Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102358**

ID профиля: **316399**

Вариант 20

Чистовик

$\frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5 = \frac{a_1+a_1+4d}{2}\cdot 5 = (a_1+2d)\cdot 5$

1. $S = \frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5$

$\begin{cases} a_6 a_{11} > S+15 \\ a_8 a_9 < S+39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > S+15 \\ (a_1+7d)(a_1+8d) < S+39 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2+15da_1+50d^2 > 5a_1+10d+15 \\ a_1^2+15da_1+56d^2 < 5a_1+10d+39 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2+15a_1d+50d^2 > 5a_1+10d+15 \\ 5a_1+10d+39 > a_1^2+15da_1+56d^2 \end{cases}$

$\Rightarrow 50d^2+39 > 56d^2+15$

$24 > 6d^2$

$\Rightarrow d^2 < 4$

$d < 2$

$\Rightarrow$ т.к. прогрессия возрастающая и целочисленная, то $d=1$

подставим:

$\begin{cases} a_1^2+15a_1+50 > 5a_1+25 \\ a_1^2+15a_1+56 < 5a_1+49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0 & ① \\ a_1^2+10a_1+7<0 & ② \end{cases}$

① $(a_1+5)^2 > 0$

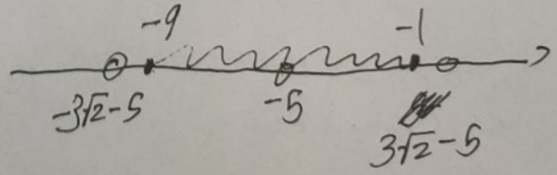
$\Rightarrow a_1 \neq -5$

② $a_1^2+10a_1+7<0$

$D = 100-28 = 72 = 36\cdot 2$

$\Rightarrow a_1 = \frac{-10+6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}-5$

$a_{1_2} = \frac{-10-6\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}-5$



$3\sqrt{2} = \sqrt{18}$

$4 < \sqrt{18} < 5 \Rightarrow \begin{cases} -3\sqrt{2}-5 < -9 \\ -3\sqrt{2}-5 > -10 \end{cases}; \begin{cases} 3\sqrt{2}-5 > -1 \\ 3\sqrt{2}-5 < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

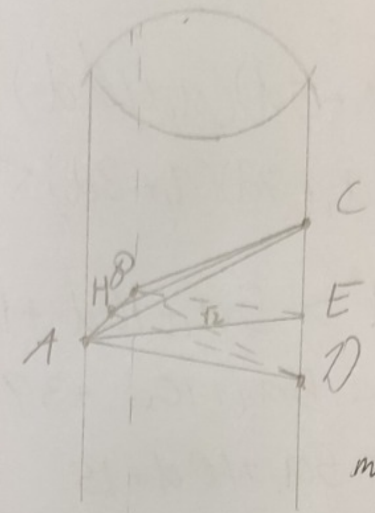
$\Rightarrow$ Ответ: $\{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

1

21102358 (U316399 M1300115)

Чистовик

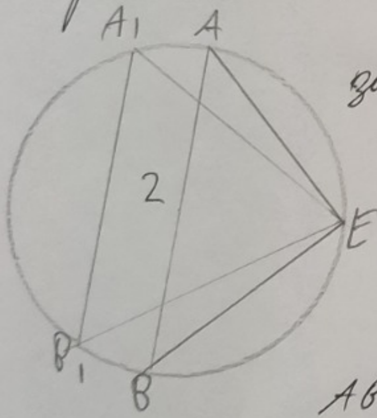
2\. $ABCD$ – тетраэдр
– вписан в цилиндр
$CD \parallel h$
$AB = 2$
$AC = BC = 7$
$AD = DB = 8$
найти CD при min r



