Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102403**

ID профиля: **801367**

Вариант 20

① Чистовик. Математика. Вариант 20.

Задание 1.

Дано:

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

$a_2 = a_1 + k$. $\quad a_1, a_2, a_3 \ldots \in Z$.

$a_n = a_1 + (n-1)k$.

Известно:

$a_6 \cdot a_{11} > S + 15$. (1)

$a_8 \cdot a_9 < S + 39$. (2)

Найти все значения a_1.

① т.к. все члены прогрессии целые числа $\Rightarrow k \in Z$.
т.к. она возрастающая $k > 0$.

② Пусть $a_1 = a$.
Тогда: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 =$

$= 5a + k + 2k + 3k + 4k = 5a + 10k = S$

$a_6 = a + 5k \qquad a_8 = a + 7k$

$a_{11} = a + 10k \qquad a_9 = a + 8k$.

③ $a_6 \cdot a_{11} = (a+5k)(a+10k) = a^2 + 15ka + 50k^2$.

$a_8 \cdot a_9 = (a+7k)(a+8k) = a^2 + 15ak + 56k^2$

④ $\begin{cases} a^2 + 15ka + 50k^2 > 5a + 10k + 15 \text{ из (1)}. \\ a^2 + 15ka + 56k^2 < 5a + 10k + 39 \text{ из (2)}. \end{cases}$

тогда: $a^2 + 15ka + 50k^2 \in (5a + 10k + 15; 5a + 10k + 39 - 6k^2)$

$\Rightarrow \cancel{5a} + \cancel{10k} + 15 < \cancel{5a} + \cancel{10k} + 39 - 6k^2$.

$6k^2 < 24$

$k^2 < 4$. (т.к. $k > 0$)

$k < 2$. $\Rightarrow k = 1$ (т.к. $k \in Z$).

⑤ Значит из (1) и (2):

$\begin{cases} a^2 + 15a + 50 > 5a + 10 + 15 \\ a^2 + 15a + 56 < 5a + 10 + 39. \end{cases}$; $\begin{cases} a^2 + 10a + 25 > 0. \\ a^2 + 10a + 17 < 0. \end{cases}$; $\begin{cases} (a+5)^2 > 0 \quad (3) \\ a^2 + 10a + 17 < 0 \quad (4) \end{cases}$

(3) верно для всех a не равных -5.

⑥ Решим $a^2 + 10a + 17 = 0$.

$D = 10^2 - 17 \cdot 4 = 100 - 68 = 32 = 2^5$

$\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{-10 + 4\sqrt{2}}{2} \\ a = \dfrac{-10 - 4\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} a = -5 + 2\sqrt{2} \\ a = -5 - 2\sqrt{2}. \end{array}\right.$

⑦ Значит: ~~[illegible]~~

$a \in (-5 - 2\sqrt{2}; -5) \cup (-5; -5 + 2\sqrt{2})$.

продолжение на чистовике 2.

② Чистовик Математика. Вариант 20.

Продолжение Задачи 1.

8) $\underline{-5-2\sqrt{2} > -9}$ т.к.:

$-2\sqrt{2} > -4$

$2\sqrt{2} < 4$

$8 < 16.$

$\underline{-5-2\sqrt{2} > -8}$ т.к.:

$-2\sqrt{2} > -3$

$2\sqrt{2} < 3.$

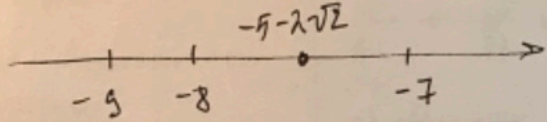
$8 < 9$

$\underline{-5-2\sqrt{2} < -7}$ т.к.

$-2\sqrt{2} < -2$

$2\sqrt{2} > 2$

$8 > 4.$

$\Rightarrow$ 

(числовая прямая)

9) $\underline{-5+2\sqrt{2} < -2}$ т.к.:

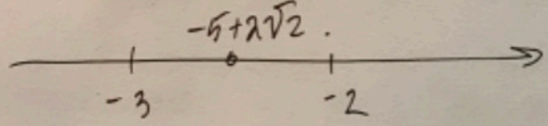
$+2\sqrt{2} < 3.$

$8 < 9.$

$-5+2\sqrt{2} > -3$ т.к.:

