Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102441**

ID профиля: **174340**

Вариант 20

Чистовик

S - сумма первых 5 членов => $S = \frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5$

Запишем данные неравенства:

$$\begin{cases} a_6\cdot a_{11} > \frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5+15 \\ a_8\cdot a_9 < \frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5+39 \end{cases}$$

Выразим все переменные через a_1 и d $(a_n = a_1+(n-1)\cdot d)$

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > \frac{2a_1+4d}{2}\cdot 5+15 \\ (a_1+7d)\cdot(a_1+8d) < \frac{2a_1+4d}{2}\cdot 5+39 \quad |\cdot(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+15a_1d+50d^2 > 5a_1+10d+15 \\ -a_1^2-15a_1d-56d^2 > -5a_1-10d-39 \end{cases}$$

Сложим нер-ва:

$-6d^2 > -24$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

$-2 < d < 2$

Прогрессия возрастает => $d>0$ и состоит из целых чисел, значит $d \in Z$, такое d единственно - $d=1$

Подставим $d=1$ в систему неравенств

$$\begin{cases} (a_1+5)(a_1+10) > \frac{2a_1+4}{2}\cdot 5+15 \\ (a_1+7)(a_1+8) < \frac{2a_1+4}{2}\cdot 5+39 \end{cases}$$

1

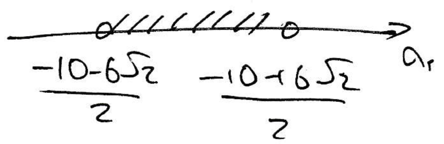
$$\begin{cases} a_1^2+15a_1+50 > 5a_1+10+15 \\ a_1^2+15a_1+56 < 5a_1+10+39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0 \\ a_1^2+10a_1+7<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+5)^2>0 \\ a_1^2+10a_1+7<0 \end{cases}$$

Первое нер-во выполняется при любых $a_1 \neq -5$

Второе: $a_1^2+10a_1+7<0$

$a_1 = \frac{-10+6\sqrt{2}}{2}$

$a_2 = \frac{-10-6\sqrt{2}}{2}$



Нужно выбрать только целые a

Чистовик

1) Сравним $-5-3\sqrt{2}$ и -10: $-5-3\sqrt{2} \vee -10$

$5 \vee 3\sqrt{2}$

$25 > 18$

Сравним $-5-3\sqrt{2}$ и -9:

$-5-3\sqrt{2} \vee -9$

$4 \vee 3\sqrt{2}$

$16 < 18 \Rightarrow -9$ подходит

2) Сравним $-5+3\sqrt{2}$ и 1: $-5+3\sqrt{2} \vee 1$

$3\sqrt{2} \vee 6$

$18 < 36$

Сравним $-5+3\sqrt{2}$ и 0:

$-5+3\sqrt{2} \vee 0$

$18 < 25$

Сравним $-5+3\sqrt{2}$ и -1:

$-5+3\sqrt{2} \vee -1$

$3\sqrt{2} \vee 4$

$18 > 16 \Rightarrow$ ~~1~~ (-1) – подходит

$[-9;-1]$

Подходят целые числа из промежутка ~~[-9;4]~~. Таких чисел ~~14:~~ 9: $-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1$

~~$-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$~~

Ответ: $\{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$

2

Чистовик

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 13 \\ a^2+b^2 \leq \min(-4a-6b, 13) \end{cases}$$

Рассмотрим второе неравенство. 1) Если $-4a-6b<13$, то $\min(-4a-6b,13)=-4a-6b$. Минимум раскрывается так в одной полуплоскости - такой, что $-4x-6y<13$, $y>\frac{-13-4x}{6}$. Т.е. если взять a вместо x и b вместо y, то в этой полуплоскости будет верное неравенство. В этом случае второе неравенство принимает следующий вид: $a^2+b^2 \leq -4a-6b \Rightarrow (a+2)^2+(b+3)^2 \leq 13$

2) Если $-4a-6b \geq 13$, то $\min(-4a-6b,13)=13$. В этом случае второе неравенство приобретает вид $a^2+b^2 \leq 13$ и при этом ~~4a~~ $b>\frac{-13-4a}{6}$

Построим график. $(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 13$ - внутреняя часть окружности (включая границы) с центром в $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{13}$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \leq 13$ - аналогично, но центр $(-2;-3)$