$C \in$ боковой поверхности
$D \in$ боковой поверхности
$CD \parallel h_{цилиндра}$
$\Rightarrow CD \in$ боковой поверхности цилиндра
проведем высоты CH и DH в $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ соответственно
тогда $CH \perp AB$, $DH \perp AB$, $CH \cap DH = H$
$\Rightarrow (HCD) \perp AB$
$\Rightarrow$ т.к. $CD \in (HCD)$, то $CD \perp AB$

$\Rightarrow CD \perp AB$
при этом $CD \perp$ основаниям
$\Rightarrow AB \parallel$ основаниям цилиндра

$\Rightarrow$ рассмотрим (ABE) | $E = (ABE) \cap CD$;
$(ABE) \parallel$ основаниям



заметим, что радиус окр., описанной вокруг $\triangle ABE$ и будет радиусом цилиндра,
а AB – является хордой и $AB = 2$
т.к. $AB = 2$, то $d \geq 2$
$\Rightarrow$ минимальный радиус достигается, когда AB является диаметром
$\Rightarrow r_{min} = \frac{2}{2} = 1$

$\Rightarrow \angle AEB = 90^\circ \Rightarrow AE = BE = \sqrt{2}$
т.к. $(ABE) \parallel$ основаниям, то $AE \perp CD$
$\Rightarrow$ рассмотрим:
$\triangle ACE$: $\angle CEA = 90^\circ \Rightarrow CE = \sqrt{7^2 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{47}$
$\triangle AED$: $\angle DEA = 90^\circ \Rightarrow DE = \sqrt{8^2 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{62}$

$\Rightarrow CD = \sqrt{47} + \sqrt{62} \Rightarrow$ Ответ: $\sqrt{47} + \sqrt{62}$

2

21102358 (U316399 M1300115)

чистовик

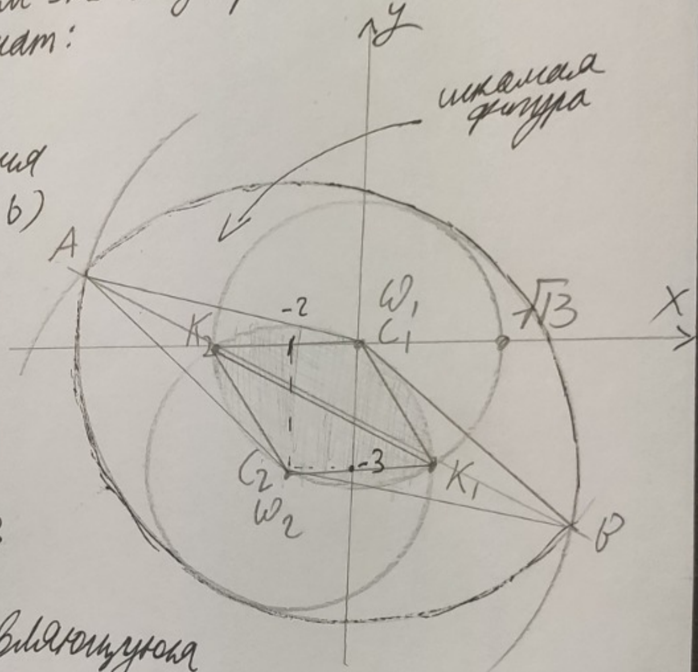
3. $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 13\\ a^2+b^2\le \min(-4a-6b,13)\end{cases}$

$(x-a)^2+(y-b)^2\le 13$ - уравнение окр. с $r=\sqrt{13}$ и центром в точке $(a;b)$

$a^2+b^2\le\min(-4a-6b,13)$ можно представить в виде системы:

$\begin{cases}a^2+b^2\le -4a-6b\\ a^2+b^2\le 13\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^2+4a+b^2+6b\le 0\\ a^2+b^2\le 13\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}(a+2)^2+(b+3)^2\le 13\\ a^2+b^2\le 13\end{cases}$ изобразим это в декартовой системе координат:



т.к. окружности из первого уравнения все будут иметь центры в точках $(a;b)$ то можно сразу изобразить с осями Ox, Oy и мы получим на ~~[illegible]~~ множество центров.