$2\sqrt{2} > 2$

$8 > 4.$



Значит $\begin{cases} a \in (-5-2\sqrt{2}; -5) \cup (-5; -5+2\sqrt{2}) \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases}$

имеет решение: $\left[\begin{array}{l} a=-7 \\ a=-6 \\ a=-4 \\ a=-3 \end{array} \right.$

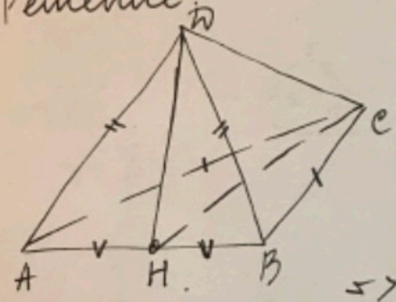
Ответ: $-7; -6; -4; -3.$

③ Чистовик Математика Вариант 20.

Задача №2.

Дано:
ABCD – тетраэдр.
$AB = 2$
$AC = BC = 7$
$AD = DB = 8$.
ABCD – вписанный в цилиндр.
(R мини.). DC – ?

Решение:



1) H – середина AB.
$DH \perp AB$, $CH \perp AB$
т.к. $\triangle ADB$ и $\triangle ACB$ равнобедренные по определению.
$\Rightarrow (DCH) \perp AB$.

2) Также заметим, что тетраэдр симметричен относительно (DCH).

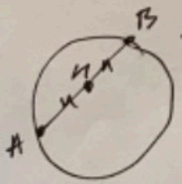
3) Найдём DH и CH:

$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{64-1} = \sqrt{63}$.
$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{49-1} = \sqrt{48}$

4) т.к. в цилиндре все ~~точки~~ вершины тетраэдра принадлежат боковой поверхности, а $CD \parallel$ оси цилиндра, CD лежит на высоте.

5) (DCH) содержит CD, $CD \perp \alpha$ (α – плоскость основания цилиндра) $\Rightarrow (DCH) \perp \alpha$. $AB \perp (DCH) \Rightarrow AB \parallel \alpha$.

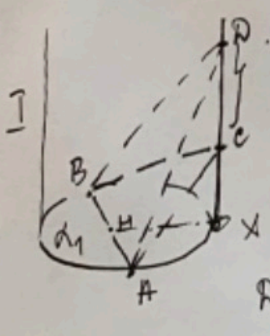
6) рассмотрим сечение, параллельное α, содержащее AB:



Радиус этого сечения больше или равен половины AB. Т.к. радиус наименьший – он равен половине AB (т.е. 1).

H – центр окружности сечения (назовём α_1)

7)



продлим CD до пересечения с α_1.
$CD \cap \alpha_1 = X$
$HX = R = 1$.
CH и DH известны. Найдём DX и CX.
т.к. $DC \perp \alpha_1$, по т. Пифагора:

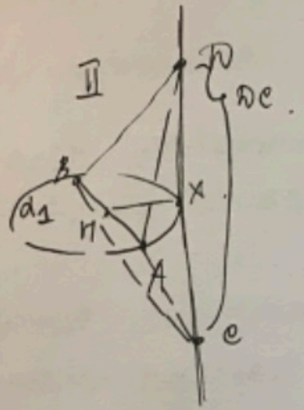
$DX = \sqrt{DH^2 - HX^2}$, $CX = \sqrt{CH^2 - HX^2}$
$DX = \sqrt{62}$, $CX = \sqrt{47}$. Продолжение на чистовике ④.

(4) Чистовик Математика. Вариант 20.

Продолжение задачи 2.

$DX = \sqrt{62}$

$CX = \sqrt{47}$.



I $DC = DX - CX = \sqrt{62} - \sqrt{47}$.

Ответ: $CD = \sqrt{62} - \sqrt{47}$.

II $DC = DX + CX = \sqrt{62} + \sqrt{47}$.

Ответ: CD

Ответ: $\sqrt{62} - \sqrt{47}$; $\sqrt{62} + \sqrt{47}$.

(5) листовик. Математика

Вариант 20.

Задача 3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 13. \\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b; 13) \end{cases}$$

~~окружн~~ (круг в координатах xy с центром в $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{13}$).

1) допустим, $13 \geq -(4a+6b)$.

тогда:

$a^2+b^2 \le -4a-6b$.

$a^2+4a+4+b^2+6b+9 \le +13$.