$a^2+b^2 \leq 13$ - аналогично, но центр - начало координат $(0;0)$

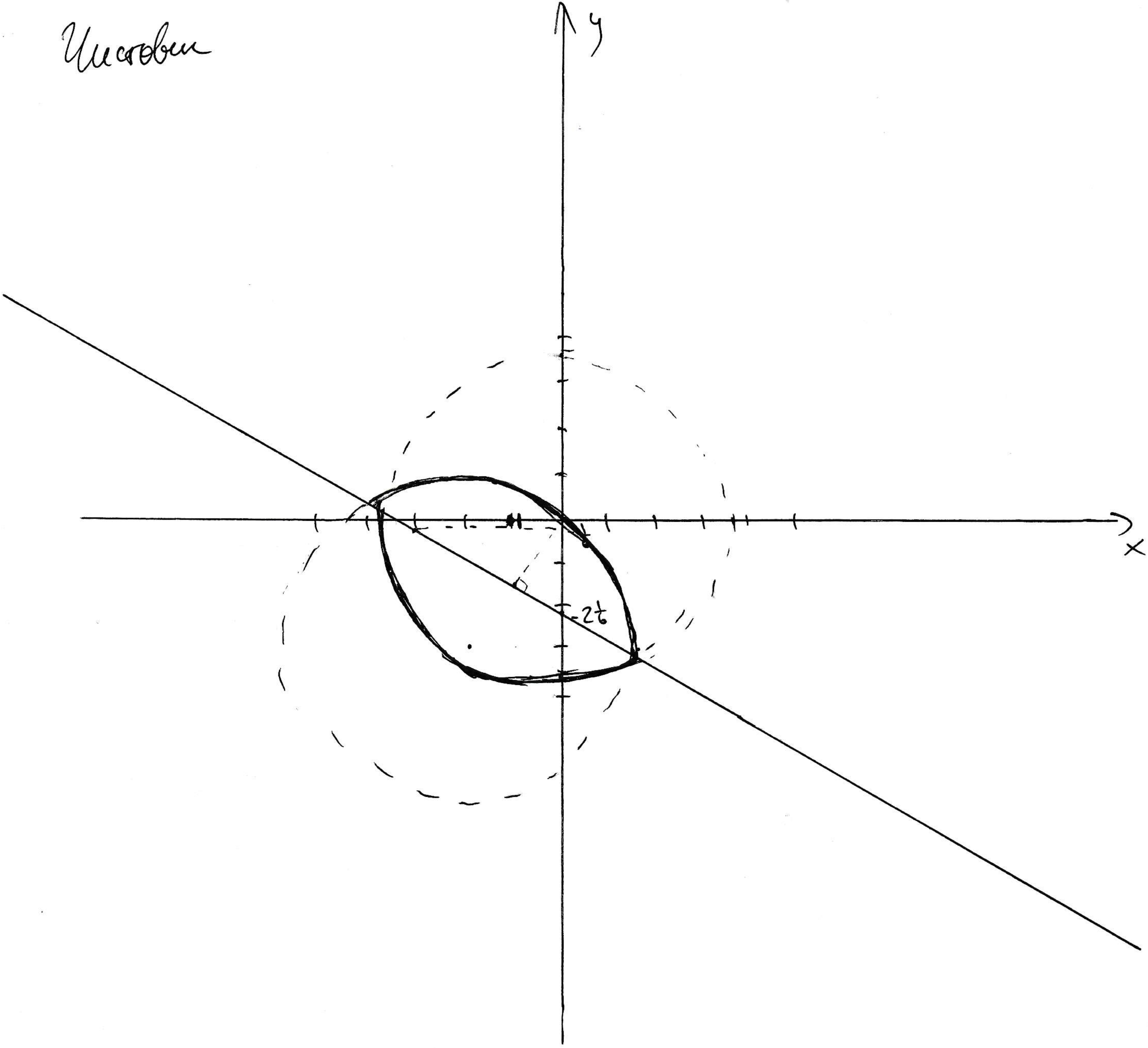
$y = \frac{-13-4x}{6}$ - прямая

3

Из второго неравенства мы узнаем a и b которые можно использовать для первого неравенства

Изобразив график заметим, что все найденные a и b дают решения для первого неравенства ~~[illegible]~~ Так как если мы возьмём окружность с центром из выделенной области у неё будут пересечения с этой областью.

Чистовик



Найдём координаты точек пересечения прямой и окружности и вычислим площадь двух частей окружности

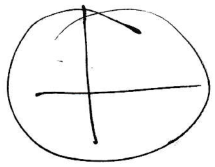
Первая окружность: ~~$-3 = \frac{-13-4x}{6} \Rightarrow -18 = -13-4x$~~

~~$4x = 5 \quad x_1 = \frac{5}{4}, \quad x_2 = -\frac{8}{5}$~~

4

$a^2+b^2 \geq 2ab$

$\sqrt{13}$ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



$42 < 5+39$

$36 > 5+45$

$-4a-6b, 13$

$-4a-6b$

-28

$-35+39$

$-4a-6b \leq 13$

$-4a < 6b+13$

$a > -\frac{6}{4}b+\frac{13}{4}$

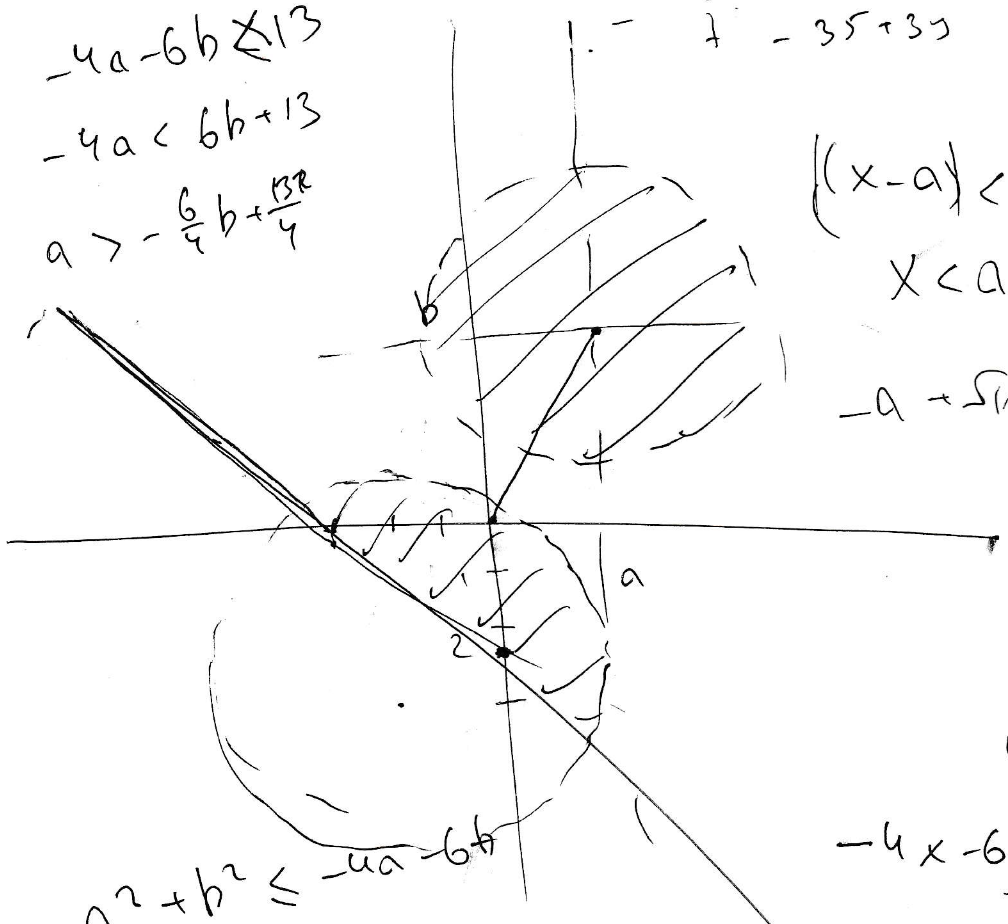
$(a;b)$

$|x-a| < \sqrt{13}$

$x < a+\sqrt{13}$ $-4a-6b \leq 13$

$-a+\sqrt{13}$ $\leq -4a$

$-4x-6y$



$0 > \frac{-13}{6}$

$4a+6b > -13$

$-4x-6y < 13$ $4a > -6$ $6b > \frac{-13-4a}{-6}$

$a^2+b^2 \leq -4a-6b$

$6y > \frac{-13-4x}{6}$

$\frac{-13}{16}$

0

$a^2+4a+4+b^2+6b+9 \leq 13$ $\cancel{-4x < 13+6y}$

$y > -9$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \leq 13$

$6y \geq \frac{13+4x}{-6}$

$\sqrt{13}$

$a_6 \cdot a_{11} > S + 15$ $\quad S = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5$ $\quad |x - a| \leq$

