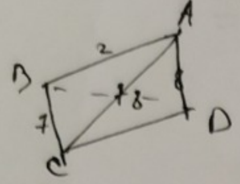
$a_8 \cdot a_9 = 6 \cdot 7 = 42 < 5 + 39 = 44$

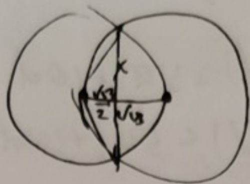
Черновик

Математика

"К" 1

ABCD - тетраэдр $AB = 2$ $AC = CB = 7$ $AD = DB = 8$



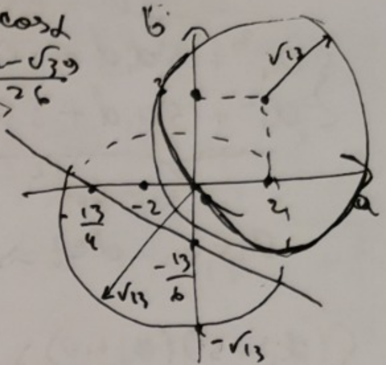


$x = \sqrt{13 - \frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13 \cdot 3}}{2}$

$\frac{\sqrt{39}}{2} = 2 \cdot 13 - 2 \cdot 13 \cos\alpha$

$\frac{\sqrt{39}}{26} = 1 - \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{26 - \sqrt{39}}{26}$



№3

$$\begin{cases} (x^2 - a)^2 + (y - b)^2 \le 13 \quad \text{I} \\ a^2 + b^2 \le \min(-4a - 6b, 13) \end{cases}$$

$a^2 + b^2 \le -4a - 6b \Rightarrow (a+2)^2 + (b+3)^2 \le 13$

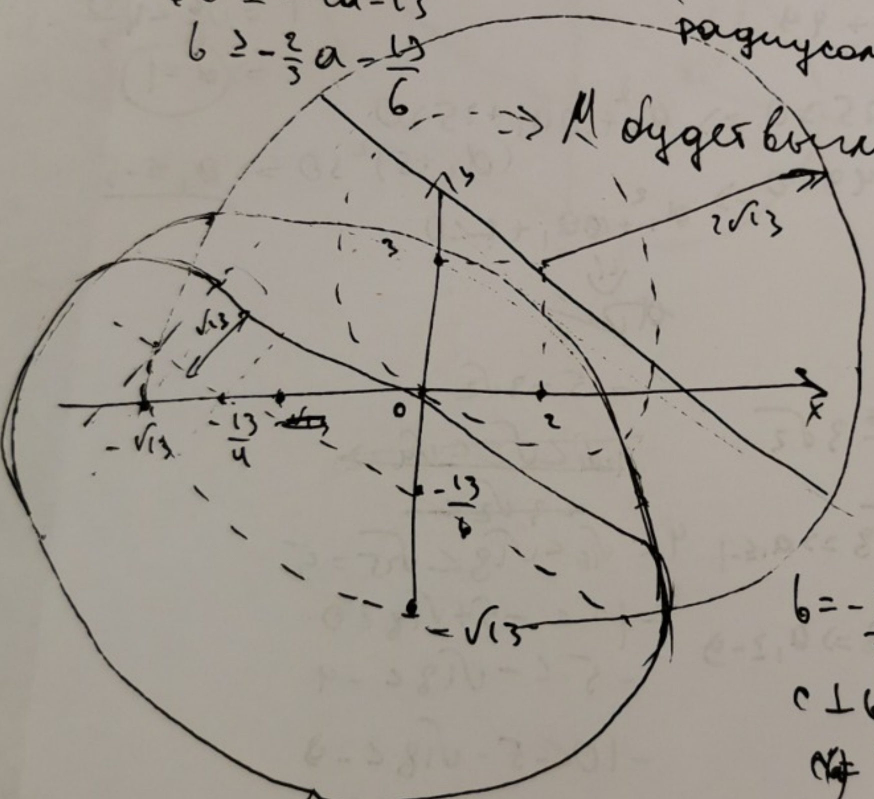
$-4a - 6b \le 13$

$6b \ge -4a - 13$

$b \ge -\frac{2}{3}a - \frac{13}{6}$

$(a; b)$ - центр I - окружности с радиусом $\sqrt{13}$

$\Rightarrow$ M будет выглядеть как-то так:



$\sqrt{13}$ $\sqrt{\frac{13}{4}}$

$<$

~~52 $\sqrt{169}$~~

$<$

~~$\sqrt{13}$ $\sqrt{\frac{13}{6}}$~~

~~78 $\sqrt{169}$~~

~~$\times \frac{13}{6}$~~

~~78~~

$\times \frac{13}{16}$

$+ \ 78$

13

$208 > 169$

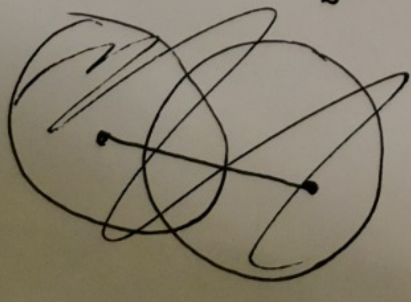
$b = -\frac{2}{3}a - \frac{13}{6}$

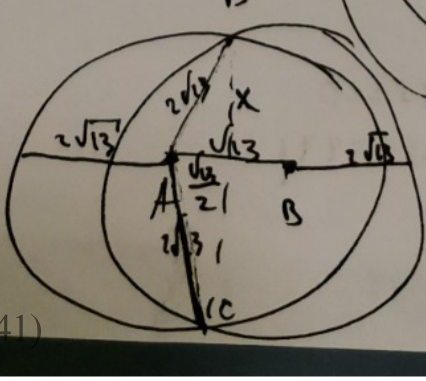
$c \perp b$:

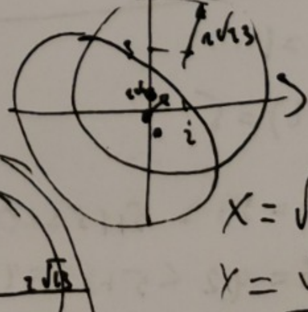
$\frac{3}{2}a + x$

$\alpha = \angle DAC$

$b = -\frac{2}{3}a - \frac{13}{6}$







$x = \sqrt{4 \cdot 13 - \frac{13}{4}} = \sqrt{13}\left(\sqrt{4 - \frac{1}{4}}\right)$

$y = \frac{\sqrt{13 \cdot 15}}{2}$

$CD = \sqrt{13 \cdot 15}$

2

$13\cdot15=8\cdot13-8\cdot13\cos\alpha$

$15=8(1-\cos\alpha)$

$\frac{15}{8}=1-\cos\alpha$

$\cos\alpha=1-\frac{15}{8}=\cancel{\frac{1}{16}}=-\frac{7}{8}$

$\alpha=\arccos-\frac{7}{8}=\pi-\arccos\frac{7}{8}$

$S_{OACD}=\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{\sqrt{13\cdot15}}{2}=\frac{13\sqrt{15}}{4}$