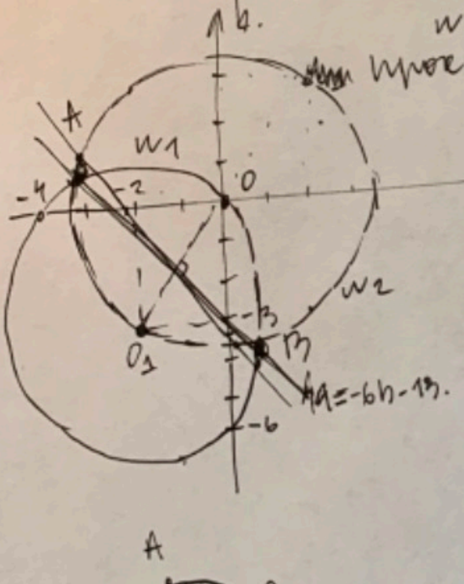
$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$.

Система имеет вид:

$$\begin{cases} (a+2)^2+(b+3)^2 \le 13 \\ (a-x)^2+(b-y)^2 \le 13. \end{cases}$$

круг (w_1) ~~окружность~~ с центром в $(-2;-3)$ и $R=\sqrt{13}$

круг (w_2) ~~окр.~~ с центром в $(x;y)$ и $R=\sqrt{13}$.

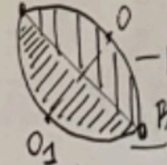


w_1 проходит через $(0:0)$.

2) $13 < -(4a+6b)$.

тогда: $a^2+b^2 \le 13$.

Прямая $4a=-6b-13$ — общая хорда окружностей w_1 и w_2.



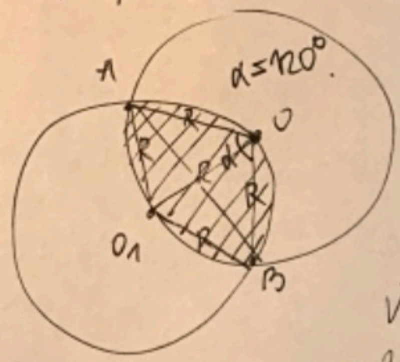
— решение случая 1

— решение случая 2.

Продолжение на листовике 6.

(6) Чистовик Математика. Вариант 20.

Продолжение задачи 3.



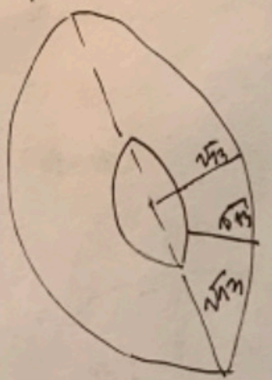
все радиусы одинаковые,

Решением a;b является любая точка из области AOBO1.

То есть любая из этих точек является центром круга радиусом $\sqrt{13}$.

M - все такие „круги" решения.

Значит фигура выглядит так:



Это часть окружностей с радиусами $2\sqrt{13}$.

$$S=\left(\frac{1}{3}\pi R^2-\frac{1}{2}\sin 120^\circ \cdot R^2\right)\cdot 2=$$

$$=4\cdot 2\cdot 13\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=104\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

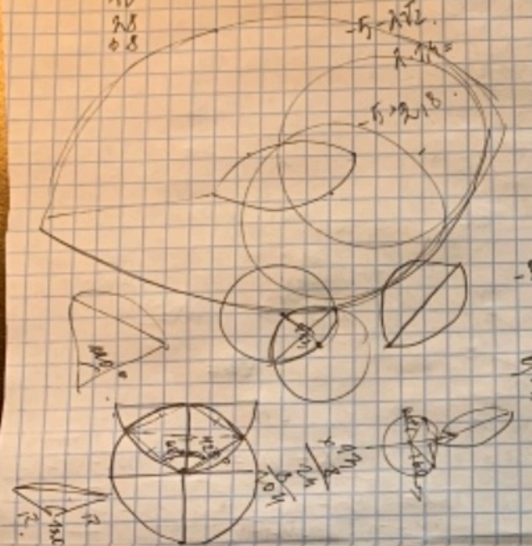
Ответ: $104\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

40 - 15 = 30 - 5 = 24.