$a_8 \cdot a_9 < S + 39$

$a_6 \cdot a_{11} > \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 + 15$ $\quad 5 < 11$ $\quad a \; -$

$a_8 \cdot a_9 < \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 + 39$ $\quad 6 > 3$ $\quad |(x - a)| < \sqrt{13}$

$-6 < -3$

$(a_1 + 5d)(a_1 + 10d) > \frac{a_1 + a_1 + 4d}{2} \cdot 5 + 15$ $\quad -1 < 8$ $\quad x < a + \sqrt{13}$

$(a_1 + 7d)(a_1 + 8d) < \frac{a_1 + a_1 + 4d}{2} \cdot 5 + 39$

$-4 \quad -16$

$a^2 + 15ad + 50d^2 > 5a + 10d + 15$ $\quad 12 \cdot 11$ $\quad -\sqrt{13}$

$a^2 + 15ad + 56d^2 < 5a + 10d + 39$ $\quad 11 \quad 12 \quad 12$

$132 \quad 30$

$-a^2 - 15ad - 56d^2 > -5a - 10d - 39$

$4 \; 5 \; 6 \; 7 \; 8 \; 9 \; 10 \; 11 \; 12 \; 13$

$-6d^2 > -24$ $\quad 100-$ $\quad 14 \; 15 \; 16 \; 17 \; 18 \; 19$

$d^2 < 4$ $\quad d <$

$(a_1 + 5)^2 > 0$ $\quad 14 \cdot 9 > 30 \cdot 5$

$-5 - 3\sqrt{2} \vee 10$

$100 - 28 = 72 = 36 \cdot 2$ $\quad 14 \cdot 9 \quad 2 \quad 11 \quad 8$

$5 \vee 3\sqrt{2}$

$25 \vee 18$ $\quad x_1 = \frac{-10 + 6\sqrt{2}}{2}$

$-5 - 3\sqrt{2} \vee -10$ $\quad -5 + 3\sqrt{2} \quad -5 - 3\sqrt{2}$ $\quad 132 <$

$5 \vee 3\sqrt{2}$

$25 \quad 18$ $\quad -5 + 3\sqrt{2} > 0$ $\quad D = 100 - 28$

$-5 - 3\sqrt{2} \vee -9$ $\quad 3\sqrt{2} \quad 5$ $\quad 72 = 2 \cdot 36$

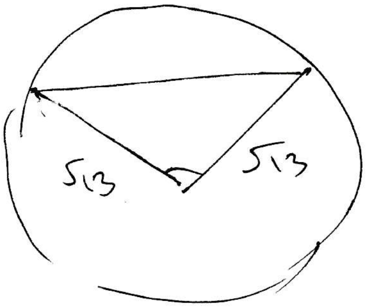
$4 \vee$ $\quad 18 > 25$ $\quad -10$ $\quad x_1 \quad 6\sqrt{2}$

$-5 + 3\sqrt{2} \vee 1$ $\quad -5 - 3\sqrt{2}$ $\quad -5 + 3\sqrt{2}$

$-5 + 3\sqrt{2}$ $\quad 3\sqrt{2} \quad 6$ $\quad 4$ $\quad -5 - 3\sqrt{2} \vee 10$