$\cancel{S_{сегм.}=2\cdot\left(4\pi\sqrt{13}-\frac{13\sqrt{15}}{4}\right)}$

$S_{окр}=\pi\cdot4\sqrt{13}=4\pi\sqrt{13}$

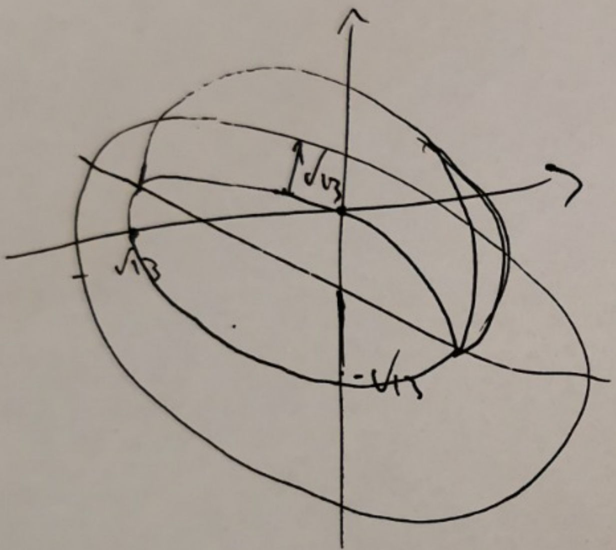
$S_{сегм}=2\cdot\left(\frac{4\pi\sqrt{13}\cdot\arccos-\frac{7}{8}}{2\pi}-\frac{13\sqrt{15}}{4}\right)=4\sqrt{13}\arccos-\frac{7}{8}-\frac{13\sqrt{15}}{2}$

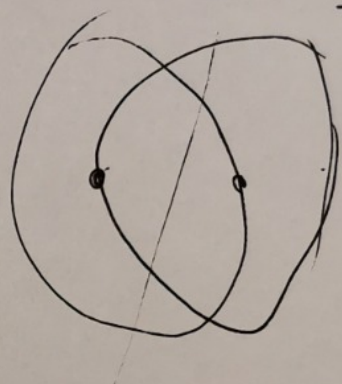
$8\pi\sqrt{13}\sqrt{15}$

$8\pi\sqrt{\sqrt{13\cdot15}}$

$64\pi^2\sqrt{13\cdot15}$

$$\begin{array}{r}\times\begin{array}{r}13\\15\end{array}\\\hline +\begin{array}{r}65\\13\end{array}\\\hline 195\end{array}$$





$$\begin{array}{r}\times\begin{array}{r}13\\9\end{array}\\\hline 117\end{array}$$

$$\begin{array}{r}\times\begin{array}{r}13\\8\end{array}\\\hline 104\end{array}$$

№1 Чистовик Математика 11кл

a_1 – первый член d – шаг прогрессии $d>0$; $a_1, a_2 \dots$ – целые $\Rightarrow d \in N$

$$S = \frac{a_1 + a_1 + 4d}{2} 5 = 5(a_1 + 2d)$$

$$\begin{cases} a_6 a_{11} = (a_1+5d)(a_1+10d) > S+15 = 5a_1+10d+15 \\ a_8 a_9 = (a_1+7d)(a_1+8d) < S+39 = 5a_1+10d+39 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 - 5a_1 - 10d > 15 \\ a_1^2 + 15a_1 d + 56d^2 - 5a_1 - 10d < 39 \end{cases}$$

Пусть $t = a_1^2 + 15a_1 d + 50d^2 - 5a_1 - 10d$. Раз $a_1, d \in Z \Rightarrow t \in Z$

$$\begin{cases} t \in Z \\ t > 15 \\ t + 6d^2 < 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 16 \\ t < 39 - 6d^2 \end{cases} \Rightarrow 16 < 39 - 6d^2 \Rightarrow 6d^2 < 23$$

$$|d| < \sqrt{\frac{23}{6}}$$

$$1 = \sqrt{\frac{6}{6}} \quad \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{6}} < \sqrt{\frac{24}{6}} = 2 \Rightarrow d < 2 \text{ и } d \in N \Rightarrow d = 1$$

Перепишем условия, учитывая, что $d=1$

$$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+10) > 5a_1 + 25 \\ (a_1+7)(a_1+8) < 5a_1 + 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \Rightarrow (a_1+5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -5 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 > 0 \end{cases}$$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 = 0$ при $a_1 = -5 \pm \sqrt{25-7} = -5 \pm \sqrt{18}$