56 - 39 = 57 - 40 = 17

100 - 4 · 17 = 60 - 28 =

100 + 28



$x^2+y^2 \le 13$

$a^2+b^2=13$

$a^2+b^2=-4a-6b$

$13=-4a-6b$

$4a \ge -6b-13$

$a \ge -\frac{3}{2}b-\frac{13}{4}$

$-\frac{6b+13}{4}$

$\frac{13}{4}=3\frac{1}{4}$

$0=-6b-13$

$b=-\frac{13}{6}=-2\frac{1}{6}$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13$

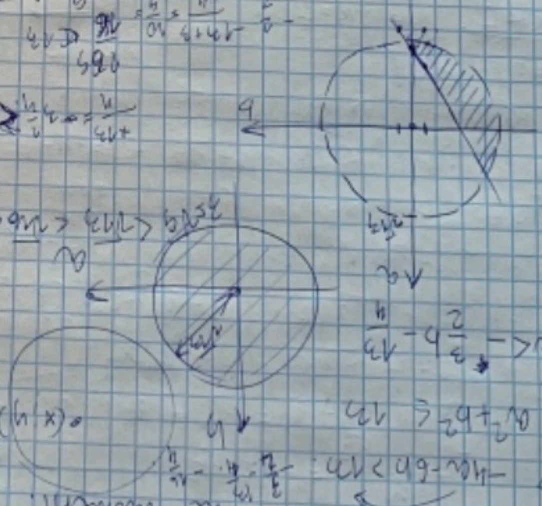
1) $-4a-6b \le 13$

$a^2+b^2 \ge -4a-6b$

$a^2+4a+4+b^2+6b+9 \ge -13$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \ge -13$

2) $a^2+b^2 \le 13$



1. $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$,

$a_2 = k + a_1$, $k > 0$; $a_1, a_2, \dots a_5, k \in \mathbb{Z}$

т.к. все члены целые.

$a_6 a_{11} > S + 15$.

$a_8 a_9 < S + 39$.

найти a_1

$a_1 = a$

$a_2 = a + k$

$a_3 = a + 2k$

$a_n = a + (n-1)k$

$S = 5a + k + 2k + 3k + 4k =$

$= 5a + 10k$.

$S \vdots 5$

$a_6 = a + 5k$

$a_{11} = a + 10k$

$a_8 = a + 7k$

$a_9 = a + 8k$.

$(a+5k)(a+10k) > 5a + 10k + 15$.

$a^2 + 15ak + 50k^2 > 5a + 10k + 15$.

$a_8 a_9 =$

$= (a+7k)(a+8k) = a^2 + 15ak + 56k^2 <$

$< 5a + 10k + 39$.

т.е.:

$a^2 + 15ak + 50k^2 > 5a + 10k + 15$

$a^2 + 15ak + 56k^2 < 5a + 10k + 39$

$5a + 10k + 15 < 5a + 10k + 39 - 6k^2$

$6k^2 < 24$

$k^2 < 4$ т.к. $k > 0$.

$\boxed{k < 2}$ $\Rightarrow k = 1$.

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} (a+5)(a+10) > 5a + 10 + 15 \\ (a+7)(a+8) < 5a + 10 + 39 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 15a + 50 > 5a + 25 \\ a^2 + 15a + 56 < 5a + 49 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 10a + 25 > 0 \\ a^2 + 10a + 7 < 0 \end{cases}$$

$(a+5)^2 > 0$.

$D = 100 - 28 = 72 = 36 \cdot 2$

$a = \frac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$.

$-5-3\sqrt{2}$ $\quad$ $-5+3\sqrt{2}$.

$a \in \mathbb{Z}$

т.к. $\sqrt{2} \approx 1{,}4$.

$-5-3\sqrt{2} \approx -5 - 4{,}2 = -9{,}2$

$-5 + 4{,}2 = -0{,}8$

$-5+3\sqrt{2} > -1$.

$-1 = -5 + 4$.

$4 < 3\sqrt{2}$

$16 < 18$.

$-2 = -5 + 3$.

$0 = -5 + 5$.

$5 > 3\sqrt{2}$

$25 > 18$

$-10 = -5 - 5$.

$5 > 3\sqrt{2}$ т.к.

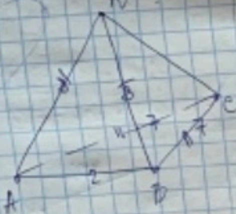
$25 > 18$

$-9 = -5 - 4$.

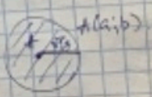
$4 < 3\sqrt{2}$ т.к.