$\omega_1 = a^2+b^2\le 13 \Rightarrow x^2+y^2\le 13$

$\omega_2=(a+2)^2+(b+3)^2 \le (x+2)^2+(y+3)^2\le 13$

Получаем фигуру, являющуюся пересечением окружностей с центрами $(0;0)$ и $(-2;-3)$ и одинаковым $r=\sqrt{13}$

Нас же интересует совокупная площадь всех окружностей радиуса r, построенных с центрами в полученных точках. Это будет фигура, ограниченная точками, удаленными ровно еще на $\sqrt{13}$ от точек фигуры $(\omega_1\cap\omega_2)$

$\Rightarrow$ Это будет пересечение окружностей с центрами $(0;0)$ и $(-2;-3)$, но с одинаковым $R=2\sqrt{13}$

$\begin{cases}\angle K_2C_1K_1=120^\circ \Rightarrow \sin\angle K_2C_1K_1=\sin K_2C_1K_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \angle K_2C_2K_1=120^\circ\end{cases}$

3

$AB=2K_1K_2 \Rightarrow S_{ABC_1}=2S_{C_1K_1K_2}$

$\Rightarrow 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin K_1C_1K_1\cdot r^2=\frac{1}{2}\cdot\sin AC_1B\cdot 4\cdot r^2$

21102358 (U316399 M1300115) $\Rightarrow \sin K_1C_1K = 2\sin AC_1B \Rightarrow \sin AC_1B=\frac{\sqrt{3}}{4}$

чистовик

продолжение:

$\Rightarrow S_{AC_1B} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 \cdot 13$

$S_{\text{фигуры}} = 2\left(52\pi - \cancel{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\right) \cdot \arcsin$

Ответ: $104\pi - 13\sqrt{3}$

4

2. ABCD

$AB=2$

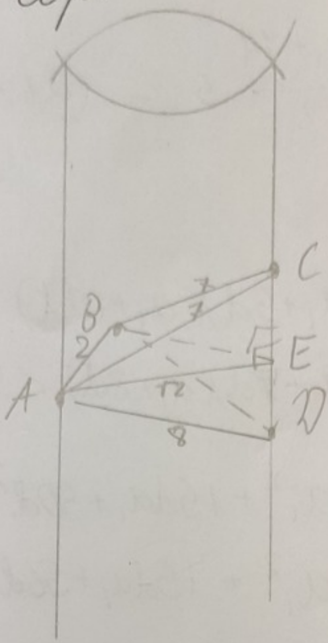
$AC=CB=7$

$AD=DB=8$

$CD \parallel h$

Черновик

$r=1$?



$CD \perp$ плоскости окр.

?