$4 = \sqrt{16} < \sqrt{18} < \sqrt{25} = 5$

$-1 < -5 + \sqrt{18} < 0$

$-5 < -\sqrt{18} < -4$

$-10 < -5 - \sqrt{18} < -9$

$$\begin{cases} a_1 < -5 + \sqrt{18} \\ a_1 > -5 - \sqrt{18} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \leq -1 \\ a_1 \geq -9 \end{cases}$$

Тогда $a_1 \in Z$, $a_1 \in [-9; -1]$ и $a_1 \neq -5$

Ответ: -9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1

Чистовик

Математика 11кл

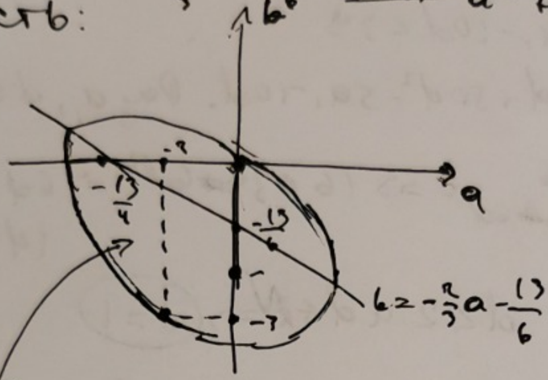
№3 M – фигура, т.ч.:

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13 & \mathrm{I}\\ a^2+b^2\le \min(4a-6b,13) & \mathrm{II}\end{cases}$$

II: при $b\ge -\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}$: $(a+2)^2+(b+3)^2\le 13$

при $b< -\frac{2}{3}a-\frac{13}{6}$: $\cancel{(a+2)^2}$ $a^2+b^2\le 13$

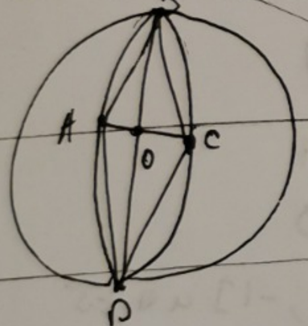
то есть:



ЭТО

множество центров для ~~окруж~~ кругов-решений I.

Найдём площадь $S_{\alpha\delta}$ этого множества:



$AB=BC=CD=DA=\sqrt{13}$, $AC=\sqrt{13}\Rightarrow AO=\frac{\sqrt{13}}{2}=BO=OD=$

$=\sqrt{13-\frac{13}{4}}=\frac{\sqrt{13\cdot 3}}{2}=\frac{\sqrt{39}}{2}$ $\quad\alpha=\angle BAD$

$\triangle ABD$:

$39=2\cdot 13-2\cdot 13\cos\alpha\Rightarrow 3=2-2\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{1}{2}$

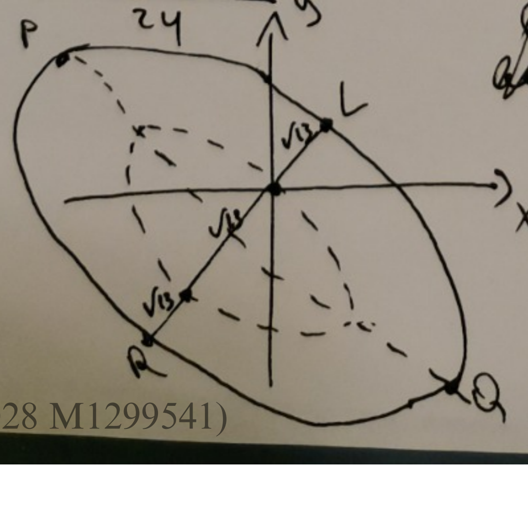
~~$\cos\alpha$~~

$\Rightarrow$ ~~$\alpha=120°$~~ $\alpha=\frac{2\pi}{3}$

$S_{\triangle ABD}=\frac{\sqrt{39}}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}}{4}=\frac{13\sqrt{3}}{8}\Rightarrow S_{\alpha\delta}=\left(\frac{\pi\cdot(\sqrt{13})^2\cdot\frac{2\pi}{3}}{2\pi}-\frac{13\sqrt{3}}{8}\right)2=$