$16 < 18$.

Ответ: $-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1$

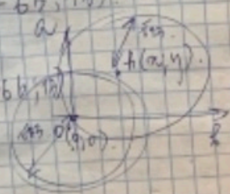


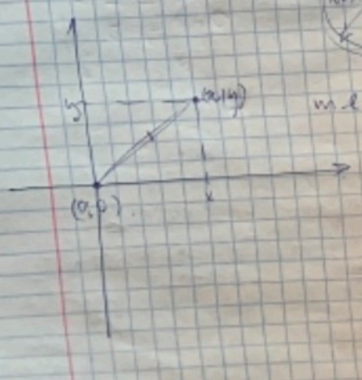
3. $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 13$



$a^2 + b^2 \leq \min(-4a - 6b; 13)$

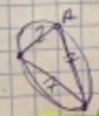
$$\begin{cases} (a-x)^2 + (b-y)^2 \leq 13 \\ a^2 + b^2 \leq \min(-4a - 6b, 13) \end{cases}$$



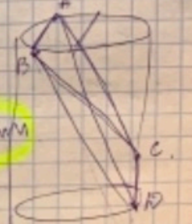


т.е. $x^2 + y^2 \leq 4 \cdot 13$.

$13 < -4a - 6b$.



т.е.

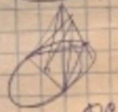


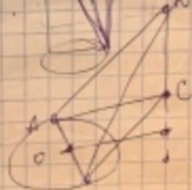
из соображений симметрии (ABC)

A в плоскости

$X = 1$

т.е.

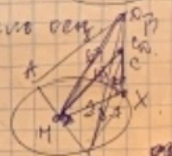


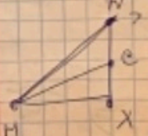


$AC \perp$ плоск.

по т. о 3х перп.:

$HX = 1$





$AX - CX = AC = \sqrt{62} - \sqrt{47}$.

$AX = \sqrt{AH^2 - HX^2} = \sqrt{63 - 1} = \sqrt{62}$

$CX = \sqrt{CH^2 - HX^2} = \sqrt{48 - 1} = \sqrt{47}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102403**

ID профиля: **801367**

Вариант 20

② чистовик Математика Вариант 20.

№4.

НОД$(a,b,c)=10$.

НОК$(a,b,c)=2^{17}\cdot 5^{16}$.

$a\cdot b\cdot c=$ НОД$(a,b,c)\cdot$НОК$(a,b,c)=2^{18}\cdot 5^{17}$.

Каждое число имеет вид:

$2^x 5^y$, где x и y больше или равно 1.

НОД$(a,b,c)=10$, следовательно: [redacted]

[redacted]

$(2\cdot 5^x;\ 2^y\cdot 5;\ 2^{17-y}\cdot 5^{16-x})=(a;b;c)$.

[redacted] У одного из чисел одна двойка, и у одного одна пятёрка. Способов выбрать 1 из 3 : 3

$\Rightarrow 3^2=9$ случаев.

$x\in[1;15]$ т.е. $15\cdot 16$ случаев. Но мы дважды посчитали случай, когда $x=8$!

$y\in[1;16]$. $9(15\cdot 16-1)$ - конечный ответ.

Ответ: 2151.

① Чистовик Математика. Вариант 20.

Задача №6.

Дано:

$\triangle ABC$ впис. в ω (центр O).

ω_1 проходит через A, O, C.

$BC \cap \omega_1 = P$

TA, TC – касательные к ω.

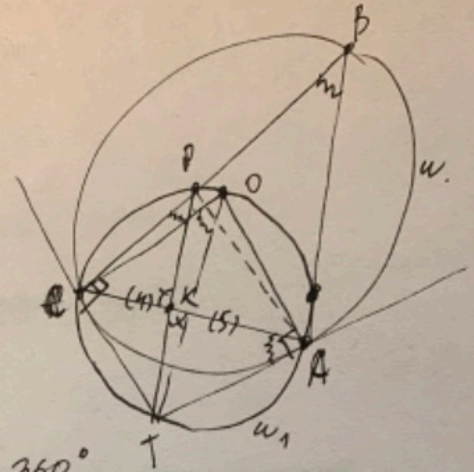
$TP \cap AC = K$.

$S_{\triangle APK} = 10$

$S_{\triangle CPK} = 8$.