18 $\quad -5 - 6 \quad -5 + 6$

$\underline{-11 \quad 1}$



3 2

$-4a-6b$

$y=\frac{-13-4x}{6}$

$\frac{-13-4x}{6}=(x+2)^2+(y+3)^2-13$

$y=x$

$x^2+y^2=13$

$(x+2)^2+(y+3)^2=13$

$\frac{-13-4x}{6}$

y

$y=1$

$y=\frac{-13-4x}{6}+3$

$-13-4x=$

$-13-4x=0$

$\frac{-13-4x}{6}=0$

$4x=-13$

$-13-4x+18$

$x=\frac{-13}{4}$

$(x+2)^2+\left(\frac{-4x+5}{6}\right)^2=13$

$(x+2)^2+(y+3)^2=13$

$-3-\frac{1}{4}$

$(y+3)^2=9$

$y=6$

$\cancel{x^2+2}$

$36x^2+144x+\cancel{144}+25-40x+16x^2=\cancel{13}$ 468

$y+3=\pm 3$

13
·36
78
39

$(x+2)^2+9=13$

$52x^2+104x+439=0$

29

299

468
−29
439

$x+2=2$ 4

$x=-4$

$x+2=-2$

$\underline{36x^2+144x+144+900}$

468⌊13
39 36
78
8

468

$4\cdot 36$

$x_1+x_2=-2$

$x_1\cdot x_2=$

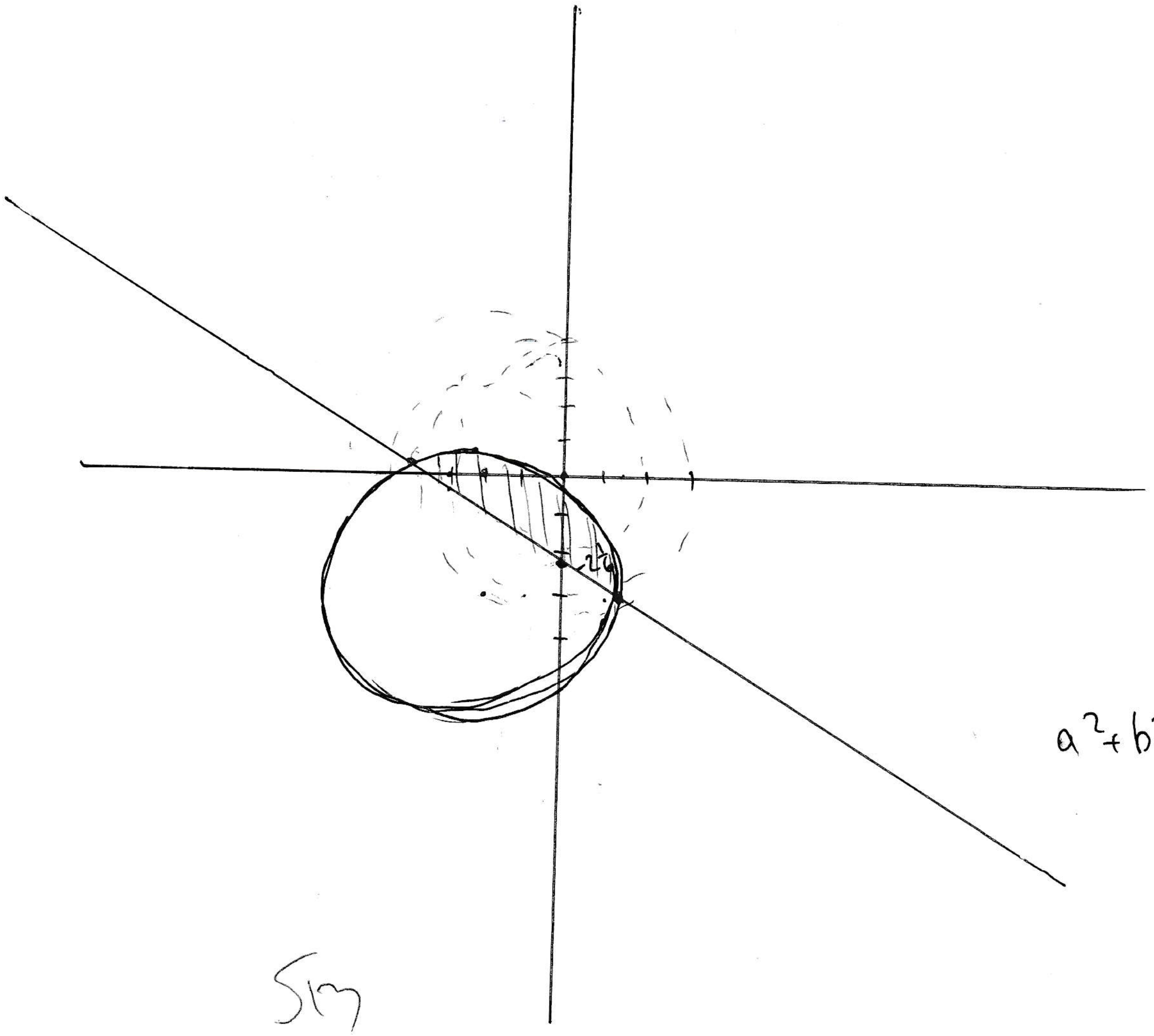
468
−144
324
−25

x

36
×4
1

25
·36
150 3
75

900

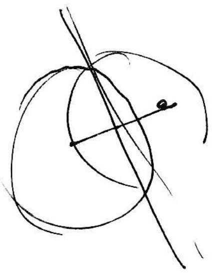


$a^2+b^2 \leq$

$\sqrt{13}$

$a^2+b^2 \leq 13$

$\frac{-13-4x}{6}$



$\frac{-13}{6}$

$x = -\frac{13}{4}$

$\frac{169}{36} + \frac{169}{16}$

$6\cdot 6 \quad 4\cdot 6$

$\frac{169\cdot 4+169\cdot 6}{128}$

$\sqrt{\frac{1690}{128}}$

$\frac{169}{24} : \frac{13\sqrt{10}}{8\sqrt{2}}$

$\frac{\cancel{169}^{13}\cdot 8\sqrt{2}}{\cancel{24}_{3}\cdot \cancel{13}\sqrt{10}}$

$\frac{13\sqrt{2}}{3\sqrt{10}}$

$\frac{13}{3\sqrt{5}}$

$\sqrt{13} - \frac{13\sqrt{5}}{15}$

$y = \frac{-13-4x}{6}$

$-18 = -13 - 4x$ $\qquad -3 \quad \frac{-13-4x}{6} = 0$

$(x \quad x^2+y^2$ $\qquad -13 = 4x$

$x = \frac{-13}{4}$

$(x+2)^2 + (y+3)^2$

$\left(\frac{-13}{4}+2\right)^2 + 9^2$

$\frac{-13+8}{4} \quad \frac{-5}{4} \quad \frac{25}{16} + 81$

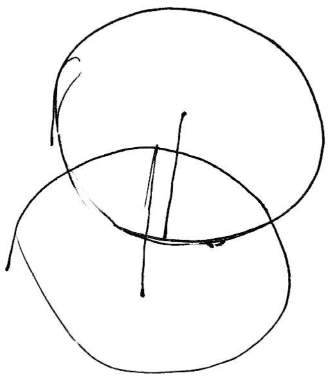
$x^2+y^2=13$ $\qquad 13 \quad 36 \quad 78 \quad 39$

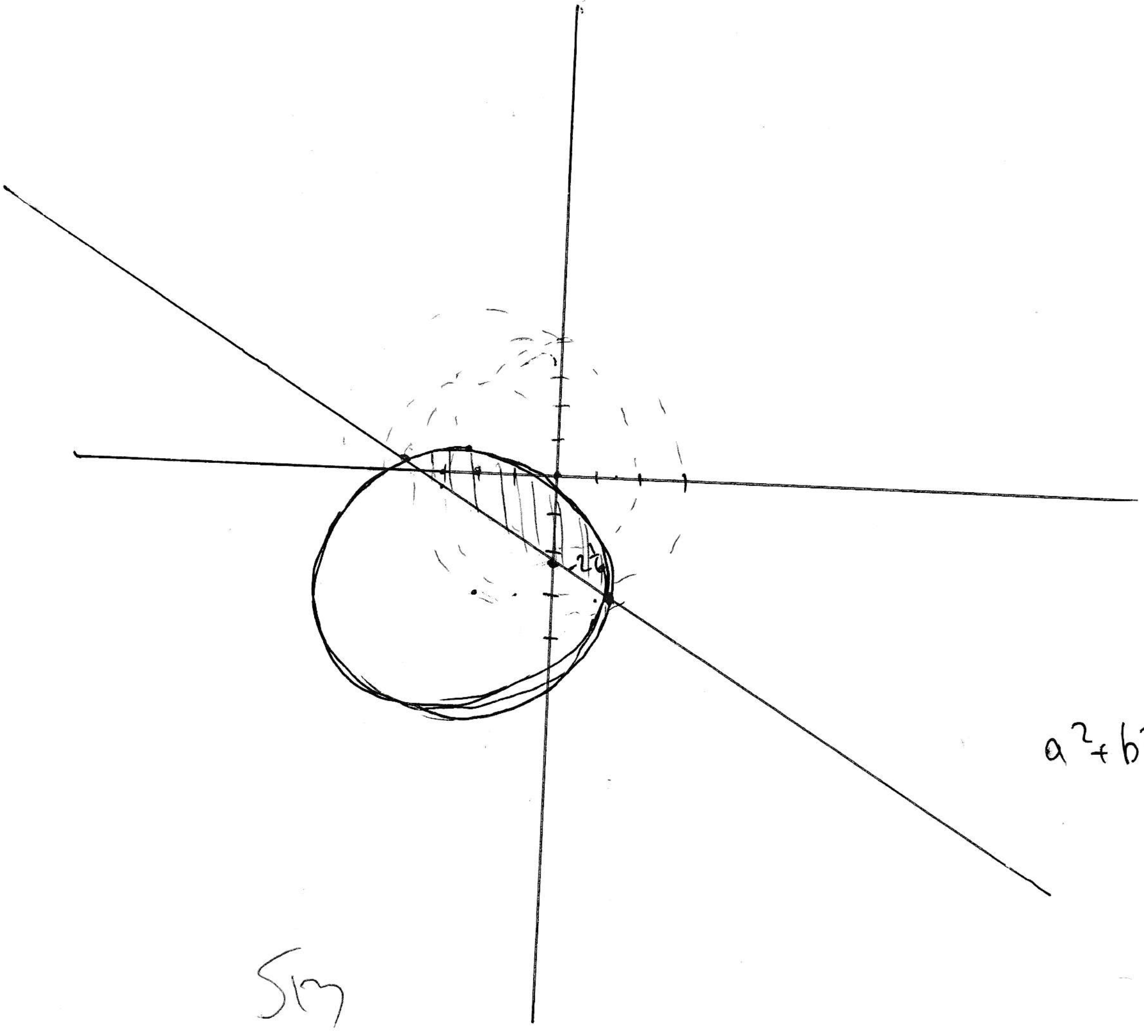
$y = \frac{-13-4x}{6} \quad x^2 \left(\frac{13+4x}{36}\right)^2 = 13$