$=\frac{13\pi}{3}-\frac{13\sqrt{3}}{8}=\frac{104\pi-39\sqrt{3}}{24}$

Множество M:



~~Очевидно, где здесь радиусы одной формы, то площадь~~

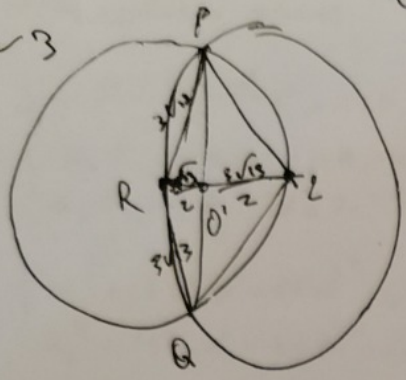
Найдём площадьМ

(см. лист 3)

№1 " " "Математика" КЛ

Чистовик

№3



$PO' = O'Q = \sqrt{9\cdot13 - \frac{9\cdot13}{4}} = \frac{3\sqrt{39}}{2}$

$\Rightarrow PQ = 3\sqrt{39}$

$\alpha = \angle PRQ$

$\triangle PQR$:

$9\cdot39 = 2\cdot9\cdot13 - 2\cdot9\cdot13\cos\alpha \quad /:(9\cdot13)$

$3 = 2 - 2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$

Искомая площадь S:

$S = 2\cdot\left(\frac{\pi\cdot\cancel{9}^{3}\cdot13\cdot\frac{2\pi}{\cancel{3}}}{\cancel{2\pi}} - \frac{9\cdot13\sqrt3}{4}\right) = 2\left(39\pi - \frac{117\sqrt3}{4}\right) = 78\pi - \frac{117\sqrt3}{2}$

$S_{\triangle PRQ} = \frac{3\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{39}}{2} = \frac{9\cdot13\sqrt3}{4}$

Ответ: $78\pi - \frac{117\sqrt3}{2}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102581**

ID профиля: **229028**

Вариант 20

Черновик Математика 11Кл

№1

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 & (1) \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} & (2) \end{cases}$$

$a, b, c \vdots 10$

Очевидно, в a, b, c есть только 2 и 5, а, например, 7 — нет.

Из (2):
Минимум в одном из чисел есть 2^{17} и также 5^{16} — минимум в одном.

Пусть в a 2^{17}, тогда в b от 2^2 до 2^{17} — 16 вар, в c 2^1

или в b 2^1 тогда в c от 2^1 до 2^{17} — 17 вар.

16
17

Пусть в a нет 2^{17}, пусть в b 2^{17}, тогда либо в a от 2^2 до 2^{16} и в c 2^1 — 15 вар,

либо в a 2^1 и в c от 2^1 до 2^{17} — 17 вар.

Пусть в c 2^{17}, тогда в a 2^1, в b 2^1–2^{16} — 16 вар или в a 2^2–2^{16}, в b 2^1 — 15 вар.

Всего вариантов: $16 \overset{33}{+} 17 \overset{48}{+} 15 \overset{65}{+} 17 \overset{80}{+} 15 + 16 = 96$

~~Пусть в a 5^{16}~~ аналогично для 5, но раз степень 16, а не 17, то везде на 1 меньше => вариантов: ~~15+16~~ $96-6=90$

Итог: ~~$95\cdot 89 = 8455$~~ $96\cdot 90 = 8640$

~~95×89~~
~~855~~
~~760~~
~~8455~~

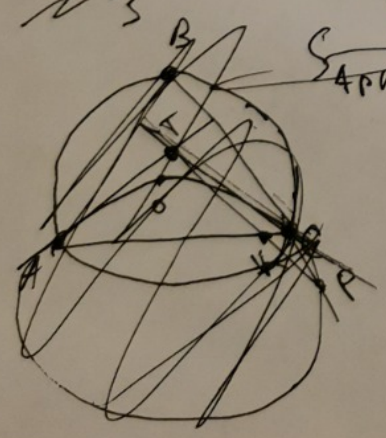
$$\begin{array}{r} 96 \\ \times\ 90 \\ \hline 8640 \end{array}$$