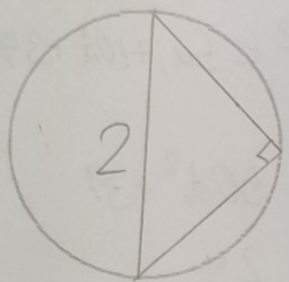
$CD \perp AB$

$\Rightarrow AB \parallel$ плоскости окр

$\Rightarrow AB$ - хорда разреза

$\Rightarrow$ мин. диаметр тогда, когда $AB=d$

$\Rightarrow r=1$



$\sqrt{2x^2}=2$

$2x^2=4$

$x^2=2$

$x=\sqrt{2}$ $AE=BE=\sqrt{2}$

$ED=\sqrt{64-2}=\sqrt{62}$

$CE=\sqrt{49-2}=\sqrt{47}$ $\Rightarrow CD=\sqrt{47}+\sqrt{62}$

3. $\exists a,b$

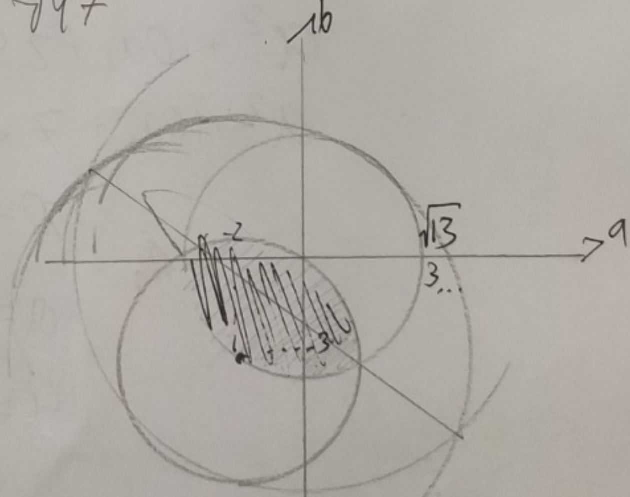
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 13\\ a^2+b^2 \le \min(-4a-6b, 13)\end{cases}$$

$a^2+b^2+4a+6b \le 0$

$(a+2)^2-4+(b+3)^2-9 \le 0$

$(a+2)^2+(b+3)^2 \le 13$

$a^2+b^2 \le 13$



$K_1K_2^2=2r^2-2r^2\cos C_1$

$4K_1K_2^2=4\cdot 2r^2-4\cdot 2r^2\cos C_1$

21102358 (U316399 M1300115)

1. $a_1\ a_2\ a_3$

$$S = \frac{a_1+a_5}{2}\cdot 5 = \frac{a_1+a_1+4d}{2}\cdot 5 = (a_1+2d)\cdot 5$$

$$5a_1+10d$$

$a_6 \cdot a_{11} > S+15$

$a_8 a_9 < S+39$

$$(a_1+5d)(a_1+10d) > S+15$$
$$(a_1+7d)(a_1+8d) < S+39$$

$$a_1^2+15da_1+50d^2 > 5a_1+10d+15$$
$$a_1^2+15da_1+56d^2 < 5a_1+10d+39$$

$$15+56d^2 < 50d^2+39$$

~~$(a_1+5)(a_1+10) > 5a_1+10+15$~~

~~$(a_1+7)(a_1$~~

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

$d < 2$

$d = 1$

$81-90+25>0$

$81-90+7$ √

$$a_1^2+15a_1+50 > 5a_1+25$$
$$a_1^2+15a_1+56 < 5a_1+49$$

$$a^2+10a_1+25>0 \quad (a+5)^2>0$$

-5

$$a^2+10a_1+7<0$$

$$D = 100-28 = 72$$

$$a = \frac{-10+\sqrt{72}}{2} \quad 72 = 36\cdot 2 \quad = \frac{-10+6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}-5$$

$$a = \frac{-10-\sqrt{72}}{2} = \frac{-10-6\sqrt{2}}{2} = -5-3\sqrt{2}$$

$3\sqrt{2}-5$ $\quad -1 \ldots 0$

$-3\sqrt{2}-5$ $\quad -10 \ldots -9$

$[-9;0]/-5$

21102358 (U316399 M1300115)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102358**

ID профиля: **316399**

Вариант 20

Чистовик

4. $\begin{cases} НОД(a;b;c)=10 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$ $\qquad 10=5\cdot 2$

$НОД(a;b;c)=10$ => любое из a,b,c можно представить как $2\cdot 5\cdot K$, более того, т.к. $НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16}$, то

$\begin{cases} 2^{17}\cdot 5^{16} \vdots a \\ 2^{17}\cdot 5^{16} \vdots b \\ 2^{17}\cdot 5^{16} \vdots c \end{cases}$ => их можно представить в виде $2\cdot 5\cdot 2^m\cdot 5^n$

$0\le m\le 16,\ m\in Z$

$0\le n\le 15,\ n\in Z$

$НОД(a;b;c)=10$ будет нарушаться, когда у всех трех чисел совпадает m или n.