1. $S_{\triangle ABC}$ – ?
2. $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$. AC – ?

Решение:



1) т.к. TA и TC касательные, $\angle OCT = \angle OAT = 90°$.

Сумма углов COAT 360°.

тогда пусть $\angle COA = 2\alpha$.

$\angle CTA + 2\alpha + 90° + 90° = 360°$

$\angle CTA = 180° - 2\alpha$. $\Rightarrow T \in \omega_1$.

2) $\angle COA = 2\alpha \Rightarrow \angle CBA = \alpha$.

3) $S_{\triangle APK} = \frac{1}{2} AK \cdot PH$, $S_{\triangle CPK} = \frac{1}{2} CK \cdot PH$ } PH – высота $\Rightarrow \frac{AK}{CK} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$.

4). OT – диаметр ω_1. $\angle COT = \angle AOT$ из равенства $\triangle COT$ и $\triangle AOT$.

CT = TA т.к. касательные.

$\angle CPT = \angle COT = \angle AOT = \alpha$.

5) $\angle ABC = \alpha$. $\Rightarrow PK \parallel BA \Rightarrow \angle BAC = \angle PKC$.

по 2м углам $\triangle CPK \sim \triangle CBA$ с коэффициентом $\frac{CK}{AK} = \frac{4}{9}$. значит $S_{\triangle ABC} = \left(\frac{9}{4}\right)^2 \cdot S_{\triangle CPK} = \frac{81}{16} \cdot 8 = 40{,}2$

Ответ: 1) $S_{\triangle ABC} = 40{,}2$

(14) [redacted] [redacted]

Продолжение задачи №6. **черновик**

2) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$

$AC - ?$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}$

1) $S_{\triangle CPK} = 8$

$\triangle CPK \sim \triangle TAK$ по $\angle CPT$ и $\angle CAT$, по $\angle CKP = \angle TKA$.

$$\frac{S_{\triangle CPK}}{S_{\triangle TAK}} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$S_{\triangle TAK} = \frac{25}{16} \cdot S_{\triangle CPK}.$$

2) $\left.\begin{array}{l} S_{\triangle CTK} = \frac{1}{2} CK \cdot h \\ S_{\triangle ATK} = \frac{1}{2} AK \cdot h \end{array}\right\}$ h - общая $\Rightarrow \frac{S_{\triangle CTK}}{S_{\triangle TAK}} = \frac{4}{5}$

$$\Rightarrow S_{\triangle CTK} = \frac{4}{5} S_{\triangle TAK} = \frac{4}{5} \cdot \frac{25}{16} \cdot S_{\triangle CPK} = \frac{4}{5} \cdot \frac{25}{16} \cdot 8 = 10.$$

~~3) $S_{CPKT} = S_{\triangle CPK} + S_{\triangle CKT} = 8 + 10 = 18$.~~

~~$S_{\triangle CPT} = \frac{1}{2} a$~~

$S_\triangle$ ~~$PAK = S_{\triangle CTK}$, $\angle PKA = \angle TKC$, $\angle PAC = \angle PTC$~~

$\Rightarrow$ ~~$\triangle PAK = \triangle CTK$.~~

~~$\Rightarrow CK = KP$.~~

~~$CP = \frac{4}{5} CT$.~~

$$\frac{\ln(x-4)}{\ln(\sqrt{2x-8})}$$

$\log_a b = c \qquad a^c = b$

$\log_2 32 = 5$

$\log_{\sqrt{2x-8}}(x-8)$

$$\frac{\ln(x-8)}{\ln(\sqrt{2x-8})} \cdot \frac{\ln(5x-26)}{\ln(x-4)^2} > \frac{\ln(2x-8)}{\ln(\sqrt{5x-26})}$$

$$\frac{2\ln(x-4)}{\ln(2x-8)} \cdot \frac{\ln(5x-26)}{2\ln(x-4)} \cdot \frac{2\ln(2x-8)}{\ln(5x-26)}$$