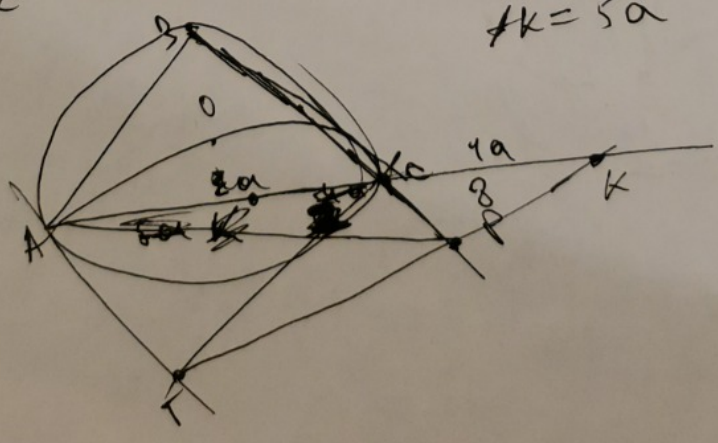
№3

$S_{APK}=10$ $S_{CPK}=8$ высота одна => $\frac{AK}{KC}=\frac{S_{APK}}{S_{CPK}}=\frac{5}{4}$

~~$S_{APK}=S_{KPC}$ => $AK=KC$~~

пусть
~~$AC=9a$~~
$AK=5a$





①

Черновик Математика 11К1

№2 $\log_{\sqrt{2x-8}}^{a=}(x-4)$ $\log_{(x-4)^2}^{b=}(5x-26)$ $\log_{\sqrt{5x-26}}^{c=}(2x-8)$

ОДЗ:
$\begin{cases} x>4 & x\neq 5 \\ x\neq 4{,}5 \\ x>\frac{26}{5}>5 \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{26}{5} \\ x\neq\frac{27}{5}\end{cases} \\ x\neq\frac{27}{5}\end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ c=a+1 \end{cases} \mathrm{I} \\ \begin{cases} a=c \\ b=a+1 \end{cases} \mathrm{II} \\ \begin{cases} b=c \\ a=b+1 \end{cases} \mathrm{III} \end{array}\right.$

I $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=\log_{(x-4)^2}(5x-26)$

$2\log_{2(x-4)}(x-4)=\frac{1}{2}\log_{(x-4)}(5x-26)$

$(2(x-4))^{4\log_{2(x-4)}(x-4)}=(2(x-4))^{\log_{(x-4)}(5x-26)}$

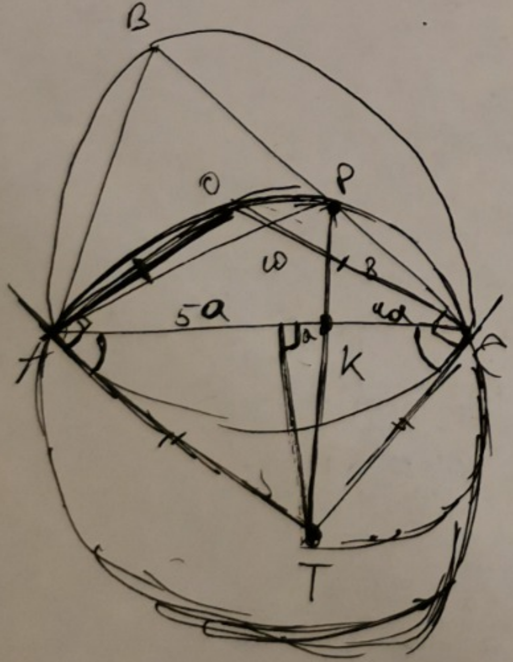
$(x-4)^4=2^{\log_{(x-4)}(5x-26)}$

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=\log_{\sqrt{2x-8}}\left((x-4)\sqrt{2x-8}\right)^{(5x-26)}$