$36x^2 + 169 + 104x + 16x^2 = 468$

$52x^2 + 104x - 299$ $\qquad 52 \; 14$

$x_1 \cdot x_2 = -2$ $\qquad \frac{5}{4} \quad \frac{-2 \cdot 4}{5}$ $\qquad 0;0$



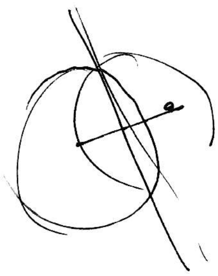


$a^2+b^2 \le$

$\sqrt{13}$

$a^2+b^2 \le 13$

$\frac{-13-4x}{6}$



$\frac{-13}{6}$

$x = -\frac{13}{4}$

$\frac{169}{36} + \frac{169}{16}$

$6\cdot 6 \quad 4\cdot 6 \quad \frac{169\cdot 4 + 169\cdot 6}{128}$

$\sqrt{\frac{1690}{128}} \quad \sqrt{}$

$\frac{169}{24} : \frac{13\sqrt{10}}{8\sqrt{2}}$

$\frac{\overset{13}{\cancel{169}}\cdot 8\sqrt{2}}{\underset{3}{\cancel{24}}\cdot \cancel{13}\sqrt{10}} \quad \frac{13\sqrt{2}}{3\sqrt{10}} \quad \frac{13}{3\sqrt{5}}$

$\sqrt{13} - \frac{13\sqrt{5}}{15}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102441**

ID профиля: **174340**

Вариант 20

Чистовик   Вар. 20

№ 5

По условию два числа равны, а третье больше на 1, т.е. можно представить их как a, a и $a+1$

Заметим, что $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)\cdot\log_{(x-4)}(\sqrt{5x-26})\cdot\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=$

(на ограничениях на x)

$=\log_{\sqrt{2x-8}}(2x-8)=2$, тогда

Ограничение на x:

$$\begin{cases} x-4>0 \\ 2x-8>0 \\ 2x-8\neq 1 \\ 5x-26\neq 1 \\ x-4\neq 1 \\ 5x-26>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{26}{5} \\ x\neq\frac{27}{5} \end{cases}$$

$a\cdot a\cdot(a+1)=2$

$a^3+a^2-2=0$

$a_1=1$

$a^3+a^2-2=(a-1)(a^2+2a+2)$

$a^2+2a+2=0$

$D=4-8<0$ – нет корней $\Rightarrow a=1$ – единственный корень

I) Пусть $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=a+1=2$, тогда

$x-4=2x-8$

$x=4$ – не удов. ограничениям

II) Пусть ~~$\log_{(x-4)}(\sqrt{5x-26})$ $2\log_{(x-4)^2}(5x-26)=a+1=2$, тогда~~

$\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)=a+1=2$, тогда

$2x-8=5x-26$

$3x=18$

$\boxed{x=6}$

Тогда $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)=1$ и $\log_{(x-4)^2}(5x-26)=1$

~~$x-4=\sqrt{2x-8}$~~

~~$x^2-8x+16=2x-8$~~

~~$x^2-10x+24=0$~~

~~$D=100-96=4$~~

~~$x_1=10$~~

Подставим $x=6$

$\log_{\sqrt{12-8}}(6-4)=1$ – верно

$\log_{(6-4)^2}(30-26)=1$ – верно

$x=6$ – подходит

1

III) Пусть $\log_{(x-4)^2}(\sqrt{5x-26}) = 2$ в таком случае Чистовик

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = 1$ и $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = 1$

$x - 4 = \sqrt{2x-8}$

$x^2 - 8x + 16 = 2x - 8$

$x^2 - 10x + 24 = 0$

$x_1 = \frac{10+2}{2} = 6$

$x_2 = \frac{10-2}{2} = 4$

$2x - 8 = \sqrt{5x-26}$

$4x^2 - 32x + 64 = 5x - 26$

$4x^2 - 37x + 90 = 0$

$D = 37^2 - 4 \cdot 4 \cdot 90 = 1369 - 1440 < 0 \Rightarrow$ нет решений

Значит, третий случай невозможен

Ответ: при $x = 6$

2

№ 4 Чистовик

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 10 = 2\cdot 5 \\ НОК(a;b;c) = 2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$$

Т.к. НОД равен $2\cdot 5$ должно быть хотя бы одно число, содержащее '2' в степени не более 1 и '5' в степени не больше 1

Заметим, что числа a, b и c имеют вид $2^k\cdot 5^m$, т.к.
Если бы числа ~~имели~~ имели другие простые в разложении, то они появились бы в НОК.