$\ln(x-4) = a$

$\ln(2x-8) = b$

$\ln(5x-26) = c$

$$\frac{2a}{b} > \frac{c}{2a} > \frac{2b}{c}$$

1) $\frac{2a}{b} = \frac{2b}{c}$, $b^2 = ac$, $\frac{2a+b}{b} = \frac{c}{2a}$

$\sin\alpha = \frac{c}{2R}$, $\frac{c}{\sin\alpha} = 2R$

2) $\frac{2a}{b} = \frac{c}{2a}$, $4a^2 < bc$, $\frac{2a+b}{b} = \frac{2b}{c}$

3) $\frac{c}{2a} = \frac{2b}{c}$, $c^2 = 4ab$, $\frac{2a}{b} = \frac{c+2b}{c}$

2. $\begin{cases} 4a^2 + 2ab = bc \\ b^2 = ac \end{cases}$ $\begin{cases} 2a(2a+b) = bc \\ b^2 = ac \end{cases}$

$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{abc}{4R}$

2. $\begin{cases} 2ac + bc = 2b^2 \\ 4a^2 = bc \end{cases}$ $\begin{cases} c(2a+b) = 2b^2 \\ 4a^2 = bc \end{cases}$

$\begin{cases} 4a^2 = bc + 2ab \\ c^2 = 4ab \end{cases}$ $\begin{cases} b(c+2a) = 4a^2 \\ c^2 = 4ab \end{cases}$

$2ac = bc + 2b^2$

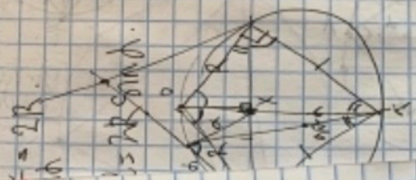
$\begin{cases} b(c+2b) = 2ac \\ c^2 = 4ab \end{cases}$

$OX \cdot XT = \frac{AC^2}{4}$

$\boxed{AC = OX}$

$AC = 2R$

$AC = 2R\sin\alpha$



$AC = 2R\sin\alpha$

$AC =$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

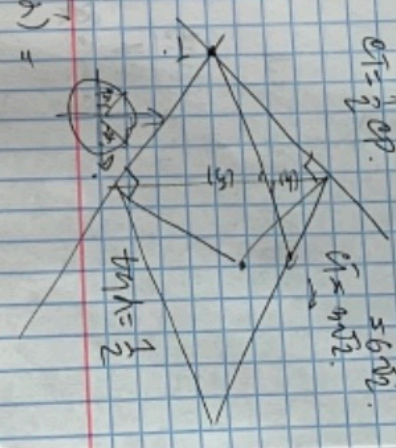
$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\sin\alpha = \frac{AC}{2R}$

$AC^2 = 2ET^2 - 2ET^2\cos(180° - 2\alpha)$

$AC = ET\sqrt{2 + (\cos 2\alpha)} =$

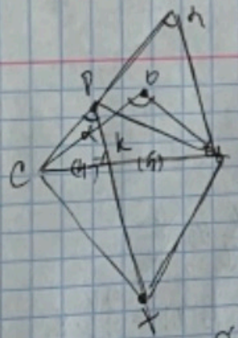
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$



$\triangle ERK \sim \triangle CBA$

$S = BN \cdot BA$

21102403 (U801367 M1297054)