$\frac{4}{\log_{(x-4)}(2x-8)}=\log_{(x-4)}(5x-26)$ $t=x-4$

$4\log_{2t}t=\log_t(t-6)$

$\log_t(t-6)\log_t 2t=4$



Чистовик Математика 11кл

№1 Найти кол-во троек a, b, c, т.ч.:

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 & (1) \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} & (2) \end{cases}$$

Из (1) следует, что среди простых множителей в a, b, c есть 2^1 и 5^1 (в a, b, c есть $2^1, 5^1$). Из (2) — что в a, b, c есть только 2-ки ~~и~~ 5-ки. Посчитаем количество способов расставить 2-ки и 5-ки по a, b, c и перемножим их. Очевидно, как минимум в одном числе из трёх есть 2^{17} и аналогично для 5^{16}.

Пусть в a 2^{17}.

Пусть в b от 2^2 до $2^{17} \overset{(1)}{\Rightarrow}$ в c 2^1 — 16 вариантов

Пусть в b $2^1 \Rightarrow$ в c от 2^1 до 2^{17} — 17 вариантов

Пусть в a нет 2^{17}

Пусть в b 2^{17}

Пусть в a от 2^2 до $2^{16} \overset{(1)}{\Rightarrow}$ в c 2^1 — 15 вариантов

Пусть в a $2^1 \Rightarrow$ в c от 2^1 до 2^{17} — 17 вариантов

Пусть в c 2^{17} и ни в a, ни в b нет 2^{17}.

Пусть в a от 2^2 до $2^{16} \overset{(1)}{\Rightarrow}$ в b 2^1 — 15 вариантов

Пусть в a $2^1 \Rightarrow$ в b от 2^1 до 2^{16} — 16 вариантов

Всего: $16+17+15+17+15+16=96$

Аналогичные рассуждения для 5-ок, но раз степень там ниже на 1, то везде вариантов меньше на 1 и всего их $96-6=90$

Итог: $96\cdot 90=8640$ (троек ~~вариантов~~)

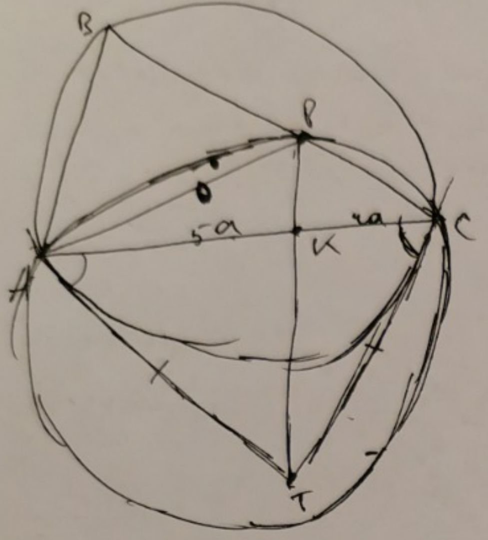
Ответ: 8640 троек

①

21102581 (U229028 M1299542)

Чистовик Математика

№3 Дано: $\triangle ABC$ – остроугольный, вписан в ω с центром в O. Окружность через A, O, C $\cap$ BC в P. AT и TC – касательные к ω. $TP \cap AC$ ~~в~~ K. $S_{APK} = 10$, $S_{CPK} = 8$.



В $\triangle AKP$ и $\triangle PKC$ одна высота к AC $\Rightarrow$

$\Rightarrow AK : KC = S_{APK} : S_{CPK} = 5 : 4$

Пусть $AC = 9a \Rightarrow AK = 5a$ и $KC = 4a$