Упорядочим степени двойки по ~~возрастанию~~ неубыванию, получим $1 \le k \le 17$, то есть младшая степень обязательно 1, далее ~~любая степень от~~ степень от 1 до 17 и старшая степень – 17

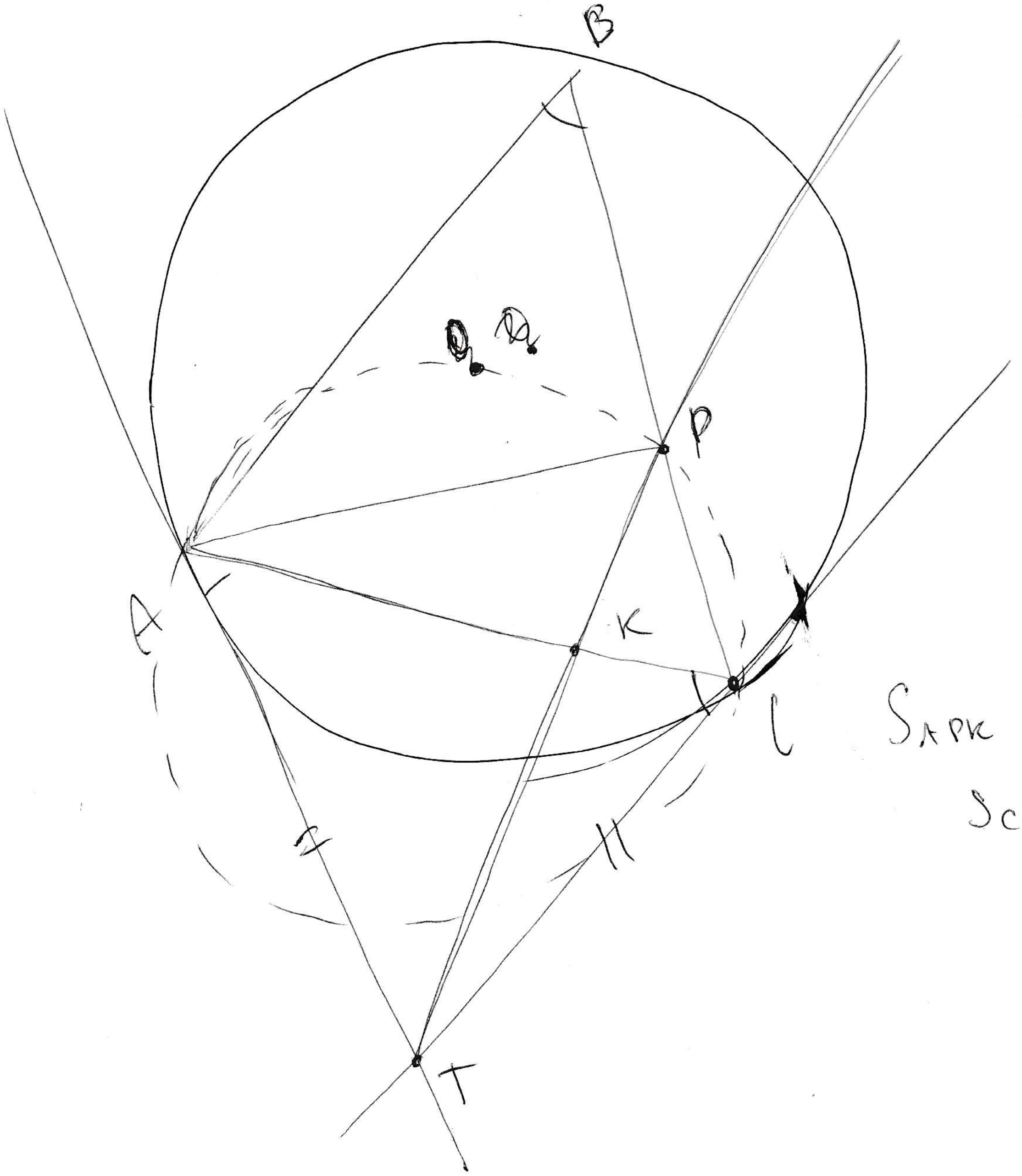
Для степеней пятерки аналогично: младшая степень ~~5~~ 1, далее любая от 1 до 16 и старшая степень – 16

Определим число с младшей степенью двойки – 3 варианта, далее со старшей – 2 варианта, для средней степени оставшееся число, но степень имеет 17 вариантов, т.е $3\cdot 2\cdot 17$. Аналогично со степенью пятерки: для младшей степени 3 варианта, для старшей 2 варианта, для средней – 1, но степень имеет 16 вариантов, т.е. $3\cdot 2\cdot 16$

Воспользуемся правилом умножения, т.к. рассматриваем один и тот же случай: $3\cdot 2\cdot 17\cdot 3\cdot 2\cdot 16 = 4\cdot 9\cdot 16\cdot 17 = 9792$