$PK \cdot KT = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} AC^2$

$PK \cdot KT = \frac{20 AC^2}{81}$

$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = 2r$

$r = \frac{1}{2} OT = \frac{5}{8} AC$

$S_0 = \frac{R^2 \sin 2\alpha}{2}$

$\frac{R^2 AC}{4r} = S_0$

$\frac{AC}{4r} = \frac{\sin 2\alpha}{2}$

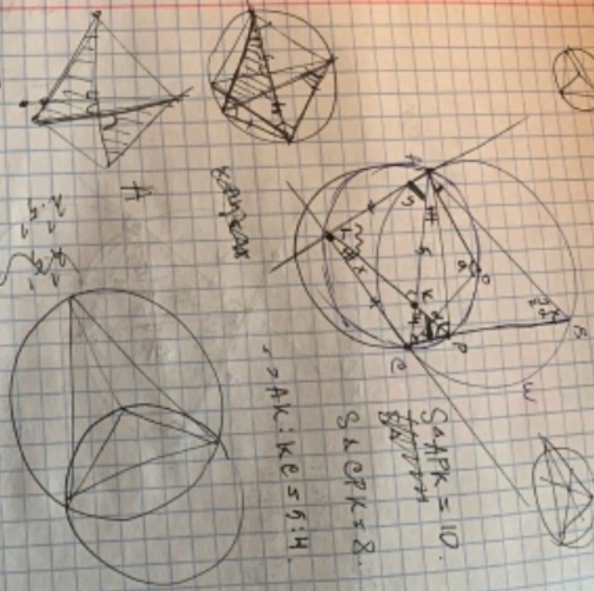
$AC = 2r \sin 2\alpha$

$\frac{2}{3}$

$15 \times 16 = 240$

$240 \times 9 = 2160$

$3 \cdot 3$



$\Rightarrow AK : KC = 5 : 4$

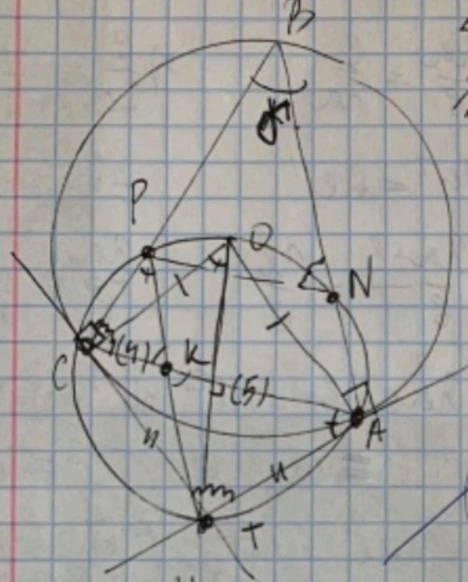
$S_{\triangle CPK} = 8$

$S_{\triangle APK} = 10$

21102403 (U801367 M1297054)

1. $T \in \omega_1$

(2 угла по 90°)

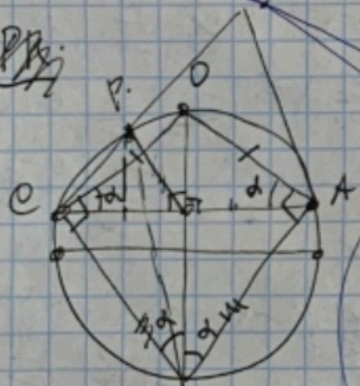


$\triangle CPK \sim \triangle TAK$

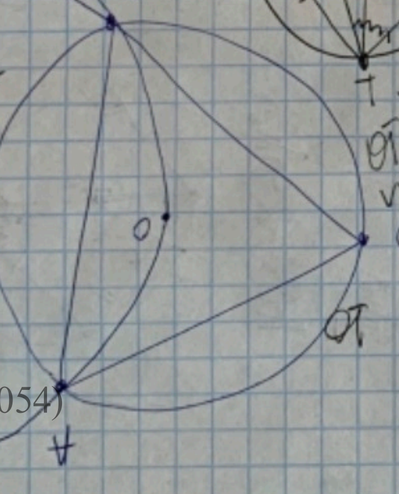
$\Rightarrow \frac{PK}{AK} = \frac{CK}{TK}$

$\boxed{TK \cdot PK = AK \cdot CK}$

OT - диаметр.



$OA = 2R \sin \gamma$

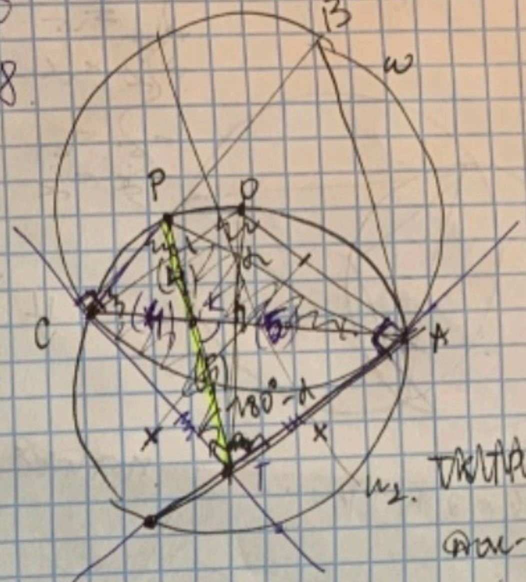


$S_{\triangle ABC}$ - ?

$S_{\triangle APK} = 10$

$S_{\triangle CPK} = 8$

5. 2·5.



д-во: $T \in$ (опр) ω_1

$\triangle CPK \sim \triangle TAK$ по 2

$\angle PTA = \angle PCA$.

AK по $\angle CPT$ и $\angle CAT$,