=> С данными ограничениями подходят все тройки, у которых не совпадают n и m

=> $16^3\cdot 17^3-17\cdot 16^3-16\cdot 17^3+16\cdot 17$

$=16^3(17^3-17)-16(17^3-17)=(17^3-17)(16^3-16)=19975680$

=> Ответ: 19975680

6. $\triangle ABC$ вписан в $\omega(O,R)$

$A,O,C\in\omega_2$

$\omega_2\cap BC=P$

AT, TC – касат. к ω

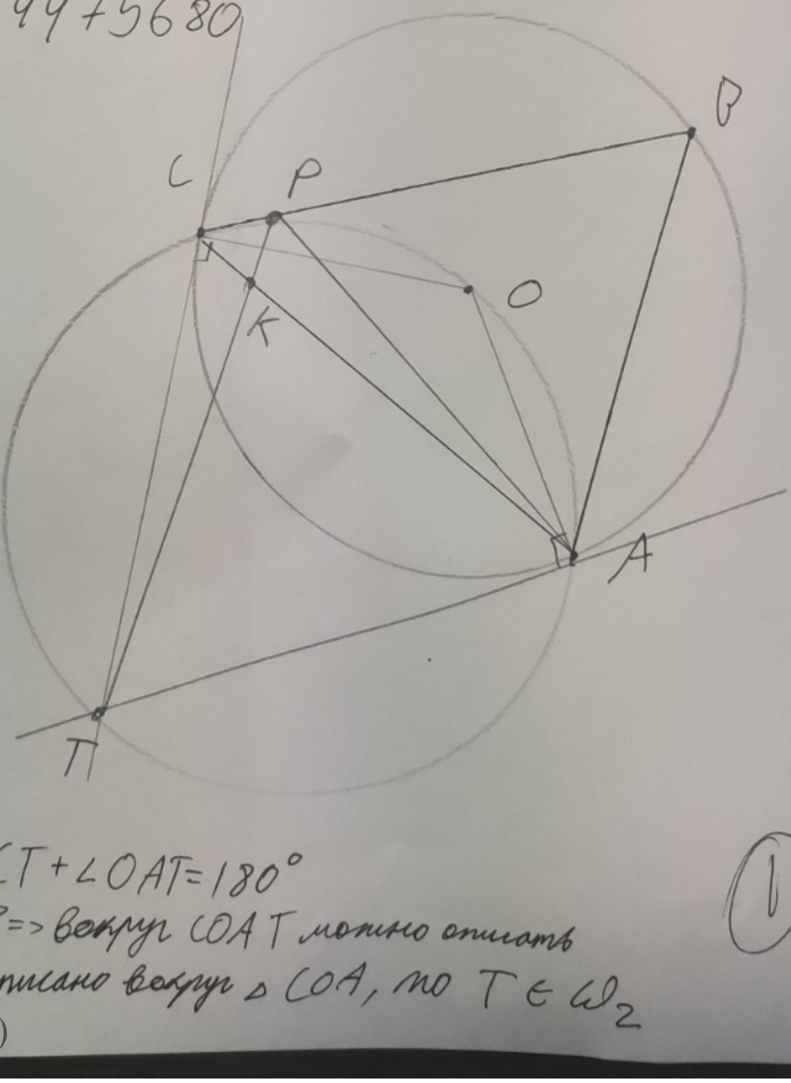
$TP\cap AC=K$

$S_{APK}=10$

$S_{CPK}=8$

а) найти S_{ABC}

б) $\angle ABC=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ найти AC



а) $\angle OCT+\angle OAT=180°$

=> $\angle COA+\angle CTA=180°$ => вокруг COAT можно описать окружность. т.к. ω_2 описано вокруг $\triangle COA$, то $T\in\omega_2$

1

продолжение б) чистовик

① $\angle B = \frac{1}{2} \smile CA$

$\angle COA = \smile CA = 2\angle B$

$\Rightarrow \angle CPA = \angle COA = 2\angle B$

$\angle CAT = \angle B$ как угол между хордой и касательной

$\Rightarrow \angle CPT = \angle CAT = \angle B$

$\Rightarrow \angle KPA = \angle B$

$\Rightarrow$ PK - бис. угла CPA

② $S_{APK} = 10$ $S_{APK} = \frac{1}{2} h_{APC} \cdot AK$

$S_{CPK} = 8$ $S_{CPK} = \frac{1}{2} h_{APC} \cdot CK$

$\Rightarrow \frac{KA}{CK} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{10}{8}$