Ответ: 9792 троек

3



$S_{APK} = 10$

$S_{CPK} = 8$

16

16

5 5

112

113

$3 \cdot 2 \cdot 16$ $\quad 2^2 \cdot 3^2 \cdot 16 \cdot 17$

1 2 3

4 5 6

6 6

2 · 2

14	14	15	15	16	16
25	26	24	26	24	26
36	35	36	34	35	35

2 4 8

5 25 125

3·2 $\quad$ 3·2

3 2 2

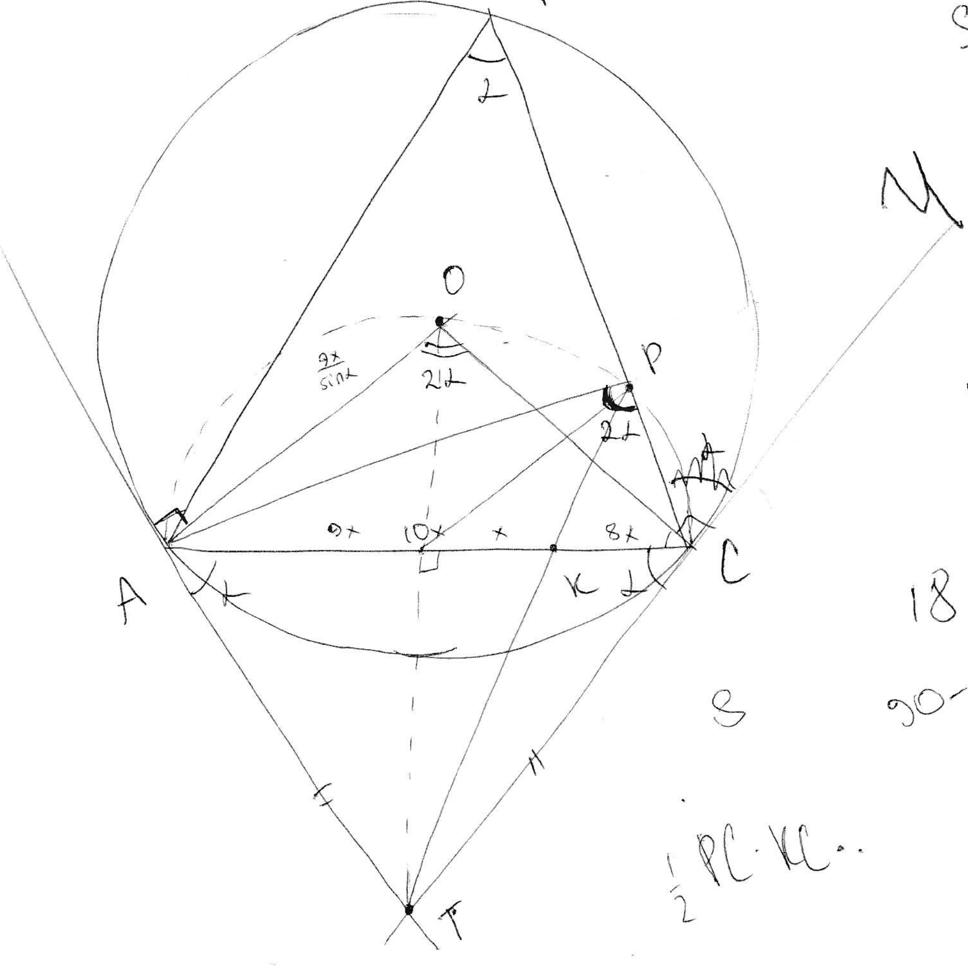
3

$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 16$

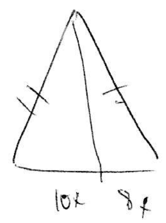
16
· 17 4
112
16
272 4
· 36 1 2
1632
816
9792

36
· 16 3
216
36
576 5
· 17 4
4032
576
9792

$$\frac{18x}{\sin\alpha} = 2R \qquad R = \frac{9x}{\sin\alpha}$$



S_{APK} и $S_{CPK} = \frac{10}{8}$



10k

8k

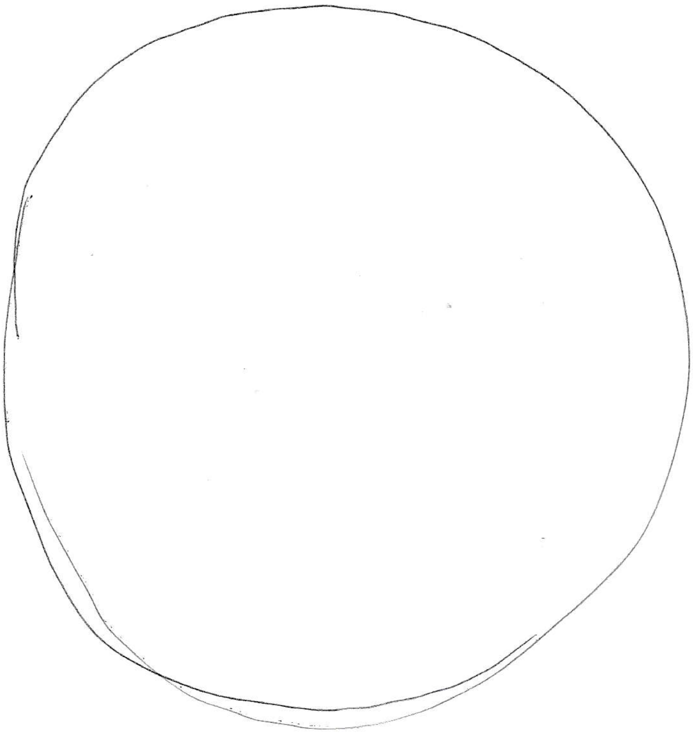
18

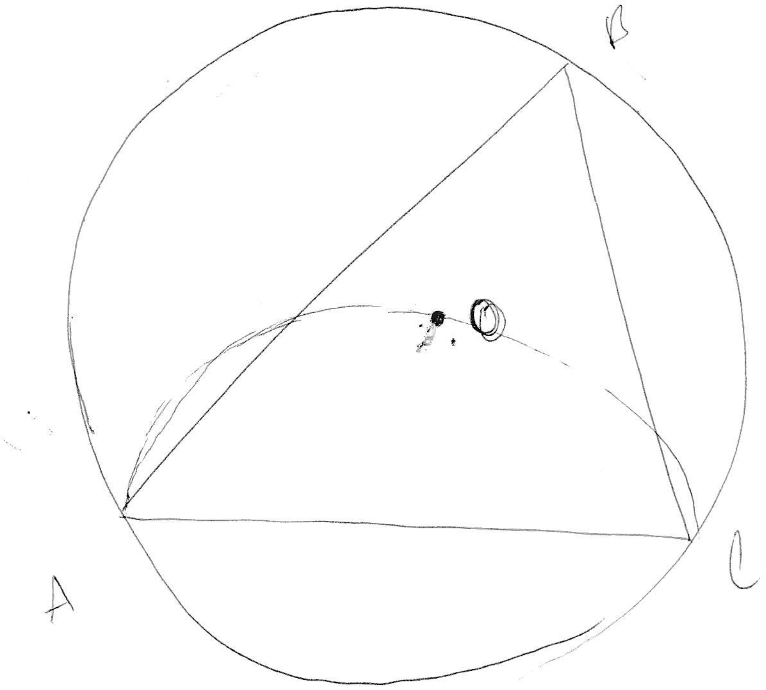
8

$90-\alpha$ $\quad 90-\alpha$

$180-2\alpha+\alpha$

$\frac{1}{2} PC \cdot KC \ldots$




B
O
A
C

37
·37

259
111

1369

4 2 4 16
95
1440

1

2·5

37
×37
259
111
1369

4 2 16 5
90
1440

НОК $2^{17} \cdot 5^{16}$

$2 \quad 2 \quad 2^{\text{в любой}}$ n m

$2 \cdot 5 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2^{\text{в любой}} \quad 2^{\text{в любой}}$ 15 16 17

1

$5 \quad 5 \quad 5^{\text{в любой}}$ 16 ≤

p q

$5 \quad 5^{\text{в любой}} \quad 5^{\text{в любой}}$ 16

≠1
≠5
≠2

1 ...

17 $2^n \cdot 5^m \quad 2^p \cdot 5^q \quad 2 \cdot 5$

25 $2^n \cdot 5 \quad 2^p \cdot 5^q \quad 2 \cdot 5$ 17

$2 \cdot 5^m \cdot 2^p \cdot 5^q \quad 2 \cdot 5$ 17 17 30

2 2·5 Макс степ.