а т.к. PK - бис., то $\frac{PA}{CP} = \frac{10}{8}$

пункт. б)

$\angle ABC = arctg \frac{1}{2}$

$= tg\angle B = \frac{1}{2}$

③ $\angle PCA = \angle PTA = \angle B$

$\Rightarrow \triangle TPA \sim \triangle ABC$ по 2 углам

$\Rightarrow \angle PAT = \angle CAB = \angle B + \angle PAC$

$\Rightarrow \angle PAB = \angle B \Rightarrow PA = PB$

$\Rightarrow \frac{PB}{PC} = \frac{10}{8}$

④ $\triangle CPK \sim \triangle ABC$ по 3 углам

$\Rightarrow K = \frac{CB}{CP} = \frac{18}{8} \Rightarrow S_{ABC} = K^2 \cdot S_{CPK}$

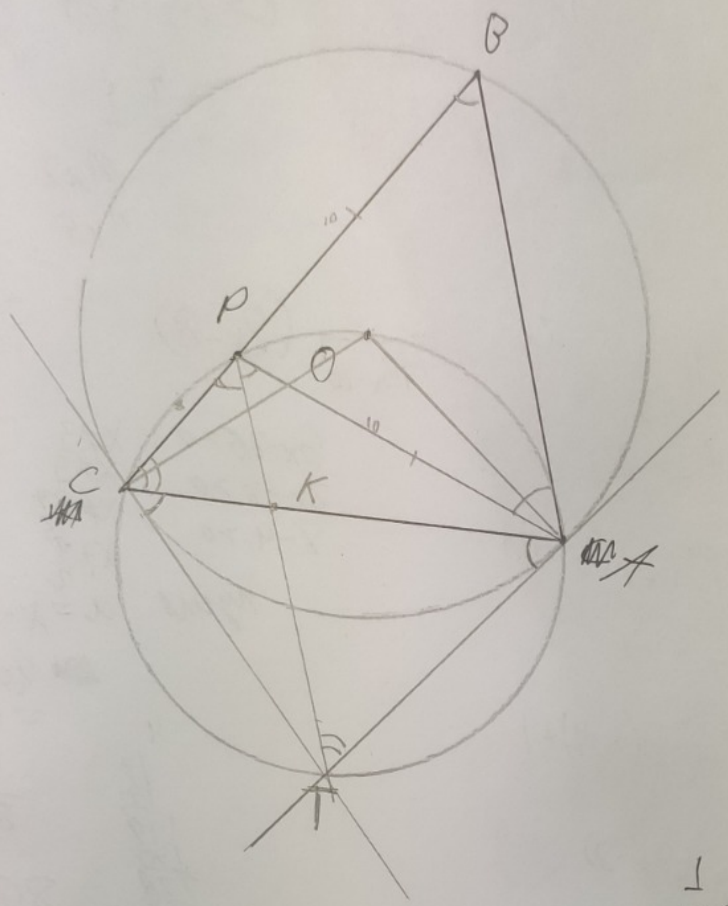
$S_{ABC} = \frac{18^2}{8^2} \cdot 8 = \frac{324}{8} = 40,5$

Ответ: 40,5

черн.

$S_{APK}=10$

$S_{CPK}=8$



$\angle B=\frac{1}{2}\angle CPA$

$r_1=\frac{AC}{2\sin(2\angle CPA)}$

$r_2=\frac{AC}{2\sin(\angle CPA)}$

$\frac{\sin(\angle CPA)}{\sin(2\cdot\angle CPA)}$

$\angle CAT=\frac{1}{2}\smile AC=\angle CBA$

$\angle COA=2\angle CBA=\angle CPA$

$\Rightarrow \angle PK=$ бис.

$\frac{1}{2}\,8x\cdot 10x\cdot\sin\alpha=18$

$80x\cdot\sin\alpha=36$

$\angle PCA=\angle PTA$

$\Rightarrow \triangle PA\cancel{T}\sim\triangle ABC$

$\angle PAT=\angle BAC$

$\Rightarrow \angle PAT=\angle B+\angle PAC\Rightarrow\angle BAP=\angle B$

$\Rightarrow PA=PB\Rightarrow\frac{PB}{PC}=\frac{10}{8}$

$\triangle CPK\sim\triangle ABC\Rightarrow k=\frac{18}{8}\Rightarrow$

$S_{ABC}=\frac{18^2}{8^2}\cdot 8=\frac{18^2}{8}=40{,}5$

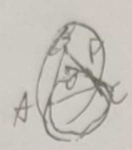
$18\cdot 18$: $144+180=324$

$\frac{81}{2}=40{,}5$

4.

a, b, c $\quad a,b,c \in \mathbb{N}$ Цел!

$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c)=10 \\ \text{НОК}(a,b,c)=2^{17}\cdot 5^{16} \end{cases}$



$2\cdot 5$

$2^{17}\cdot 5^{16} \vdots a$

$2^{17}\cdot 5^{16} \vdots b$

$2^{17}\cdot 5^{16} \vdots c$

$a=2\cdot 5\cdot\{x\}$ $\quad \le 2$

$b=2\cdot 5\cdot\{y\}$ $\quad \le 2x$

$c=2\cdot 5\cdot\{z\}$

до 16×2

15×5

$- \; \frac{2}{-} \; \frac{5}{-}$

$m \times 2$

$n \times 5$

$16^3 \cdot 17^3$

$-16^3 \cdot 17$

$-16 \cdot 17^3$

$+17\cdot 16$

5. $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) \quad \log_{(x-4)^2}(5x-26) \quad \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$

$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26) \\ \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)+1 \end{cases}$

$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) \\ \log_{(x-4)^2}(5x-26) = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)+1 \end{cases}$

$\begin{cases} \log_{(x-4)^2}(5x-26) = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) \\ \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4) = \log_{(x-4)^2}(5x-26)+1 \end{cases}$

$5x-26>0 \quad x\ne 3$

$2x-8>0 \quad x\ne 5$

$x-4>0 \quad x\ne \frac{27}{5}$

$x \ne \frac{9}{2}$

$16^3(17^3-17)$

$+16(17-17^3)$

$(16^3-16)(17^3-17)$

пусть $a=x-4$

$4096-16$

$=4080$

4896

8976

8976

$17 \cdot 17 = 119 + 170 = 288$; $288 \cdot 17 = 2016 + 2880 = 4896$

① $\quad a>0$

$\begin{cases} \log_{\sqrt{2a}}(a) = \log_{a^2}(5a-6) \\ \log_{\sqrt{5a-6}}(2a) = \log_{\sqrt{2a}} a+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\log_{2a} a = \log_a(5a-6) \\ \log_{(5a-6)} 2a = \log_{2a} a+1 \end{cases}$

$\begin{cases} \log_{\sqrt{2a}} a = \log_{\sqrt{5a-6}}(2a) \\ \log_{a^2}(5a-6) = \log_{\sqrt{2a}} a+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{2a} a = \log_{5a-6} 2a \\ \log_a(5a-6) = 4\log_{2a} a+1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\log_{5a-6} a}{\log_{5a-6} 2a} = \log_{5a-6} 2a$

$\log_{5a-6} a = \log^2_{5a-6} 2a$

$(\log_{5a-6} a + \log_{5a-6} 2)^2$

$256 \cdot 256$: $1536 + 2560 = 4080$

$288 \cdot 17 = 2016 + 2880 = 4896$

$4896 \cdot 4080 = 391680 + 19584000 = 19975680$

$19500 + 84 = 19584$