1 17 2 17

мин(степ. двойки) = 17

мин(степ. пятерки) = 16 2^1

Должна быть 2 и 5

2^1 222

~~макс двух степ двоек 2~~

минимум одна 2 и одна 5

1 17−k 1 k 16−k

1 p 15−p

16−k

$НОД(a,b;c)=10=2\cdot5$ $2^n\cdot5^k$ $2^p\cdot5^q$; $2^m\cdot5^t$

$НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot5^{16}$ ~~n+p+m~~

$НОД(a;b;c)$ $2\cdot5$

2

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$ $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$ $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

a b c $\log_{x-4}\sqrt{5x-26}$ $\log_{\sqrt{2x-8}}(2x-8)^2$

1

$a=b$ $abc=2$ $a\cdot a\cdot(1-a)=2$

$c-a=1$ $c=1-a$ $a^2-a^3=2$ -1 1 -2 2

$c-a=1$ $a\cdot a\cdot(a+1)=2$ $a^3-a^2-2=0$

$a=c-1$ $8-4-2$

$a^3+a^2-2=0$ $(a^2+2a+2)(a-1)$

$c=$

$a=1$ $a^3-a^2-2 \,|\, a-1$ a^2+2a+2

a^3-a^2

$2a^2-2$

$2a^2-2a$

$-2+2a$

$a^3+2a^2+2a-a^2-2a-2$

a^3+a^2-2 4-8

$2x>8$

$x>4$

~~$x\neq4$~~

$x\neq4,5$

$x\neq\frac{27}{5}$

$x\neq5$

$x>\frac{26}{5}$

96 · 9 = 864 + 282 = 1146 + 81 = 1227

5 12 27

$5x-26=(x^2-8x+16)^2(x^2-8x+16$

$\sqrt{5x-26}=x^2-8x+16$

$x^2-8x+16$

$x^4-8x^3+16x^2-8x^3+64x^2-128x+256$ $+16x^2-128x+256$

$81-16\cdot27+96\cdot9-261\cdot3+282$

256 + 26 = 282

16 · 27 = 112 + 32 = 432; −256; −5

4 · 8 = 8

282 | 4

282 | 3

$x^4-16x^3+96x^2-261x+282=0$

$16-16\cdot8+96\cdot4-261\cdot2+282$

$-16\cdot7-261\cdot2$

261 · 3 = 783

432

$\boxed{1215}$

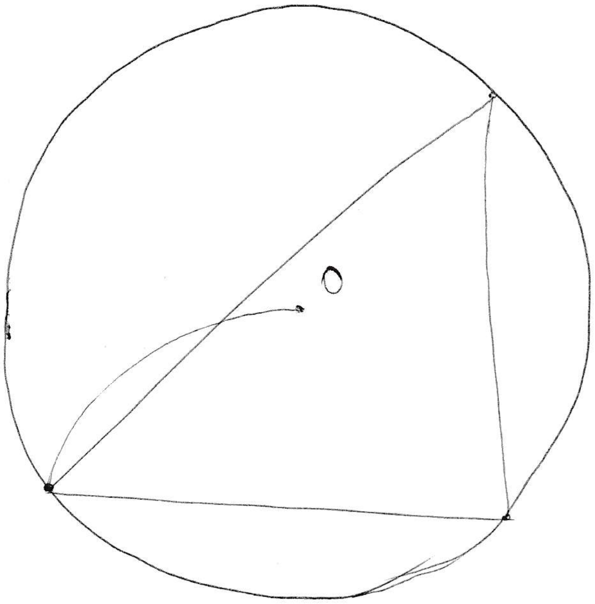
16 · 27 = 112 + 32 = 432

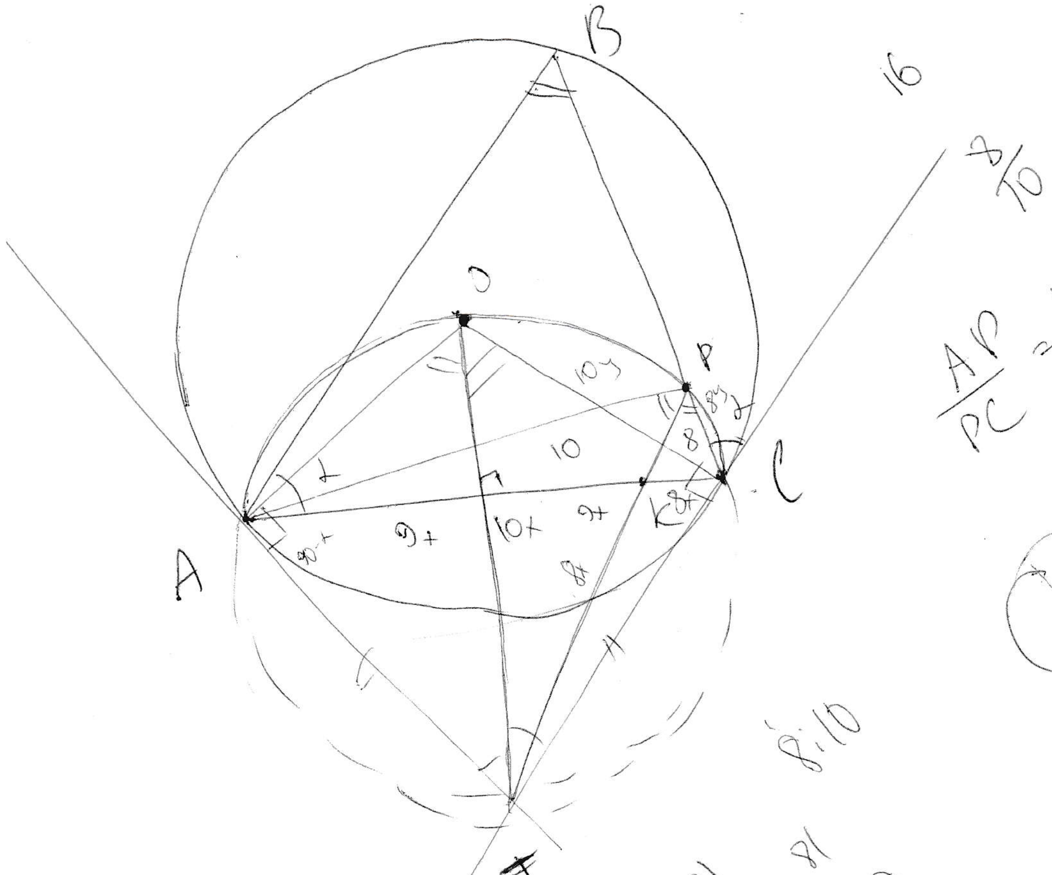
261 · 2 = 522

4 · 8

16 · 7 = 112, 222, 334

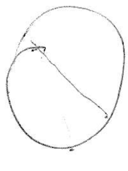
261 · 2 = 522





$\frac{AP}{PC} = \frac{16}{8}$

$\frac{AT}{TC} = ?$



8:10

81

1·81

9·9